

# Algebra

## Übungsblatt 4

Prof. Dr. Fabien Morel  
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020  
11.11.2019

---

**Aufgabe 1.** Sei  $G$  eine Gruppe mit  $|G| = 33$  und  $X$  eine  $G$ -Menge mit  $|X| = 19$ . Zeige: Es existiert ein Fixpunkt in  $X$  (d.h.  ${}^G X \neq \emptyset$ ).

**Aufgabe 2.** Sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Betrachte die Operation von  $\text{GL}_n(K)$  auf  $K^n$ . Finde die Isotropiegruppe von  $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in K^n$ .

**Aufgabe 3.** Sei  $K$  ein Körper und  $n \in \mathbb{N}$ . Sei  $V(K^n)$  die Menge aller  $K$ -Untervektorräumen von  $K^n$ . Die Gruppe  $\text{GL}_n(K)$  operiert auf  $V(K^n)$  durch  $g.W = g(W)$ , wobei  $g \in \text{GL}_n(K)$  und  $W \in V(K^n)$ .

- (1) Wie viele Bahnen hat diese Operation?
- (2) Beschreibe alle Bahnen.

**Aufgabe 4.** Sei  $G$  eine Gruppe. Ein Kommutator in  $G$  ist ein Element der Form  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ , wobei  $a, b \in G$ . Sei

$$[G, G] = \{g \in G \mid g = \text{endliches Produkt von Kommutatoren aus } G\}.$$

- (1) Zeige:  $[G, G]$  ist eine normale Untergruppe von  $G$ . Diese Gruppe heißt die *Kommutatorgruppe von  $G$* .
- (2) Zeige: Die Faktorgruppe  $G/[G, G]$  ist abelsch.