

## Mathematik I für Physiker: Hausaufgabenblatt 8

### Aufgabe H8.1 (10 Punkte):

Gegeben sei die Folge  $(a_k)_{k \geq 2}$  mit  $a_k := \frac{4k}{(k^2-1)^2}$

(a) Sei  $n \geq 2$ . Zeige

$$\sum_{k=2}^n a_k = \frac{5}{4} - \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right).$$

(b) Untersuche die Reihe  $\left( \sum_{k=2}^n a_k \right)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq 2}}$  auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

### Aufgabe H8.2 (10 Punkte):

Bestimme in  $\widehat{\mathbb{R}}$  die Grenzwerte der folgenden Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , wobei

$$a_n := n^3 + n, \quad b_n := \sqrt[n]{(n+1)!}, \quad c_n := \sqrt[3]{n^3 + 2}, \quad d_n := \frac{n^2 + n}{\sqrt[n]{(n+1)!}}.$$

Untersuche außerdem die Folge  $(a_n - c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  auf Konvergenz in  $\widehat{\mathbb{R}}$ .

### Aufgabe H8.3 (10 Punkte):

Seien  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zwei Folgen reeller Zahlen. Zeige:

(a) Ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergent mit  $y = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ , so gilt

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = y - \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n.$$

(b) Ist  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben unbeschränkt und  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nach oben beschränkt, so gilt

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (y_n - x_n) = -\infty.$$

### Aufgabe H8.4 (10 Punkte):

Es sei  $b \in \mathbb{N}$  mit  $b \geq 2$  und

$$X := \left\{ (x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \{0, 1, \dots, b-1\}^{\mathbb{N}} : \nexists N \in \mathbb{N} : \forall k \geq N : x_k = b-1 \right\}.$$

Zeige, dass

$$f: X \rightarrow [0, 1[$$
$$(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \mapsto x := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{b^k}$$

bijektiv ist.

**Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 19.12.2019, 10.15 Uhr vor der Vorlesung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibliothek. Bitte einen der Namen markieren; danach wird bei der Rückgabe sortiert.**