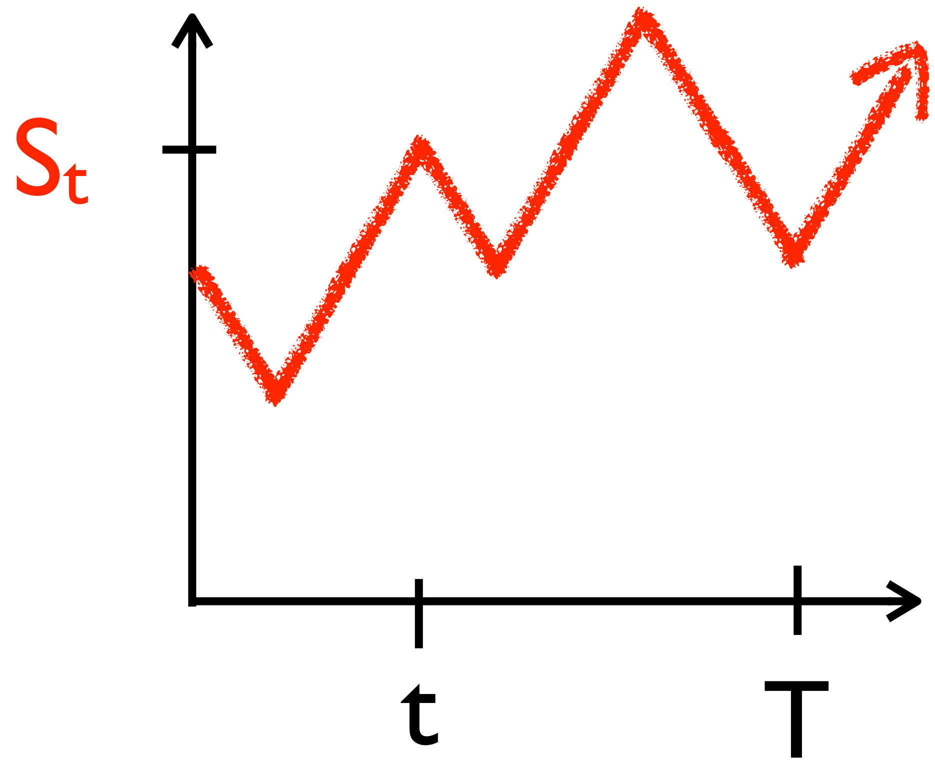
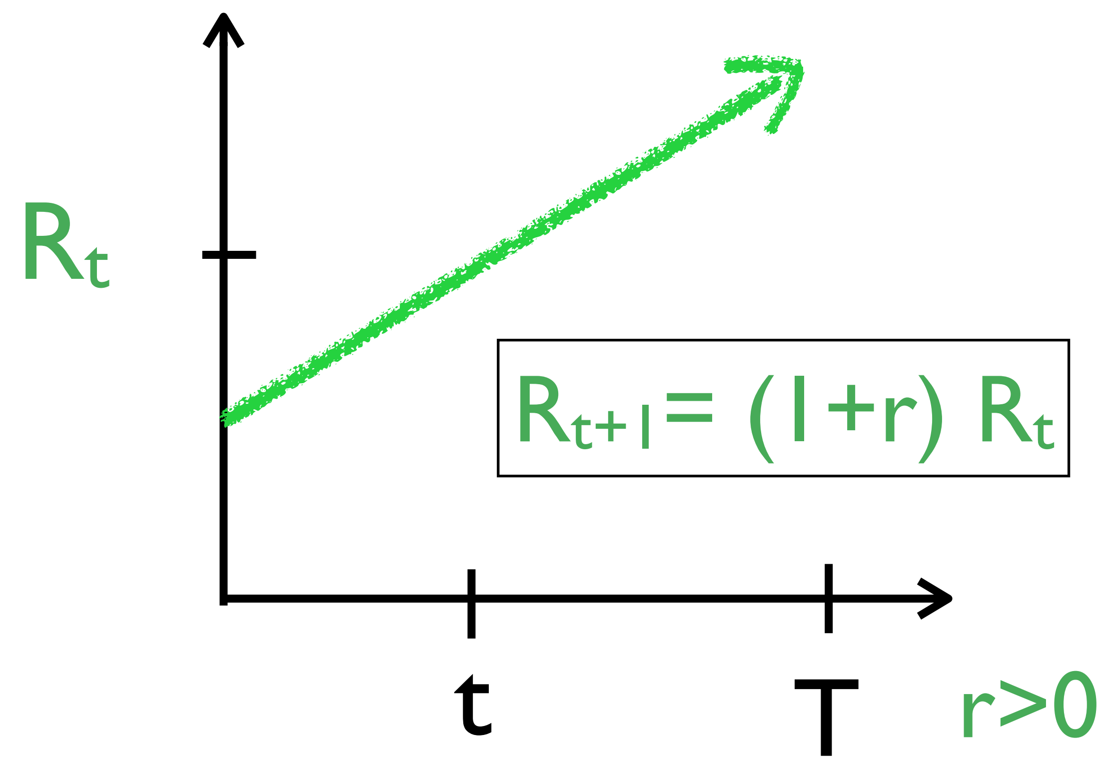
Mathématiques financières

- Marché financier, stratégie, pricing
- Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein
- Un modèle trinomial

Marché financier



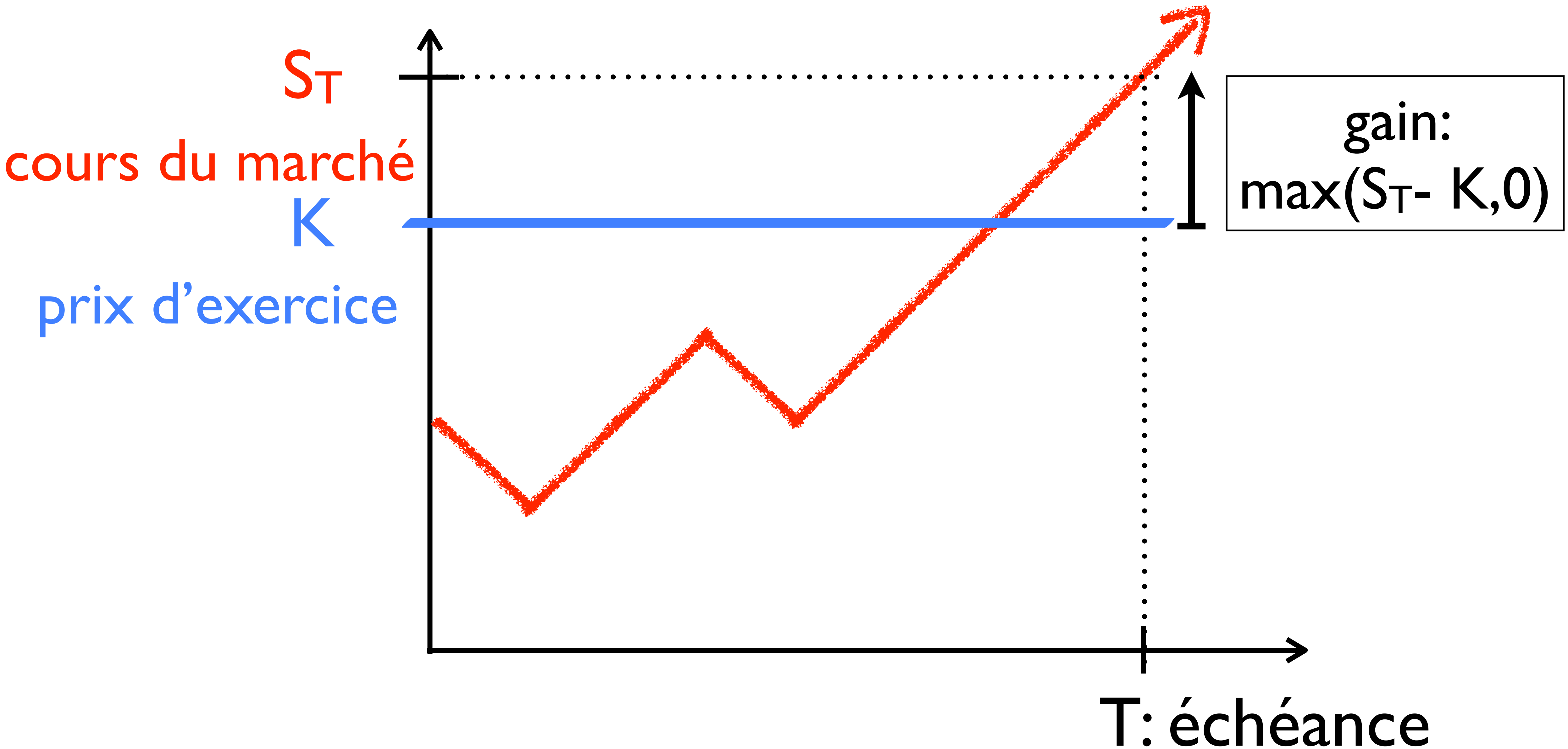
Actif risqué



Actif sans risque

→ Impossibilité de prévoir l'évolution de (S)

Options



Option: contrat assurant le droit d'achat ou de vente d'un actif à un prix K, à une date T

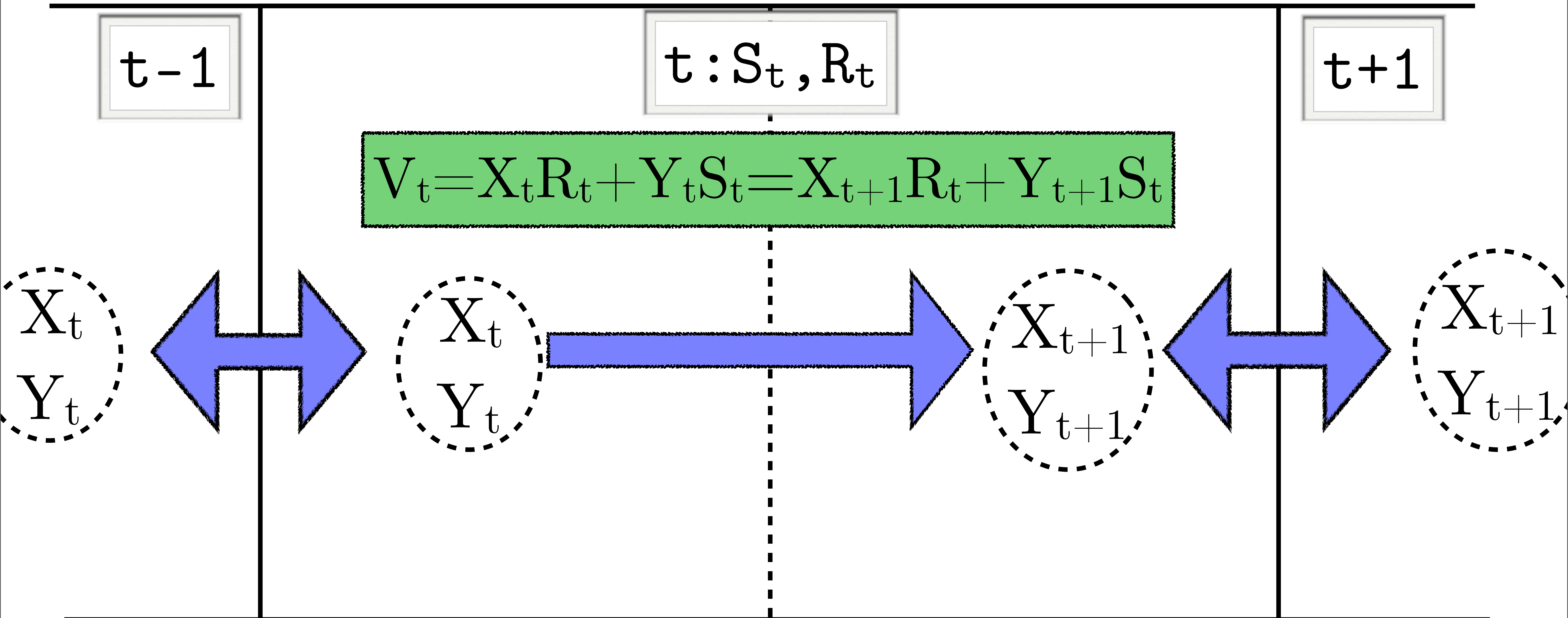
Stratégie et pricing

-C_0: prix de l'option, somme à faire fructifier
-(X,Y): stratégie de répartition du portefeuille: V

- $\forall t : V_t(X,Y) = X_t R_t + Y_t S_t$
- $V_0 = C_0$
- $V_T = \varphi(S_T)$
- $\forall t : X_t R_t + Y_t S_t = X_{t+1} R_t + Y_{t+1} S_t$

condition d'autofinancement

Formalisme

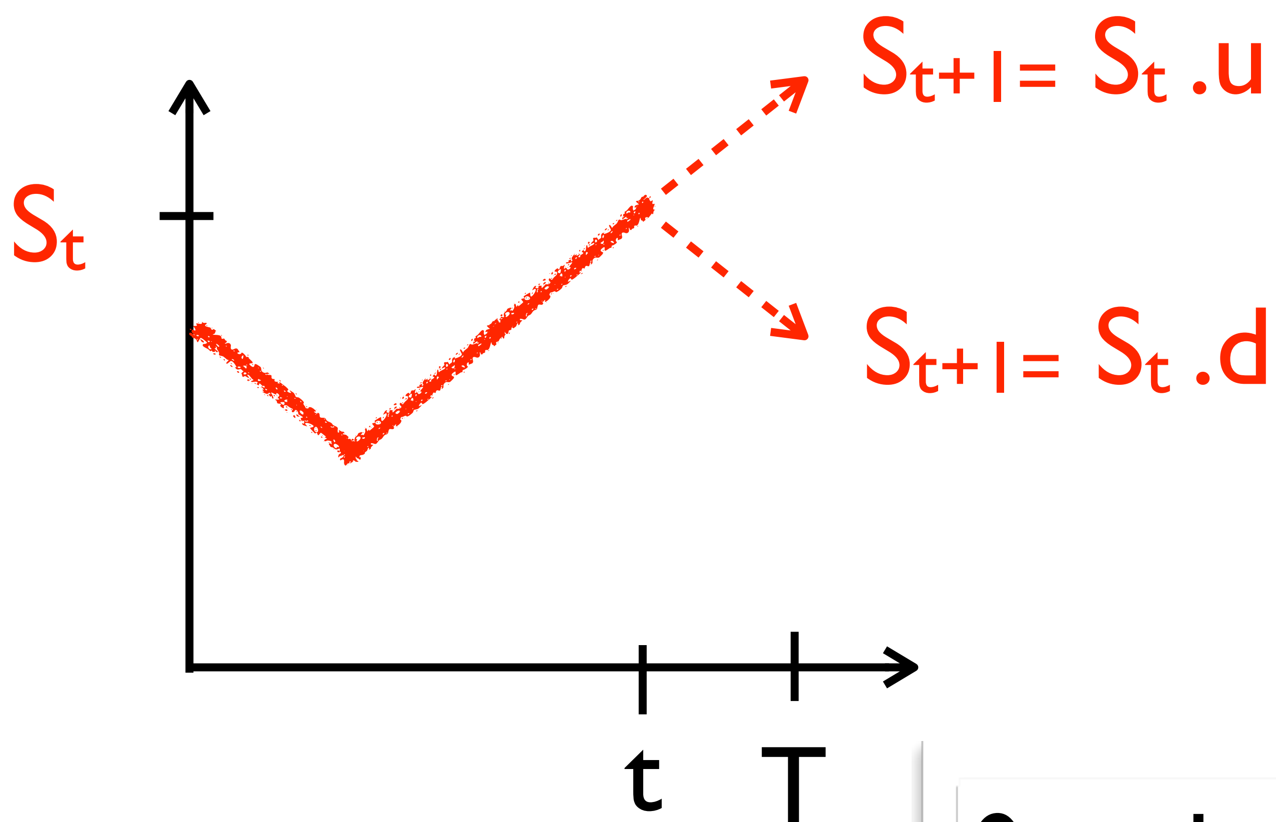


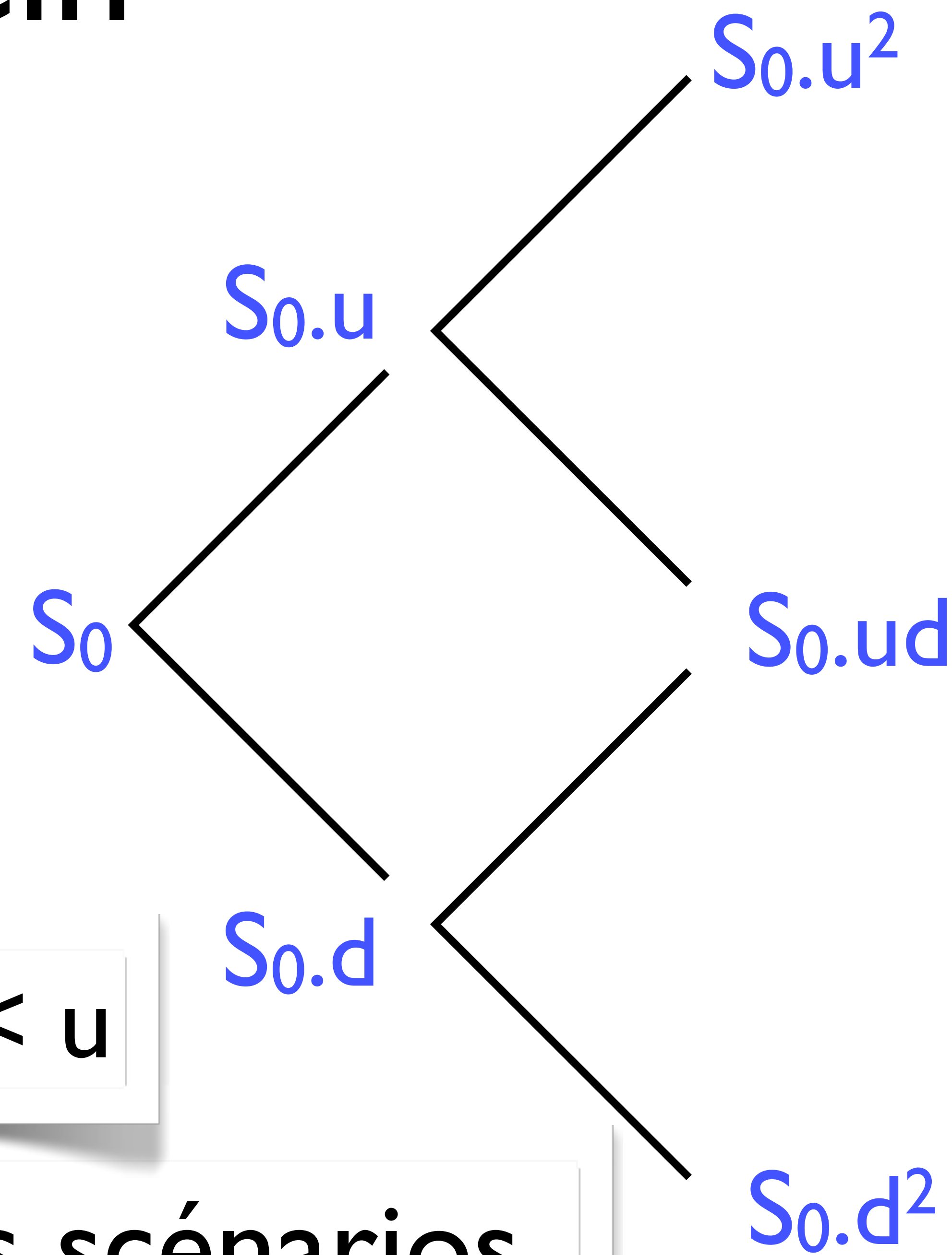
F_t: tribu engendrée par la partition de **Ω** en classe d'événements coïncidant jusqu'à l'instant **t**

R_t, S_t: F_t mesurables

X_t, Y_t: $F_{t\text{-}1}$ mesurables (prévisibles)

Le modèle de Cox, Ross et Rubinstein





$0 < d < 1 < u$

$\Omega = \{u,d\}^T$= l'ensemble des scénarios d'évolutions possibles

Approche algébrique

structure récursive des arbres binaires

$C_0 = V_0 =$
$X_1 R_0 + Y_1 S_0$ $\quad S_0$

-prix de l'actif

-portefeuille

$S_0.u$ $\quad \varphi(S_0 u)$
$= X_1 R_1 + Y_1 S_0 u$

$S_0.d$ $\quad \varphi(S_0 d)$
$= X_1 R_1 + Y_1 S_0 d$

$$\begin{pmatrix} 1+r & S_0 u \\ 1+r & S_0 d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(S_0 u) \\ \varphi(S_0 d) \end{pmatrix}$$

Approche probabiliste

Probabilité risque neutre

$$\mathbb{E}(S_t|\mathcal{F}_{t-1}) = (1+r)S_{t-1}$$

$$\tilde{S}_t = \frac{S_t}{R_t} \qquad \boxed{\mathbb{E}(\tilde{S}_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \tilde{S}_{t-1}}$$

$$\mathbb{E}(\tilde{V}_T|\mathcal{F}_t) = \tilde{V}_t = X_t + Y_t\tilde{S}_t = \mathbb{E}(\frac{\varphi(S_T)}{R_T}|\mathcal{F}_t)$$

$$V_0 = \frac{1}{R_T}\sum_{k=0}^{T}\binom{T}{k}p^k(1-p)^{T-k}\varphi(S_0u^kd^{T-k})$$

Modèle trinomial

$\Omega = \{u,m,d\}^T$

→ Viable, complet ?

Existence, mais non unicité de la probabilité risque neutre :

$$p_u u + p_m m + (1 - p_u - p_m)d = 1 + r$$

→ Viable, mais non complet

Modèle trinomial incomplet

$$\begin{pmatrix} 1+r & S_0 u \\ 1+r & S_0 m \\ 1+r & S_0 d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(S_0 u) \\ \varphi(S_0 m) \\ \varphi(S_0 d) \end{pmatrix}$$

→ non surjective

équation de l'image:

$$(m-d)h_1 + (d-u)h_2 + h_3(u-m) = 0$$

Actifs simulables ?

→ Sous espace de dim: $(3^T+1)/2$

$$\begin{pmatrix} h^1_{T+1} \\ h^2_{T+1} \\ h^3_{T+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+r & S_T(u-(1+r)) \\ 1+r & S_T(m-(1+r)) \\ 1+r & S_T(d-(1+r)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_T \\ Y_{T+1} \end{pmatrix}$$

Simulation d'un actif