

# Algebra

## Übungsblatt 3

Prof. Dr. Fabien Morel  
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020  
04.11.2019

---

**Aufgabe 1.** Seien  $G$  eine Gruppe und  $H$  eine Untergruppe von  $G$  mit Index 2 (d.h.  $|G/H| = 2$ ).

Zeige:  $H$  ist eine normale Untergruppe von  $G$ .

**Aufgabe 2.** Seien  $G$  eine Gruppe,  $H \subset G$  eine Untergruppe und  $N \subset G$  eine normale Untergruppe von  $G$ . Zeige:

(1)  $N \cap H$  ist eine normale Untergruppe von  $H$ .

(2)  $NH = \{nh \in G \mid n \in N, h \in H\}$  ist eine Untergruppe in  $G$ .

**Aufgabe 3.** Seien  $d, n$  zwei positive ganze Zahlen, sodass  $d|n$ .

Zeige: Es existiert ein Element der Ordnung  $d$  in der Gruppe  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ .

**Aufgabe 4.** Seien  $m, k$  zwei positive ganze Zahlen und  $n = mk$ .

Sei  $\varphi : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  die Abbildung, sodass  $\varphi(a) = \overline{ak}$  für  $a \in \mathbb{Z}$ .

(1) Zeige:  $\varphi : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  ist ein Gruppenhomomorphismus.

(2) Berechne  $\text{Ker } \varphi$ .

(3) Folgere aus (2), dass  $\psi : (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$  mit  $\psi(\bar{1}) = \bar{k}$  ein Monomorphismus von Gruppen ist.

(4) Zeige:  $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)/\text{Im } \psi \simeq (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}, +)$ .