

# Mathématiques financières

Arnaud Triay

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Position du problème</b>	<b>2</b>
2.1	Pricing des options . . . . .	2
2.2	Formalisme . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Modèle de Cox, Ross et Rubinstein</b>	<b>3</b>
3.1	Description du modèle . . . . .	3
3.2	Une première approche par les arbres binaires . . . . .	3
3.3	Approche probabiliste . . . . .	4
<b>4</b>	<b>Modèle trinomial</b>	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Bibliographie</b>	<b>8</b>

# 1 Introduction

L'essor des marchés financiers et leur étude ont révélé la théorie des probabilités comme étant l'outil fondamental des mathématiques financières. Le but de ce travail est de comprendre dans un modèle simple de marché financier la pertinence de l'utilisation des outils probabilistes tels que les mesures de probabilité, l'espérance conditionnelle, ou encore la notion de martingale. Dans un premier temps, nous présenterons le problème du pricing des options, puis nous étudierons sa résolution dans le modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein. Ce modèle bien que simple permet de retrouver les résultats de modèles bien plus complexes comme celui de Black-Scholes, mais ce n'est pas le but de ce travail. Enfin nous étudierons les conséquences d'une légère modification transformant le modèle CRR en un modèle trinomial.

## 2 Position du problème

### 2.1 Pricing des options

Un marché financier est le lieu d'échanges de biens de différentes natures : actions, matière première, etc. Le cours d'un actif est le prix de vente à un instant donné de cet actif. Les modèles financiers sont basés sur le fait que le cours d'un actif à une date future est inconnue, cela a donné lieu à la création de divers types de contrats, notamment les *options*, et en particulier les "call" et les "put".

**Définition 2.1.1** <sup>1</sup> *Une option est un produit dérivé qui établit un contrat entre un acheteur et un vendeur. L'acheteur de l'option obtient le droit, et non pas l'obligation, d'acheter (call), ou de vendre (put) un actif sous-jacent à un prix fixé à l'avance (prix d'exercice, ou strike), pendant un temps donné ou à une date fixée. Ce contrat peut se faire dans une optique de spéculation ou d'assurance*

Ce travail porte uniquement sur les options de type européen, c'est à dire celles dont la date d'exercice est fixée. Elles sont utilisées par exemple par une compagnie de transport aérien pour se protéger d'une possible hausse de prix du carburant en acquérant le droit de se procurer du kérosène ultérieurement à un prix fixé. Une option donne un droit et non un devoir, si à l'échéance le cours de gazole est inférieur au prix d'exercice de l'option, la compagnie n'exercera pas son droit puisqu'il est plus intéressant d'acheter directement le carburant sur le marché.

Une option donnant un droit à son détenteur, celui-ci doit en contre-partie verser une certaine somme d'argent à l'autre signataire du contrat, c'est le prix de l'option. Le but pour le vendeur de l'option est de faire fructifier cet argent de manière à couvrir le déficit subit par un possible exercice de l'option à l'échéance. C'est le problème du pricing des options. Le vendeur de l'option doit répartir cette somme d'argent entre d'une part un actif sûr (compte de dépôt avec un intérêt fixe), et l'actif risqué en question, pour dans tous les scénarios possibles avoir à l'échéance un portefeuille de couverture égale au gain réalisé par le détenteur de l'option. Dans la suite, je considérerais un modèle à temps discret.

### 2.2 Formalisme

- L'échéance de l'option :  $T$
- Le prix d'exercice de l'option :  $K$
- Le prix de l'actif risqué à l'instant  $t$  :  $S_t$  ( $t \in [0; T]$ )
- Le prix de l'actif sûr à l'instant  $t$  :  $R_t = (1 + r)R_{t-1}$ ,  $r > 0$
- Le prix de l'option :  $C_0$
- Le portefeuille à l'instant  $t$  :  $V_t$
- Le gain à l'échéance du détenteur de l'option (*pay off*) :  $\varphi(S_T)$  ( $\varphi$  dépend de la nature de l'option : *call*, *put*, ou autre)

---

1. Wikipedia, modif. du 14/05/12, 11 :34

On note  $\Omega$  l'ensemble des scénarios d'évolutions possibles, ie si  $\omega \in \Omega$ , alors  $\omega$  contient les informations relatives au prix de l'actif risqué à tout instant. Par exemple si à chaque instant l'actif peut soit monter, soit descendre, on peut choisir  $\Omega = \{\text{up}, \text{down}\}^T$ .

Le but du vendeur de l'option est d'établir une stratégie de répartition de son capital, qui à chaque instant, va répartir son argent entre l'actif sûr et l'actif risqué en fonction de l'évolution de l'actif risqué, de manière à couvrir au temps  $T$  l'éventuel gain du détenteur l'option :  $\varphi(S_T)$ . En d'autres termes, il faut qu'il trouve deux suites de variables aléatoire  $(X_t)_t, (Y_t)_t$ , telles que :

- $\forall t : V_t(X, Y) = X_t R_t + Y_t S_t$
- $V_0 = C_0$
- $V_T = \varphi(S_T)$
- $\forall t : X_t R_t + Y_t S_t = X_{t+1} R_t + Y_{t+1} S_t$  (condition d'autofinancement)

Dans le cas d'un call :  $\varphi(S_T) = (S_T - K)_+$ , et dans celui d'un put :  $\varphi(S_T) = (K - S_T)_+$  où  $Z_+ = \max(Z, 0)$ . Puisque dans le cas d'un call l'option n'est exercée que si le cours de l'actif est supérieur au prix d'exercice, et dans celui d'un put elle n'est exercée que si le cours de l'actif est en dessous du prix d'exercice. Aussi,  $X_t$  et  $Y_t$  ne dépendent que des événements passés (de l'information disponible à la date  $t$ ).

### 3 Modèle de Cox, Ross et Rubinstein

#### 3.1 Description du modèle

Le modèle CRR, ou *modèle binomial*, est un modèle à temps discret dans lequel le cours de l'actif risqué peut d'un instant à l'autre soit monter, soit descendre. On choisit l'espace des événements suivant :  $\Omega = \{u, d\}^T$ , avec  $0 < d < 1 < u$ . Ainsi on a  $S_{t+1} = uS_t$  ou  $S_{t+1} = dS_t$  (ie, la variable aléatoire  $\frac{S_{t+1}}{S_t}$  est à valeur dans  $\{u, d\}$ , c'est la  $(t + 1)^{\text{ème}}$  forme coordonnée ).

#### 3.2 Une première approche par les arbres binaires

Dans le modèle CRR, l'évolution du cours de l'actif risqué peut se mettre sous la forme d'un arbre binaire de hauteur  $T$ . Ses feuilles représentent les événements élémentaires. Les différents noeuds de hauteur  $t$  représentent les classes d'équivalences sur  $\Omega$  selon la relation  $\omega R_t \omega'$  si et seulement si  $\omega$  et  $\omega'$  coïncident jusqu'à la date  $t$ .

Tout comme les arbres binaires, la résolution du problème de pricing dans ce modèle a un lien fort avec la récursivité. En effet, si l'on trouve une solution au problème dans le cas  $T = 1$  : c'est à dire deux valeurs  $X_1, Y_1$  telles que dans tous les cas  $V_1 = \varphi(S_1)$ , alors on peut résoudre le cas  $T$  quelconque par récursivité.

cas  $T = 1$

Les valeurs  $X_1, Y_1$  doivent vérifier :

$$M \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(S_0 u) \\ \varphi(S_0 d) \end{pmatrix} \quad (1)$$

où

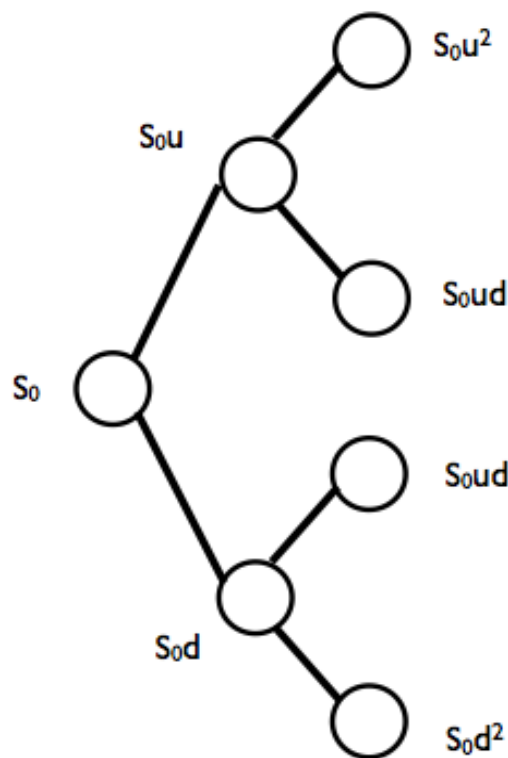


FIGURE 1 – Arbre binaire représentant l'évolution de l'actif risqué, dans le cas  $T=2$

$$M = \begin{pmatrix} 1+r & S_0 u \\ 1+r & S_0 d \end{pmatrix}$$

Or l'équation (1) admet des solutions (une unique solution en fait), dès que  $u \neq d$ , et ce pour toute fonction  $\varphi$ . Et même pour toute variable aléatoire  $H$ , il existe une stratégie  $(X, Y)$  telle que  $V_1(X, Y) = H$  (les deux variables aléatoires sont égales), on dit que l'actif  $H$  est simulable et que le marché est complet si tout actif est simulable, c'est le cas ici. Et on a donc trouvé le prix de l'option  $C_0 = X_1 R_0 + Y_1 S_0$

### cas T quelconque

Soit  $\omega_u$  (resp.  $\omega_v$ ) la classe d'équivalence des événements élémentaire dont la première coordonnée est  $u$  (resp.  $v$ ). On suppose avoir résolu le problème de pricing sur  $\omega_u$  et  $\omega_v$ . C'est à dire qu'on a trouvé des valeurs  $V_1^u$  et  $V_1^d$  qui sont solution au problème de pricing. Alors  $X_1$  et  $Y_1$  définies par :

$$M \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1^u \\ V_1^d \end{pmatrix}$$

sont telles que  $C_0 = X_1 R_0 + Y_1 S_0$  est solution au problème de pricing d'échéance  $T$ .

Finalement, on remarque que les caractéristiques du modèle sont fortement liées aux caractéristiques de  $M$  : injectivité, surjectivité. Si l'on supprime l'actif  $S$ , d'une part le problème aurait perdu tout son sens, d'autre part le marché ne serait plus complet. Par ailleurs si l'on avait rajouté la possibilité de traiter avec un autre actif  $Q$ , il y aurait eu plusieurs stratégies possibles (non injectivité de  $M$ ). Nous allons voir que ces caractéristiques d'existence et d'unicité se retrouvent dans l'approche probabiliste.

Enfin on peut remarquer que l'approche par les arbres binaires ne fait pas état des probabilités de hausse ou de baisse du cours de l'actif, puisque le pricing de l'option doit couvrir la perte finale dans tous les cas possibles.

## 3.3 Approche probabiliste

### Recherche d'une probabilité

Nous allons commencer par établir les conditions que doit satisfaire une probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  pour refléter convenablement le marché. Ainsi, si l'on note  $p$  la probabilité de hausse de l'actif  $S$ , on a :

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_{t+1}}{S_t} = u\right) = p, \mathbb{P}\left(\frac{S_{t+1}}{S_t} = d\right) = 1 - p$$

Une condition souvent imposée à un modèle est la viabilité du marché, ou encore *absence d'opportunité d'arbitrage* : on ne peut faire de gain sans prendre de risque.

**Définition 3.3.1** *Un marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage, c'est à dire une stratégie  $(X, Y)$ , autofinancée, telle que  $\forall t, V_t(X, Y) \geq 0$  et telle que  $V_0 = 0$  et  $V_T \neq 0$ .*

Cette condition impose  $d < 1 + r < u$ , en effet si  $1 + r < d$ , avec  $X_1 = -1, Y_1 = \frac{R_0}{S_0}$  on a :  $V_0 = 0$  et  $V_1 = X_1 R_1 + Y_1 S_1 > (1 + r)(X_1 R_0 + Y_1 S_0) = 0$ . Un raisonnement analogue exclut  $u < 1 + r$  (les cas  $1 + r = u$  ou  $d$  n'ont pas d'intérêt).

Enfin, pour fixer la probabilité, on doit rajouter une autre condition qui est qu'à tout instant, compte tenu de l'information dont on dispose : les événements passés -c'est à dire que l'on connaît la classe d'équivalence pour la relation  $R_t$  de l'événement élémentaire réel- le gain espéré par la stratégie est égal au gain réalisé en plaçant tout le porte feuille sur l'actif sans risque. Pour formaliser cette condition, il est nécessaire d'introduire des nouveaux outils.

On considère la suite de tribus :  $(\mathcal{F}_t)$  où  $\forall t > 0, \mathcal{F}_t$  est engendrée par la classe d'équivalence  $R_t$  et  $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$  Il est clair que  $(\mathcal{F}_t)$  est croissante pour l'inclusion. Alors la condition précédente s'écrit :

$$\mathbb{E}(V_t | \mathcal{F}_{t-1}) = (1+r)V_{t-1}$$

Or, les variables aléatoires  $X_t$  et  $Y_t$  sont  $\mathcal{F}_{t-1}$  mesurables donc :

$$\mathbb{E}(V_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbb{E}(X_t R_t + Y_t S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = X_t R_t + Y_t \mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_{t-1})$$

Ce qui amène à la condition :  $\mathbb{E}(S_t | \mathcal{F}_{t-1}) = (1+r)S_{t-1}$ . Alors en notant  $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{R_t}$ , on a :

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \tilde{S}_{t-1}$$

Ainsi la condition entraîne que  $(\tilde{S}_t)$  est une martingale sous  $\mathbb{P}$  et elle donne une nouvelle équation vérifiée par  $p$  :  $\mathbb{E}(\tilde{S}_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{\tilde{S}_{t-1}}{1+r}(pu + (1-p)d) = \tilde{S}_{t-1}$ , soit :

$$\mathbb{E}\left(\frac{S_{t+1}}{S_t}\right) = pu + (1-p)d = 1+r$$

Il existe donc une unique probabilité qui rend  $(\tilde{S}_t)$  martingale, cette probabilité s'appelle *probabilité risque neutre*.

**Définition 3.3.2** Une probabilité risque neutre est une probabilité sous laquelle  $(\tilde{S}_t)$  est une martingale et telle que  $\forall \omega \in \Omega : \mathbb{P}(\omega) > 0$ .

Aussi on remarque que la condition  $0 < p < 1$  équivaut à  $d < 1+r < u$ . Il y a donc un lien entre la viabilité du marché et l'existence de la probabilité risque neutre.

Vérifions que la donnée de  $\mathbb{P}(\frac{S_{t+1}}{S_t} = u)$  et  $\mathbb{P}(\frac{S_{t+1}}{S_t} = d)$  définit bien  $\mathbb{P}$ . Soit  $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_T) \in \Omega$ , alors si  $|\omega|_u$  désigne de le nombre de coordonnées de  $\omega$  égales à  $u$ , on a :

$$\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{S_0} = \omega_1, \dots, \frac{S_T}{S_{T-1}} = \omega_T\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S_1}{S_0} = \omega_1\right) \dots \mathbb{P}\left(\frac{S_T}{S_{T-1}} = \omega_T\right) = p^{|\omega|_u} (1-p)^{T-|\omega|_u}$$

### Solution au problème de pricing

Remarquons que  $(X_t)$  et  $(Y_t)$  sont deux processus prévisibles (ie  $\forall t, X_t$  est  $\mathcal{F}_{t-1}$  mesurable), alors :

$$\mathbb{E}(\tilde{V}_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}(X_{t+1} + Y_{t+1} \tilde{S}_{t+1} | \mathcal{F}_t) = X_{t+1} + Y_{t+1} \tilde{S}_t = X_t + Y_t \tilde{S}_t = \tilde{V}_t$$

(l'avant dernière égalité découlant de la condition d'autofinancement). Ainsi  $(\tilde{V}_t)$  est aussi une martingale.

Ainsi, si  $H$  est une variable aléatoire représentant par exemple le pay-off d'une option, s'il existe une stratégie  $(X, Y)$  telle que  $V_T(X, Y) = H$  (et on sait qu'il en existe puisqu'on a déjà vu que le modèle était complet), alors la propriété de martingale de  $\tilde{V}_t$  donne :

$$\mathbb{E}(\tilde{V}_T) = V_0 = \mathbb{E}\left(\frac{H}{R_T}\right) \quad (2)$$

Ce qui fixe le prix initiale de l'option  $C_0$ . Mais plus encore :

$$\forall t : \mathbb{E}(\tilde{V}_T | \mathcal{F}_t) = \tilde{V}_t = X_t + Y_t \tilde{S}_t = \mathbb{E}\left(\frac{H}{R_T} | \mathcal{F}_t\right) \quad (3)$$

Et  $\Delta \tilde{V}_t = Y_t \Delta \tilde{S}_t = \mathbb{E}\left(\frac{H}{R_T} | \mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\frac{H}{R_T} | \mathcal{F}_{t-1}\right)$ , d'où

$$Y_t = \frac{\mathbb{E}\left(\frac{H}{R_T} | \mathcal{F}_t\right) - \mathbb{E}\left(\frac{H}{R_T} | \mathcal{F}_{t-1}\right)}{\Delta \tilde{S}_t}$$

$$X_t = \tilde{V}_t - Y_t \tilde{S}_t$$

Il reste à vérifier que ces variables aléatoires sont prévisibles (si l'on fait abstraction de notre connaissance due aux arbres binaires de la première partie). Notons pour  $\omega \in \Omega : \omega_t$  sa coordonnée numéro  $t$ ,  $G = \mathbb{E}\left(\frac{H}{R_T} | \mathcal{F}_t\right)$ , pour  $\omega_1, \dots, \omega_{t-1}$  fixés,  $G_u$  (resp.  $G_d$ ) la valeur prise par  $G$  si  $\omega_t = u$ , (resp.  $d$ ). Remarquons que  $\Delta \tilde{S}_t = \tilde{S}_{t-1} \left(\frac{S_t}{S_{t-1}} - (1+r)\right)$  et que par les propriétés de l'espérance conditionnelle :  $\mathbb{E}\left(\frac{H}{R_T} | \mathcal{F}_{t-1}\right) = \mathbb{E}(G | \mathcal{F}_{t-1}) = G_u \mathbb{P}(\omega_t = u | \omega_1, \dots, \omega_{t-1}) + G_d \mathbb{P}(\omega_t = d | \omega_1, \dots, \omega_{t-1}) = G_u p + G_d(1-p)$  la dernière égalité découlant du fait que les variables aléatoires  $\omega_i$  sont indépendantes. Alors :

$$Y_t = \frac{(G - G_u) \frac{(1+r)-d}{u-d} + (G - G_d) \frac{u-(1+r)}{u-d}}{\frac{S_t}{S_{t-1}} - (1+r)} = \frac{G_u - G_d}{u-d}$$

dans les deux cas, ie si  $\omega_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} = u$  ou  $d$ . Donc  $Y$  est bien prévisible, il en résulte que  $X$  aussi puisque la stratégie est autofinancée.

L'équation (2), dans le cas d'une fonction de pay off, et plus précisément d'un call se réécrit comme suit :

$$V_0 = \frac{1}{R_T} \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} p^k (1-p)^{T-k} \varphi(S_0 u^k d^{T-k}) = \frac{1}{R_T} \sum_{k=0}^T \binom{T}{k} p^k (1-p)^{T-k} (S_0 u^k d^{T-k} - K)_+ \quad (4)$$

On a donc résolu le problème du pricing.

## 4 Modèle trinomial

### Modèle trinomial incomplet

Pour comprendre les liens entre viabilité, complétude du marché, existence, unicité de la probabilité risque neutre, on étudie les différences entre le modèle CRR et un modèle semblable dans lequel  $\Omega = \{u, m, d\}^T$  avec  $d < m < u$  et  $0 < d < 1 < u$ .

Une des premières interrogation est la viabilité du marché. On remarque que l'existence d'une probabilité risque neutre est une condition suffisante pour que le marché soit viable. En effet, soit  $\mathbb{P}$  une telle probabilité. Alors si  $V_T \geq 0$  on a :  $\mathbb{E}(V_T) = \mathbb{E}(V_0) = V_0 = 0$  donc  $V_T = 0$  puisque  $\forall \omega : \mathbb{P}(\omega) > 0$ . Cherchons alors une probabilité risque neutre, l'actif  $S$  doit être une martingale ce qui équivaut à :

$$p_u u + p_m m + (1 - p_u - p_m) d = 1 + r \quad (5)$$

Mais l'équation (5) ne fixe pas totalement la  $\mathbb{P}$ , il existe donc plusieurs probabilités risque neutre.

Se pose alors la question de la complétude de ce marché, la non unicité de la probabilité risque neutre est en fait l'indicateur de l'absence de bijectivité entre l'espace des stratégies et celles des actifs simulables. En effet, la matrice  $M$  de l'équation (2) a pour équivalent dans ce modèle une matrice 3x2 et ne peut donc être surjective. Le marché n'est donc pas complet :

$$\begin{pmatrix} 1+r & S_0u \\ 1+r & S_0m \\ 1+r & S_0d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(S_0u) \\ \varphi(S_0m) \\ \varphi(S_0d) \end{pmatrix} \quad (6)$$

Vérifions que la non unicité de la probabilité risque neutre entraîne l'incomplétude du marché. Si le marché est complet et admet  $\mathbb{P}_1$  et  $\mathbb{P}_2$  comme probabilité risque neutre,  $\forall \omega : \mathbf{1}_{\{\omega\}}$  est simulable, alors il existe un portefeuille actualisé ( $\tilde{V}_t$ ) qui est une martingale et tel que  $\tilde{V}_T = \frac{\mathbf{1}_{\{\omega\}}}{R^T}$ , alors :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(\tilde{V}_T) = V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(\tilde{V}_T), \text{ d'où : } \mathbb{E}_{\mathbb{P}_1}(\mathbf{1}_{\{\omega\}}) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}_2}(\mathbf{1}_{\{\omega\}}), \text{ finalement : } \mathbb{P}_1(\omega) = \mathbb{P}_2(\omega)$$

On peut donc se demander quelles sont les actifs simulables. Dans le cas  $T = 1$  : ils sont les éléments de l'image de  $M$ , donc un plan. Après calculs, on trouve que  $H = (h_1, h_2, h_3)$  est simulable si et seulement si :

$$(m-d)h_1 + (d-u)h_2 + h_3(u-m) = 0 \quad (7)$$

En assimilant l'ensemble des variables aléatoires sur  $\Omega$  à  $\mathbb{R}^{3^T}$ , le sous espace des variables aléatoires simulables  $\Lambda_T$  peut être considéré comme l'intersection de  $\frac{3^T-1}{2}$  formes linéaires : la condition précédente étant répétée sur chaque noeud qui n'est pas une feuille de l'arbre ternaire représentant l'évolution du marche, si l'on montre que ses formes linéaires sont indépendantes alors la dimension cherchée est  $\frac{3^T+1}{2}$ , mais la généralisation n'est pas aisée. Prouvons le résultat par récurrence.

$T = 1$  : le résultat est vrai d'après ce qui précède.

Hérédité : on suppose que les actifs simulables avec une échéance de  $T$  ont la dimension convenue. À chaque feuille de l'arbre, ie à chaque scénario au temps  $T$ , il faut choisir 2 variables  $X_{T+1}$  et  $Y_{T+1}$  qui définissent la nouvelle répartition du portefeuille au temps  $T$ , elles sont liées par la relation d'autofinancement :  $h_T = X_{T+1}R_T + Y_{T+1}S_T$ , il suffit donc de ne choisir qu'  $Y_{T+1}$ . On aura alors :

$$\begin{pmatrix} h_{T+1}^1 \\ h_{T+1}^2 \\ h_{T+1}^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r & S_T(u - (1+r)) \\ 1+r & S_T(m - (1+r)) \\ 1+r & S_T(d - (1+r)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_T \\ Y_{T+1} \end{pmatrix}$$

Or cette matrice de transition élémentaire est injective dès que  $u \neq d$ , il suffit donc de considérer une matrice de transition globale dans  $\mathcal{M}_{2,3^T,3^{T+1}}(\mathbb{R})$ , dont les blocs diagonaux sont les matrices de transition élémentaire.

Alors  $\Lambda_{T+1}$  est l'image par une application surjective d'un espace de dimension  $\frac{3^T+1}{2} + 3^T = \frac{3^{T+1}+1}{2}$ . Ce qui termine la récurrence. Ainsi la quasi-totalité des actifs conditionnels ne sont pas simulables puisque  $\Lambda_T$  est un sous espace strict de  $\mathbb{R}^{3^T}$ . Et vérifier qu'un actif est simulable demande  $\frac{3^T-1}{2}$  calculs car  $\Lambda_T$  est l'intersection des noyaux de  $\frac{3^T-1}{2}$  formes linéaires indépendantes.

Ceci justifie l'algorithme récursif de vérification d'un actif suivant : si  $T = 1$  alors il suffit que l'actif vérifie l'équation (7). Sinon, on vérifie que les 3 sous vecteurs composés respectivement des  $3^{T-1}$  premières, secondes et troisièmes coordonnées définissent bien trois actifs simulables, en calculant récursivement les prix des options associées, puis on vérifie que ces trois prix définissent bien un actif simulable pour  $T = 1$ . Une implémentation de cet algorithme est proposée en annexe.

## Modèle trinomial complet

Ce qui précède met en évidence le lien entre l'incomplétude et la non surjectivité de l'application linéaire de transition. Cela nous invite donc à modifier cette application pour la rendre surjective. Une solution est d'ajouter un vecteur colonne linéairement indépendant des deux autres, il s'interprète comme l'ajout d'un nouvel actif risqué dont l'évolution à chaque tour n'est pas proportionnelle à celle de  $S$ . La matrice de transition devient donc :

$$\begin{pmatrix} 1+r & S_0u & T_0u' \\ 1+r & S_0m & T_0m' \\ 1+r & S_0d & T_0d' \end{pmatrix}$$

Une troisième équation, fixe la probabilité risque neutre. En effet  $(\tilde{T}_t)$  doit être une martingale, on a alors :  $\mathbb{E}(\tilde{T}_{t+1}|\mathcal{F}_t) = \tilde{T}_t$  soit :

$$p_u u' + p_m m' + (1 - p_u - p_m) d' = 1 + r \quad (8)$$

Ainsi l'application linéaire étant surjective, le marché est complet. La probabilité risque neutre est unique. À chaque actif correspond une unique stratégie, et donc un prix unique pour l'option. Cependant si l'on rajoute un troisième actif, dont l'évolution est linéairement indépendante des deux autres, il n'existe plus de probabilité risque neutre qui rend tous les actifs actualisés des martingales.

NB : il faut pour cela que  $p_u, p_m$  et  $1 - p_u - p_m$  soit dans  $]0; 1[$ , ce qui contraint  $u', m'$  et  $d'$ .

## 5 Bibliographie

- É. Pardoux, *Processus de Markov et applications*, Dunod, 2006  
D. Lamberton, B. Lapeyre, *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, Ellipses, 1997  
J. Jacod, P. Protter, *l'essentiel en théorie des probabilités*, Cassini, Paris, 2003