

Mathematik I für Physiker: Hausaufgabenblatt 10

Aufgabe H10.1 (10 Punkte):

Bestimme, für welche $a, b, x > 0$, $b \neq 1$ die Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{1-b^n} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x)^n}{1+x^{2n}}$$

konvergieren.

Aufgabe H10.2 (10 Punkte):

Untersuche folgende Doppelreihen auf Konvergenz:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (n+m)^{-2}, \quad (b) \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=2}^{\infty} m^{-n}.$$

Aufgabe H10.3 (10 Punkte):

Es sei $\emptyset \neq I$ eine Menge und $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum. Für $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und Funktionen $x: I \rightarrow X$ und $y: I \rightarrow X$ sei $\lambda x + \mu y: I \rightarrow X$. Zeige

$$i \mapsto x_i \qquad i \mapsto y_i \qquad i \mapsto \lambda x_i + \mu y_i$$

a) $l^1(I; X) := \{x: I \rightarrow X : (x_i)_{i \in I} \text{ ist absolut summierbar}\}$

und

$$l^2(I; X) := \{x: I \rightarrow X : (\|x_i\|^2)_{i \in I} \text{ ist absolut summierbar}\}$$

sind \mathbb{K} -Vektorräume.

b) $l^1(I; X) \subseteq l^2(I; X)$.

Aufgabe H10.4 (10 Punkte):

Zeige, daß sich die Funktionen

$$f: \mathbb{C} \setminus \{1, -2\} \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad g: \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$$
$$z \mapsto \frac{1}{(1-z)(z+2)} \qquad z \mapsto \frac{z}{(1-z)^3(z+1)}$$

auf einer offenen Kreisscheibe $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ als Grenzwert einer konvergenten Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 schreiben lassen. Bestimme den Konvergenzradius jeder dieser Reihen.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 16.01.2020, 10.15 Uhr vor der Vorlesung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibliothek