

Algebra

Übungsblatt 6

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020
25.11.2019

Aufgabe 1. (1) Seien G eine endliche Gruppe, $N \subset G$ eine normale Untergruppe und S eine p -Sylowuntergruppe von G , wobei p eine Primzahl ist.

Zeige: $S \cap N$ ist eine p -Sylowuntergruppe von N .

Hinweis: Betrachte die Komposition $\varphi : S \hookrightarrow G \rightarrow G/N$ und benutze den Isomorphiesatz für φ .

(2) Finde ein Beispiel einer Gruppe G , einer Untergruppe $H \subset G$ und einer p -Sylow Untergruppe $S \subset G$, sodass $S \cap H$ keine p -Sylowuntergruppe von H ist.

Aufgabe 2. Seien G eine Gruppe, $H \subset G$ eine Untergruppe und $N \subset G$ eine normale Untergruppe, sodass $\varphi : H \hookrightarrow G \rightarrow G/N$ ein Isomorphismus ist.

Zeige: Es existiert eine p -Sylowuntergruppe von G die ein semidirektes Produkt von einer p -Sylowuntergruppe von N und einer p -Sylowuntergruppe von H ist.

Aufgabe 3. Seien G eine Gruppe und $N \subset G$ eine normale Untergruppe. Angenommen, $i : N \rightarrow \text{Aut}(N)$, $g \mapsto i_g$, ist ein Isomorphismus mit $i_g(x) = gxg^{-1}$ für $x \in N$.

Zeige: Es existiert eine Gruppe H mit $G \simeq N \times H$.

Aufgabe 4.* Zeige: A_5 ist einfach.

Hinweis: Sei $N \subset A_5$ eine normale Untergruppe von Index m , $1 < m < |A_5| = 60$. Betrachte den kanonischen Gruppenhomomorphismus $A_5 \rightarrow A_5/N$ und zeige, dass $3 \mid m$ (benutze dafür, dass A_5 von 3-Zyklen erzeugt wird). Man beobachte, dass keine Sylowuntergruppe von A_5 normal in A_5 ist. Betrachte danach Sylowuntergruppen von N .