

Algebra

Tutoriumsblatt 7

Prof. Dr. Markus Land
Dr. Maksim Zhykhovich

WiSe 2022/2023
07.12.2022

Aufgabe 1. Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^3 - 2$ über \mathbb{Q} .

- (1) Zeige: $L = \mathbb{Q}(\alpha, \sqrt[3]{2})$, wobei $\alpha = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2} \in \mathbb{C}$.
- (2) Zeige: $[L : \mathbb{Q}] = 6$.

Aufgabe 2. Sei p eine ungerade Primzahl und $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}} \in \mathbb{C}$.

- (1) Zeige: $[\mathbb{Q}(\zeta_p) : \mathbb{Q}] = p - 1$. *Hinweis:* Benutze die Aufgabe 4, Übungsblatt 5.
- (2) Zeige, dass $\cos \frac{2\pi}{p} \in \mathbb{Q}(\zeta_p)$, und folgere, dass $\mathbb{Q}(\cos \frac{2\pi}{p}) \subset \mathbb{Q}(\zeta_p)$.
- (3) Finde den Grad von $\cos \frac{2\pi}{p}$ über \mathbb{Q} .
- (4) Finde das Minimalpolynom von $\cos \frac{2\pi}{5}$ über \mathbb{Q} .

Aufgabe 3. Seien p eine Primzahl, $a \in \mathbb{F}_p^*$ und $f = X^p - X - a \in \mathbb{F}_p[X]$. Sei g ein irreduzibles Teiler von f und $m = \text{Grad } g$. Seien $L = \mathbb{F}_p[X]/(g)$ eine Körpererweiterung von \mathbb{F}_p und α eine Nullstelle von g in L .

- (1) Zeige: $\alpha^{p^m} = \alpha$ in L . *Hinweis:* Benutze Satz 1.18 aus der Vorlesung
- (2) Zeige: $\alpha^p = \alpha + a$ in L .
- (3) Folgere aus (2) dass $\alpha^{p^k} = \alpha + ka$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
- (4) Folgere aus (1) und (3) dass $m = p$ und f irreduzibel in $\mathbb{F}_p[X]$ ist.
- (5) Zeige: $X^5 + 5X^3 - 6X + 2$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$.