

Analysis einer Variablen (LAG): Hausaufgabenblatt 5

Aufgabe H5.1 (15 Punkte):

Bestimme (mit Beweis) alle Lösungen für folgende Gleichungen im Körper $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$:

- (a) $4x = 5$,
- (b) $x^2 = 4$,
- (c) $x^2 = 5$,
- (d) $2x^2 = 1$,
- (e) $x^{200} + x = 6$.

Aufgabe H5.2 (10 Punkte):

Es sei K ein geordneter Körper und $a, b \in K$ mit $0 < a$ und $0 < b$. Zeige

$$\frac{1}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)} \leq \frac{1}{2}(a + b).$$

Aufgabe H5.3 (10 Punkte):

Sei G eine Gruppe und seien $H, L \subseteq G$ Untergruppen von G . Zeige:

- (a) Der Schnitt $H \cap L$ der beiden Untergruppen H und L ist eine Untergruppe von G .
- (b) Die Vereinigung $H \cup L$ der beiden Untergruppen H und L ist nur dann eine Untergruppe von G , wenn $H \subseteq L$ oder $L \subseteq H$ gilt.

Aufgabe H5.4 (10 Punkte):

Vereinfache folgende Mengen und bestimme (mit Beweis), sofern existent, Minimum, Maximum, Infimum und Supremum in \mathbb{R} .

- (a) $A := ([1, 2[\cup]2, 3]) \cup \{2\}$,
- (b) $B := \bigcup_{z \in \mathbb{Z}}]z, z + 1[$,
- (c) $C := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [0, \frac{1}{n}[$,
- (d) $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left] \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right[$.

Abgabe je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Donnerstag 21.11.2019, 10.15 Uhr vor der Übung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibliothek. Bitte einen der Namen markieren; danach wird bei der Rückgabe sortiert.