

Algebra

Tutoriumsblatt 8

Prof. Dr. Fabien Morel
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2019/2020
12.12.2019

Aufgabe 1. Seien p eine ungerade Primzahl, $\mathbb{F}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ein Körper mit p Elementen und $\mathbb{F}_p^{*2} := \{x^2 \mid x \in \mathbb{F}_p^*\}$.

- (1) Zeige: \mathbb{F}_p^{*2} ist eine Untergruppe von \mathbb{F}_p^* mit Index 2.
- (2) Seien $x, y \in \mathbb{F}_p$, sodass x, y keine Quadrate in \mathbb{F}_p sind.
Zeige: xy ist ein Quadrat in \mathbb{F}_p .

Aufgabe 2. Sei p eine ungerade Primzahl.

Zeige: Jedes Element in \mathbb{F}_p ist ein Kubus genau dann, wenn -3 ist kein Quadrat in \mathbb{F}_p .

Aufgabe 3. Zeige: Der Ring $\{P \in \mathbb{Q}[X] \mid P(0) \in \mathbb{Z}\}$ ist nicht Noethersch.

Bemerkung: Ein Ring R ist Noethersch genau dann, wenn jedes Ideal in R endlich erzeugt ist.