

Analysis einer Variablen (LAG) Ferienblatt

Aufgabe H13.1 (10 Punkte):

Es sei die Abbildung $F_A : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^5$ mit $A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ -4 & -4 & 0 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & 1 & -3 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben.
 $\underline{x} \mapsto A\underline{x}$

a) Zeige: Die Vektoren $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ bilden eine

Basis des \mathbb{R}^5 .

b) Berechne die darstellende Matrix $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(F_A)$ der Abbildung F_A bezüglich der Basis \mathcal{B} .

Aufgabe H13.2 (10 Punkte):

Hat das lineare Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = b_1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = b_2 \\ x_1 - x_2 = b_3 \end{cases}$$

für beliebig gewähltes $(b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$ eine eindeutige Lösung? Wenn ja, so gib diese in Abhängigkeit von (b_1, b_2, b_3) an.

Aufgabe H13.3 (10 Punkte):

Sei

$$\mathcal{P}_n := \left\{ \begin{array}{l} p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto p(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \end{array} : a_n, \dots, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

der $n + 1$ dimensionale Raum aller reellen Polynomfunktionen vom Grad kleiner gleich n und für $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ sei $X^j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Definiere

$$x \mapsto x^j$$

$$\begin{array}{l} \Phi : \mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n-1} \\ \sum_{k=0}^n a_k X^k \mapsto \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)a_{k+1} X^k \end{array}$$

a) Zeige: Φ ist \mathbb{R} -linear.

b) Berechne die darstellende Matrix von Φ bezüglich der Basen $\mathcal{A}_n := (1, X, \dots, X^n)$ und $\mathcal{A}_{n-1} := (1, X, \dots, X^{n-1})$.

c) Zeige: Die Menge $\mathcal{B}_n := \left\{ 1; 1 + X; 1 + X + X^2; \dots; \sum_{i=0}^n X^i \right\}$ bildet eine Basis von \mathcal{P}_n .

d) Berechne die darstellende Matrix $M_{\mathcal{A}_{n-1}}^{\mathcal{B}_n}(\Phi)$ von Φ bezüglich der Basen \mathcal{B}_n und \mathcal{A}_{n-1} .

Aufgabe H13.4 (10 Punkte):

Schreibe $f : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{C}$ als Potenzreihe um den Entwicklungspunkt -1 und be-

$$z \mapsto \frac{z+1}{z^2(z-1)}$$

stimme den Konvergenzradius. Für welche $z \in \mathbb{C}$ konvergiert diese Potenzreihe?

Aufgabe H13.5 (10 Punkte):

Es sei V ein n -dimensionaler K -Vektorraum und $W \subseteq V$ ein Untervektorraum mit $\dim_K(W) = n - 1$. Zeige: Es gibt eine K -lineare Abbildung $f : V \rightarrow K$ mit $\text{Kern}(f) = W$. Gilt diese Aussage auch für $1 \leq \dim_K(W) \leq n - 2$?

Aufgabe H13.6 (10 Punkte):

Berechne den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen.

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n z^{n!}$.

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(\exp\left(\frac{2\pi}{3}ni\right)\right) z^n$.

Abgabe (für alle, die noch Übungspunkte zum Wintersemester benötigen) je Zweier-/Dreiergruppe eine Lösung bis Dienstag 20.4.2020, 12.15 Uhr vor der Vorlesung oder im Abgabekasten zwischen B138 und Bibliothek