

Algebra

Übungsblatt 12

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020
20.01.2020

Aufgabe 1. Sei $\alpha = \sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$.

- (1) Zeige: $[\mathbb{Q}[\alpha] : \mathbb{Q}] = 3$.
- (2) Sei $\beta = \alpha^2 + \alpha \in \mathbb{Q}[\alpha]$. Zeige: Der Grad von β über \mathbb{Q} ist 3.
- (3) Finde das Minimalpolynom von β über \mathbb{Q} .

Aufgabe 2. (1) Zeige: $X^4 - 2$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

Hinweis: Benutze das Eisensteinkriterium.

- (2) Finde den Grad von $\alpha = \sqrt[4]{2}$ über \mathbb{Q} .
- (3) Finde den Grad von α über $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.
- (4) Finde den Grad von α über $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

Aufgabe 3. (1) Zeige: $[\mathbb{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}] : \mathbb{Q}] = 4$.

- (2) Folgere, dass der Grad von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über \mathbb{Q} gleich 4 ist.
- (3) Finde das Minimalpolynom von $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ über \mathbb{Q} .