LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Prof. Dr. Thomas Vogel
Robert Schmidt

Sommersemester 2014
6.10.2014

Funktionentheorie

Nachholklausur

Nachname: ______________ Vorname: ______________

Matrikelnr.: ______________ Fachsemester: ______________

Abschluss: Bachelor, PO ❑ 2007 ❑ 2010 ❑ 2011 Master, PO ❑ 2010 ❑ 2011

Lehramt Gymnasium: ❑ modularisiert ❑ nicht modularisiert

❑ Diplom ❑ Anderes: ______________

Hauptfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ______

Nebenfach: ❑ Mathematik ❑ Wirtschaftsm. ❑ Inf. ❑ Phys. ❑ Stat. ❑ ______

Anrechnung der Credit Points für das ❑ Hauptfach ❑ Nebenfach (Bachelor / Master)

Bitte verstauen Sie Ihr Mobiltelefon ausgeschaltet in Ihrer Tasche; legen Sie bitte Ihren Lichtbild- und Studentenausweis sichtbar auf den Tisch.
Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Aufgaben** erhalten haben.
Schreiben Sie bitte nicht in den Farben rot oder grün. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Nachnamen und Vornamen**.
Lösen Sie bitte jede Aufgabe auf den dafür vorgesehenen Blättern. Falls der Platz nicht ausreicht, teilen wir zusätzliches Papier aus. Bitte tackern Sie dieses vor der Abgabe an der entsprechenden Stelle in Ihre Klausur.
Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
Sie haben **180 Minuten** Zeit, um die Klausur zu bearbeiten.

Viel Erfolg!

Pseudonym	1	2	3	4	5	6	7	8	9	$\sum$
	/5	/6	/8	/7	/7	/6	/7	/5	/9	/60

Name: ____

Aufgabe 1. [5 Punkte]

Richtig oder falsch (ohne Begründung)? *(Für jede korrekte Antwort gibt es einen Punkt, jede falsche Antwort gibt einen Punkt Abzug. Die minimale Punktzahl der Aufgabe ist* 0.

1. Eine auf einem Gebiet definierte holomorphe Funktion, die nur reelle Werte annimmt, ist konstant. **wahr** (folgt aus Cauchy-Riemann)
2. Es gilt $\int_{\partial D_1(0)} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi}$. **falsch** (tatsächlich ist das Integral gleich $2\pi i$)
3. Es existiert ein Gebiet $U \subset \mathbb{C}$ und eine surjektive holomorphe Abbildung $f : U \longrightarrow \overline{D_1(0)}$. **falsch** (nach dem Satz über die Gebietstreue.)
4. Es gibt eine holomophe Funktion auf $\mathbb{C}$ die genau in den Punkten $z_n = \log(n), n \in \mathbb{N}$, einfache Pole mit Residuum 1 hat. **wahr** (folgt aus dem Satz von Mittag-Leffler)
5. Es gilt
$$\int_{\partial D_3(0)} \frac{z^2}{z-2} dz = 8\pi i.$$
wahr (Cauchy-Integralformel)

Fortsetzung Aufgabe 1

Name: ______________________________

Aufgabe 2. [2+4 Punkte]

1. Zeige, dass die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \sin(1/z) \end{aligned}$$

   eine wesentliche Singularität in 0 hat.

2. Wo sind die folgenden, auf ganz $\mathbb{C}$ definierten, Funktionen

$$f(z) = |z|^2 \qquad g(x+iy) = x^2 - iy^2.$$

   komplex differenzierbar?

---

1. Wir nehmen an die Singularität ist nicht wesentlich. Dann hat $\varphi(z) = z^k \sin(1/z)$ eine hebbare Singularität bei 0, wenn $k \in \mathbb{N}$ groß genug ist. Weil $\varphi(1/(n\pi)) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, ist dann die fortgesetzte Funktion φ identisch 0 (Identitätssatz). Aber φ ist nicht identisch 0, die Annahme war also falsch.

2. f, g sind genau dort komplex differenzierbar, wo die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllt sind.

$$\frac{\partial Re(f)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial Re(f)}{\partial y} = 2y$$
$$\frac{\partial Im(f)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial Im(f)}{\partial y} = 0$$

   f ist also genau im Ursprung komplex differenzierbar.

$$\frac{\partial Re(g)}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial Re(g)}{\partial y} = 0$$
$$\frac{\partial Im(g)}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial Im(g)}{\partial y} = -2y$$

   g ist also genau in den Punkten $t - it \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}$ komplex differenzierbar.

Fortsetzung Aufgabe 2

Name: ________________________________

Aufgabe 3. [2+2+2+2 Punkte]

1. Formulieren Sie den Riemannschen Hebbarkeitssatz.
2. Zeige (ohne Verweis auf die folgende Teilaufgabe), dass eine holomorphe Funktion
$$f\colon D_2(0) \longrightarrow \mathbb{C}$$
mit der Eigenschaft $f(z) = f(2z)$ für alle $z \in D_1(0)$ bereits konstant ist.
3. Beweise, dass eine holomorphe Funktion $f\colon D_2(0) \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft $f(z) = f(2z)$ für alle $z \in D_1(0) \setminus \{0\}$ konstant ist.
4. Geben Sie eine nichtkonstante holomorphe Funktion $g : \mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ an, so dass $g(z) = g(2z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^-$ gilt.

---

1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $w \in U$ und $f : U \setminus \{w\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Wenn eine Umgebung V von w existiert, so dass die Einschränkung von f auf $V \setminus \{w\}$ beschränkt ist, so existiert eine holomorphe Funktion $F : U \longrightarrow \mathbb{C}$, so dass $f(z) = F(z)$ für alle $z \neq w$.
2. Sei $0 \neq w \in D_2(0)$, dann gilt $f(w) = f(w/2) = f(w/4) = \ldots = f(2^{-n})$ für $n \in \mathbb{N}$. Weil f stetig ist gilt auch $f(0) = \lim_n f(2^{-n}w) = f(w)$, denn $2^{-n}w$ ist eine Nullfolge. Nach dem Identitätssatz ist f konstant.
3. Weil $K = \overline{D_{3/2}(0)} \setminus D_{1/2}(0)$ kompakt und f stetig ist, ist f beschränkt auf K. Also existiert M, so dass $|f(z)| \leq M$ falls $z \in K$. Für alle $z \in D_2(0) \setminus \{0\}$ existiert $n \in \mathbb{Z}$, so dass $2^n z \in K$. Es folgt $|f(z)| = |f(2^n z)| \leq M$. Daher ist f auf $D_2(0) \setminus \{0\}$ beschränkt. Nach dem Riemamnnschen Hebbarkeitssatz existiert eine holomorphe Funktion $F : D_2(0) \longrightarrow \mathbb{C}$ die auf $D_2(0) \setminus \{0\}$ mit f übereinstimmt. Nach der vorangehenden Teilaufgabe ist F konstant, also auch f.
4. Sei $\log : \mathbb{C}^- \longrightarrow \mathbb{C}$ der Hauptzweig des Logarithmus. Dann hat
$$g(z) = \sin\left(2\pi \frac{\log(z)}{\log(2)}\right)$$
die verlangte Eigenschaft
$$\begin{aligned} g(2z) &= \sin\left(2\pi \frac{\log(2z)}{\log(2)}\right) = \sin\left(2\pi \frac{\log(z) + \log(2)}{\log(2)}\right) \\ &= \sin\left(2\pi \frac{\log(z)}{\log(2)} + 2\pi\right) = g(z). \end{aligned}$$

Fortsetzung Aufgabe 3

Name: ______________________________

Aufgabe 4. [1+2+3+1 Punkte]

1. Bestimme den maximalen Definitionsbereich von $f(z) = \frac{1}{1-z-z^2}$.
2. Sei $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ die Potenzreihe von f um den Ursprung. Geben Sie den Konvergenzradius der Reihe an.
3. Benutzen Sie die Relation $(1-z-z^2)f(z) = 1$ um zu zeigen, dass $c_0 = 1, c_1 = 1$ und $c_n = c_{n-1} + c_{n-2}$ für $n \geq 2$ gilt.
4. Bestimme $\limsup_n \sqrt[n]{c_n}$.

---

1. Die Nullstellen des Nenners sind $z_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, der maximale Definitionsbereich ist $\mathbb{C} \setminus \{z_{1,2}\}$.
2. Der Konvergenzradius ρ der Reihe ist der Radius des größten Kreises um 0, auf dem f holomorph ist. Also $\rho = \min\{|z_1|, |z_2|\} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.
3. Auf dem Konvergenzkreis der Reihe gilt

$$\begin{aligned} 1 &= f(z)(1-z-z^2) \\ &= \left(\sum_n c_n z^n\right)(1-z-z^2) \\ &= c_0 + (c_1 - c_0)z + (c_2 - c_1 - c_0)z^2 + (c_3 - c_2 - c_1)z^3 \\ &\quad + \ldots + (c_n - c_{n-1} - c_{n-2})z^n + \ldots . \end{aligned}$$

   Weil zwei Potenzreihen genau dann übereinstimmen, wenn die Koeffizienten übereinstimmen, folgt die Behauptung.

4. Nach dem Satz von Hadamard gilt wegen $0 < c_n \in \mathbb{R}$

$$\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \rho^{-1} = \limsup_n \sqrt[n]{|c_n|} = \limsup_n \sqrt[n]{c_n}.$$

Name: ____

Aufgabe 5. [7 Punkte]

Seien f, g holomorph auf einer Umgebung von $a \in \mathbb{C}$ und a sei eine Nullstelle der Ordnung k bzw. l von f bzw. g (wenn eine holomorphe Funktion an einem Punkt keine Nullstelle hat so sprechen wir von einer Nullstelle der Ordnung 0).
Zeigen Sie, dass a eine Nullstelle der Ordnung $k + l$ von $f \cdot g$ ist. Welchen Typ Singularität /Nullstelle hat die Funktion f/g bei a in Abhängigkeit von k, l.

Auf einer Umgebung von a existieren holomorphe Funktion $\hat{f}, \hat{g}$, so dass $\hat{f}(a) \neq 0 \neq \hat{g}$ und $f(z) = (z-a)^k \hat{f}(z), g(z) = (z-a)^l \hat{g}(z)$.
Dann gilt $(f \cdot g)(z) = (z-l)^{k+l} \hat{f}(z)\hat{g}(z)$ und $\hat{f}(a)\hat{g}(a) \neq 0$. Dies zeigt, dass $f \cdot g$ in a eine Nullstelle der Ordnung $k + l$ hat.
Wenn $k = l$, so gilt $f(z)/g(z) = \hat{f}(z)/\hat{g}(z)$. Wegen $\hat{g}(a) \neq 0$ ist die rechte Seite eine holomorphhe Funktion auf einer Umgebung von a, also hat f/g in a eine hebbare Singularität falls $k = l$.
Wenn $k > l$, dann $f(z)/g(z) = (z-a)^{k-l} \hat{f}(z)/\hat{g}(z)$. Weil $\hat{f}/\hat{g}(a) \neq 0$ hat f/g in a eine Nullstelle der Ordnung $k - l$.
Wenn $k < l$, dann gilt $f(z)/g(z) = \frac{1}{(z-a)^{l-k}} \frac{\hat{f}(z)}{\hat{g}(z)}$. Der erste Faktor hat einen Pol der Ordnung $l - k$ in a, der zweite hat eine hebbare Sing. bei a und der Wert der Fortsetzung an diesem Punkt ist $\hat{f}(a)/\hat{g}(a) \neq 0$. Also hat f/g in a einen Pol der Ordnung $l - k$.

Fortsetzung Aufgabe 5

Name: ____

Aufgabe 6. [2+2+2 Punkte]

1. Formulieren Sie den Satz von Liouville.
2. Geben Sie eine holomorphe Abbildung $f : \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ die beschränkt, aber nicht konstant ist.
3. Zeigen Sie, dass keine biholomorphe Abbildung $\psi : \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ existiert.

---

1. Eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe, beschränkte Funktion ist konstant.
2. Es gilt $|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))$. Also ist $f(z) = \exp(iz)$ wegen $|f(z)| = \exp(-\mathrm{Im}(z))$ auf $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$ beschränkt und offenbar nicht konstant.
3. Wenn es eine biholomphrphe Abbildung $\psi : \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ gäbe, so wäre $f \circ \psi^{-1}$ auf $\mathbb{C}$ holomorph, nicht konstant und beschränkt. Das widerspricht dem Satz von Liouville.

Fortsetzung Aufgabe 6

Name: ____________________

Aufgabe 7. [2+3+2 Punkte]

1. Wie lautet der Satz von der Gebietstreue?
2. Sei $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und $\overline{D} \subset U$ eine abgeschlossene Kreisscheibe mit Mittelpunkt c. Wir definieren
$$\delta = \frac{\min\{|f(z) - f(c)| \mid z \in \partial D\}}{2}$$
und nehmen in dieser Teilaufgabe an, dass $\delta > 0$. Man beweise, zum Beispiel mit Hilfe des Satzes von Rouché, dass $D_\delta(f(c)) \subset f(D)$.
3. Verwende die vorangehende Aufgabe, um den Satz von der Gebietstreue zu beweisen.

---

1. Sei $U \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet (d.h. offen und zusammenhängend) und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f entweder konstant oder $f(U)$ ein Gebiet.
2. Die Funktion $f - f(c)$ hat mindestens eine Nullstelle in D, nämlich c. Falls $|f(c) - w| < \min\{|f(z) - f(c)| \mid z \in \partial D\}$ hat $(f - f(c)) + (f(c) - w) = f - w$ auch mindestens eine Nullstelle in D (Satz von Rouché). Daher hat f eine w-Stelle in D, falls $w - f(c) < \delta$. Also $D_\delta(f(c)) \subset f(D)$.
3. Sei U ein Gebiet und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Weil f stetig ist, ist $f(U)$ zusammenhängend. Angenommen f ist nicht konstant und $c \in U$. Nach dem Identitätssatz existiert eine Scheibe $D(c) \subset U$ so dass $f(z) \neq f(c)$ für alle $c \neq z \in \overline{D(c)}$. Die letzte Teilaufgabe zeigt, dass eine Zahl $\delta > 0$ existiert, so dass $D_\delta(f(c)) \subset f(U)$. Also ist $f(U)$ offen.

Name: ______________________________

Aufgabe 8. [2+3 Punkte]

1. Sei U ein Gebiet und $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Welche Aussage macht das Maximumprinzip über die Funktion

$$\begin{aligned} g : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\longmapsto |f(z)|. \end{aligned}$$

2. Sei f nun eine holomorphe Funktion, so dass $\Re(f)$ ein lokales Maximum annimmt. Zeige, dass f konstant ist. (Hinweis: Exponentialfunktion).

---

1. Falls g ein lokales Maximum annimmt, so ist f konstant.
2. Die Funktion $\exp(f(z))$ ist holomorph und es gilt $|\exp(f(z))| = e^{\Re(f(z))}$. Wenn also $\Re(f)$ ein lokales Maximum annimmt, so auch $|\exp(f(z))|$. Nach dem Maximumprinzip ist $\exp(f(z))$ konstant. Weil exp ein lokaler Diffemorphismus ist, hat jeder Punkt in U eine Umgebung auf der f konstant ist. Weil U zusammenhängend ist folgt, dass f konstant ist.

Fortsetzung Aufgabe 8

Name: ______________________________

Aufgabe 9. [2+4+3 Punkte]

Seien a, b verschiedene komplexe Zahlen und $f : \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph.

1. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{C} \setminus \{ta + (1-t)b \,|\, t \in \mathbb{R} \setminus (0, 1)\}$ eine Stammfunktion hat.
2. Beweisen Sie, dass f auf $\mathbb{C} \setminus \{ta + (1-t)b \,|\, t \in [0, 1]\}$ genau dann eine Stammfunktion hat, wenn $\mathrm{res}_a(f) + \mathrm{res}_b(f) = 0$.
3. Zeigen Sie, dass

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} \setminus \{0, 1\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{1}{z(z-1)} \end{aligned}$$

eine Stammfunktion auf $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$ hat.

---

1. Das Gebiet $\mathbb{C} \setminus \{ta + (1-t)b \,|\, t \in \mathbb{R} \setminus (0, 1)\}$ ist sternförmig bezüglich $(a + b)/2$, denn jede Gerade durch $(a + b)/2$ schneidet die Gerade durch a, b genau in $(a + b)/2$ oder die Gerade geht durch a, b.

   Also hat f auf diesem Gebiet eine Stammfunktion.

2. Nachdem Residuensatz gilt für einen geschlossenen Integrationsweg γ in $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i \left(\mathrm{res}_a(f) n(\gamma, a) + \mathrm{res}_b(f) n(\gamma, b)\right).$$

   Wenn der Weg γ in $V := \mathbb{C} \setminus \{ta + (1-t)b \,|\, t \in [0, 1]\}$ liegt, also die Strecke zwischen a und b nicht schneidet, so gilt $n(\gamma, a) = n(\gamma, b)$.

   Eine Stammfunktion von f auf V existiert genau dann, wenn $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für alle geschlossenen Integrationswege in V gilt. Also hat f eine Stammfunktion in V genau dann, wenn $\mathrm{res}_a(f) + \mathrm{res}_b(f) = 0$. (Es gibt offensichtlich Integrationswege γ in V mit $n(\gamma, a) \neq 0$.)

3. Es gilt $\mathrm{res}_0(g) = -1$ und $\mathrm{res}_1(g) = 1$. Nach der vorangehenden Teilaufgabe hat g eine Stammfunktion auf $C \setminus [0, 1]$.

Fortsetzung Aufgabe 9