Géodésiques

Arnaud Triay

Table des matières

1 Introduction

La notion de géodésique est relativement intuitive : étant donné deux points, c'est le (ou un des) plus court chemin qui les relie. Un sprinter répondra que le plus court chemin est la ligne droite, le moindre détour ne fait que rallonger la distance parcourue (inégalité triangulaire) mais les caractéristiques de l'espace sur lequel on se déplace ne permettent pas toujours d'emprunter la trajectoire rectiligne, comme c'est le cas pour un parcours montagneux ou sur la terre à grande échelle (trajectoire des avions).
L'étude des géodésiques, éclaire notre compréhension de la nature. En effet, les géodésiques ainsi que le principe de minimisation de distance , de durée ou d'énergie sont présent dans divers domaines de la physique, comme en optique ou encore en mécanique. On les retrouve dans la seconde loi de Newton :

> « Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve,(...) »

, dans le principe de moindre action :

> « (. . .) lorsqu'il arrive quelque changement dans la Nature, la quantité d'Action employée pour ce changement est toujours la plus petite qu'il soit possible » (Maupertuis)

ainsi que dans le principe de Fermat :

> « La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que la durée du parcours soit stationnaire. »

1.1 Position du problème

Le but de ce TIPE est donc l'étude des géodésiques sur les surfaces. On se basera sur l'idée de "plus court chemin" afin d'en déduire des propriétés qui, dans certains cas, les caractérisent. Les fonctions utilisées sont supposées différentiables. On définit alors la longueur d'un chemin $\gamma : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ par :

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\| dt$$

On définit la distance d entre deux points sur une surface par l'infinimum des longueurs des chemins les reliant. Ce qui nous amène à définir les géodésiques comme suit.

Définition 1.1.1 *Un chemin $\gamma : [0;1] \longrightarrow \Sigma$ (ou Σ est une surface) est une géodésique si $L(\gamma) = d(\gamma(0), \gamma(1))$.*

Il s'en suit immédiatement que $\forall (t_1, t_2) \in [0;1]^2, t_1 < t_2 : L(\gamma_{|[t_1;t_2]}) = d(\gamma(t_1), \gamma(t_2))$

2 Equation d'Euler-Lagrange

2.1 Théorème

Il convient maintenant de déduire de cette propriété, des informations sur cette courbe. Pour cela on a recours à l'équation d'Euler-Lagrange qui donne une condition nécessaire pour qu'une fonction $x : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ soit un extremum d'une fonctionnelle J, définie par :

$$J(x) = \int_0^1 f(t, x(t), x'(t)) dt \text{ où } f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

En effet,

Théorème 2.1 *si J est extremale alors :*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d}{dt} \frac{\partial f}{\partial x'}$$

2.2 Géodésiques d'une surface de $\mathbb{R}^3$

La définition de la géodésique, quoi qu'étant naturelle, n'est pas pratique. On cherche alors à la caractériser géométriquement. Donnons nous alors une surface Σ de $\mathbb{R}^3$, et une paramétrisation de cette surface :

$$\mathbb{R}^2 \ni (u,v) \longmapsto \vec{r} \in \Sigma$$

On supposera que l'on peut paramétrer localement un chemin sur cette surface par u pour pouvoir appliquer le théorème sur une fonction v de la variable u (bien qu'une généralisation du théorème existe pour x à valeur dans $\mathbb{R}^n$, mais n'est pas nécessaire ici).
Soit alors γ un chemin définit par la fonction $v : [0;1] \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\gamma(u) = \vec{r}(u, v(u)) = \begin{pmatrix} x(u,v(u)) \\ y(u,v(u)) \\ z(u,v(u)) \end{pmatrix}$$

On a (le $'$ désigne la dérivée par rapport à u) :

$$L(\gamma) = \int_0^1 f(u, v(u), v'(u))du, \text{ avec } f(u,v(u),v'(u)) = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$$

Étant donné, que $x' = x'_u + v'x'_v$:

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{P_x + P_y + P_z}{f}, \text{ où } P_x = x''_{uv} + v'x''_{vv}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v'} = \frac{x'_v x' + y'_v y' + z'_v z'}{f}$$

$$\frac{d}{du}(\frac{\partial f}{\partial v'}) = \frac{(x''_{uv} + v'x''_{vv})x' + x'_v x'' + P_y y' + y'_v y'' + P_z z' + z'_v z''}{f} - \frac{x'_v x' + y'_v y' + z'_v z'}{f}\frac{df}{du}$$

Alors, la condition d'Euler-Lagrange donne, si γ est une géodésique :

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)(x'_v x'' + y'_v y'' + z'_v z'') - (x''x' + y''y' + z''z')(x'_v x' + y'_v y' + z'_v z') = 0 \tag{1}$$

Grâce à cette équation, on désire montrer qu'une courbe de Σ est une géodésique si et seulement si sa normale principale est colinéaire à la normale à la surface en chaque point. Pour cela, on considère $\vec{t}$ le vecteur unitaire tangent et $\vec{n}$ la normale principale à la courbe.

Toujours en paramétrant localement avec u, on a :

$$\frac{d\vec{r}}{du} = \|\frac{d\vec{r}}{du}\|\vec{t}$$

$$\text{et } \frac{d^2\vec{r}}{du^2} = \frac{d\|\frac{d\vec{r}}{du}\|}{du}\vec{t} + \frac{\|\frac{d\vec{r}}{du}\|^2}{R}\vec{n}$$

Alors étant donné que $\vec{t} \perp \vec{n}$, et $\vec{t} \perp \vec{N}$ (où $\vec{N}$ est la normale à la surface), la colinéarité de $\vec{n}$ et de $\vec{N}$ est caractérisée par la nulité du déterminant :

$$det(\vec{N}, \frac{d\vec{r}}{du}, \frac{d^2\vec{r}}{du^2}) = 0$$

Un vecteur colinéaire à $\vec{N}$ est $\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r} = \begin{pmatrix} y'_u z'_v - z'_u y'_v \\ z'_u x'_v - x'_u z'_v \\ x'_u y'_v - y'_u x'_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$

Alors :

$$det(\partial_u \vec{r} \wedge \partial_v \vec{r}, \frac{d\vec{r}}{du}, \frac{d^2\vec{r}}{du^2}) = \begin{vmatrix} A_x & x' & x'' \\ A_y & y' & y'' \\ A_z & z' & z'' \end{vmatrix} = A_x(z''y' - y''z') + A_y(x''z' - z''x') + A_z(y''x' - x''y')$$

Avec $x' = x'_u + v'x'_v$, on a $A_x = y'z'_v - z'y'_v$, (de même pour A_y et A_z) ce qui donne :

$$det(\vec{N}, \frac{d\vec{r}}{du}, \frac{d^2\vec{r}}{du^2}) = (x'^2 + y'^2 + z'^2)(x'_v x'' + y'_v y'' + z'_v z'') - (x''x' + y''y' + z''z')(x'_v x' + y'_v y' + z'_v)$$

On reconnait ici (1). Mais deux choses empêchent de conclure :

- l'équation d'Euler Lagrange indique que la fonctionnelle est stationnaire, et n'atteint pas nécessairement un minimum absolu.
- aussi c'est une condition nécessaire, et non une CNS.

En réalité, la condition d'Euler Lagrange, donne des géodésiques locales. Ceci nous conduit à une définition "pratique" de la géodésique sur une surface, en considérant non plus le chemin, mais le support de la courbe :

Définition 2.2.1 *Une courbe sur une surface est une géodésique si sa normale principale est en tout point colinéaire à la normale à la surface en ce point.*

2.2.1 Exemple : géodésiques du cylindre

Cet exemple, quoique simple, permet de comprendre l'ambiguïté entre les deux définitions. Considérons le cylindre que l'on paramètre de la manière suivante :

$$\vec{r} : [0; 2\pi[\times \mathbb{R} \ni (\theta, \lambda) \longrightarrow \vec{u} + \lambda\vec{k},$$

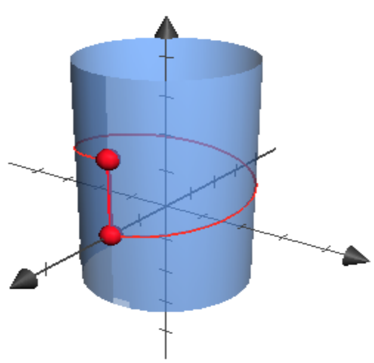
où

$$\vec{u} = cos(\theta)\vec{i} + sin(\theta)\vec{j} \text{ et } \vec{v} = -sin(\theta)\vec{i} + cos(\theta)\vec{j}$$

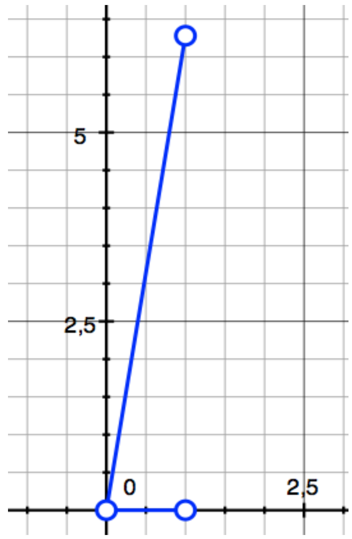
Soit γ un chemin sur le cylindre, alors $\gamma''(t) = \theta''\vec{v} - \theta'^2\vec{u} + \lambda''\vec{k}$, pour que γ soit une géodésique au sens de la définition 2.2.1, il faut : $(\gamma''(t)|\partial_\theta \vec{r}) = (\gamma''(t)|\partial_\lambda \vec{r}) = 0$.
Or $\partial_\theta \vec{r} = \vec{v}$ et $\partial_\lambda \vec{r} = \vec{k}$. Ce qui amène $\theta'' = \lambda'' = 0$
Soit alors :

$$\gamma_1 : [0; 1] \ni t \longmapsto t\vec{k} \text{ et } \gamma_2 : [0; 1] \ni t \longmapsto cos(2\pi t)\vec{i} + sin(2\pi t)\vec{j} + t\vec{k}$$

On a $\theta_1 = 0, \lambda_1 = t$ et $\theta_2 = 2\pi t, \lambda_2 = t$. Donc d'après ce qui précède, γ_1 et γ_2 sont deux géodésiques du cylindre au sens de la seconde définition.
Mais, $L(\gamma_1) = d(\gamma_1(0), \gamma_1(1)) = 1$, tandis que $L(\gamma_2) = 2\pi + 1$. Ainsi γ_1 est une géodésique au sens de la première définition, tandis que γ_2 non.



Le cylindre possède une caractéristique qui aide à la compréhension de ses géodésiques : c'est une surface développable. En le faisant rouler, en gardant sa base dans le plan (yoz), le point $A = \gamma(\theta, \lambda)$ sur le cylindre, a une image de coordonnées $(R\theta, \lambda)$ (ici $R = 1$). Cependant, en continuant le déroulement du cylindre, on donne plusieurs images à A sur le plan. Regardons alors l'image des chemins γ_1 et γ_2 sur la plan :



On comprend que ces deux chemins sont localement les plus courts pour joindre les deux points.

Alors étant donné, deux points du le cylindre : $A = \vec{r}(\theta_0, \lambda_0)$ et $B = \vec{r}(\theta_1, \lambda_1)$, $\theta_0, \theta_1 \in [0; 2\pi]$ quels sont les géodésiques qui les relient , et quelle est la plus courte ?

Puisque $\theta'' = \lambda'' = 0$, θ et λ sont polynomiales et la condition :

$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 \\ \lambda(0) = \lambda_0 \end{cases} \wedge \begin{cases} \theta(1) \equiv \theta_1 (2\pi) \\ \lambda(1) = \lambda_1 \end{cases}$$

possède des solutions.

Ainsi les courbes cherchées sont :

$\{\gamma_p : [0; 1] \ni t \longmapsto \vec{u}(\theta_0 + t(\theta_1 - \theta_0 + 2(p + p_0)\pi)) + (\lambda_0 + t(\lambda_1 - \lambda 0))\vec{k}, p \in \mathbb{Z}\}$où p_0 est tel que $|\theta_0 - \theta_1 + 2p_0\pi|$ soit minimal

γ_0 est celle de longueur minimale. On peut alors définir une distance sur le cylindre.

$$\boxed{d(\vec{r}(\theta_0, \lambda_0), \vec{r}(\theta_1, \lambda_1)) = \int_0^1 \|\gamma_0'(t)\| dt = (\theta_0 - \theta_1 + 2p_0\pi)^2 + (\lambda_0 - \lambda_1)^2}$$

Une autre question ce pose : étant donné un point et un vecteur du plan tangent en ce point, peut-on trouver une géodésique tangente à ce vecteur passant par ce point ? Sur le cylindre le plan tangent est engendré par $\partial_\theta \vec{r} = \vec{v}$ et $\partial_\lambda \vec{r} = \vec{k}$. Alors si $(\theta_0, \lambda_0) \in [0; 2\pi[$ et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, en prenant $\gamma(t) = \vec{u}(\theta_0 + at) + (\lambda_0 + bt)\vec{k}$, on a $\frac{d\gamma}{dt} = a\partial_\theta \vec{r} + b\partial_\lambda \vec{r}$. D'où l'existence, et l'unicité puisque γ est définie par deux polynômes de degré 2, et l'on fixe un point et un vecteur, soit 4 paramètres.

2.2.2 Surface de révolution

La propriété précédente (existence et unicité de la géodésique passant par un point et tangente à un vecteur donné) est encore valable sur une surface quelconque, du moment qu'elle est de classe C^2. Mais il est facile de le voir lorsqu'elle est de révolution.

Soit alors une surface que l'on paramètre ainsi :

$$(\theta, \lambda) \longmapsto \vec{r} = f(\lambda)\vec{u} + g(\lambda)\vec{k}$$

Pour un chemin γ les conditions : $(\gamma''(t)|\partial_\theta \vec{r}) = (\gamma''(t)|\partial_\lambda \vec{r}) = 0$ amènent :

$$\theta'' + 2\lambda'\theta'\frac{f'}{f} = 0 \tag{2a}$$

$$\lambda'' + \lambda'^2\frac{f'f'' + g'g''}{f'^2 + g'^2} - \theta'^2\frac{ff'}{f'^2 + g'^2} = 0 \tag{2b}$$

On voit apparaître un système d'équations différentielles d'ordre 2. On en déduit,(en supposant que f et g' ne s'annulent pas) d'après le théorème de Cauchy-Lipchitiz, l'existence et l'unicité, de telles géodésiques.

Invariant de Clairaut En multipliant $(2a)$ par f^2, on voit apparaître la dérivée de $f^2(\lambda)\theta'$. Or, en appelant φ l'angle $\widehat{(\vec{t}, \vec{v})}$, on a $cos(\varphi) = (\vec{t}|\vec{v}) = f\theta'$. D'où la relation de Clairaut :

Sur une géodésique sur une surface de révolution $rcos(\varphi)$ est constant. (r est la coordonnée cylindrique, ici f)

2.2.3 Résolution numérique sur une surface de révolution

Grâce à la relation de Clairaut démontrée ci haut, j'ai implémenté un programme qui trace, de manière approchée, les géodésique d'une surface de révolution. On supposera d'abord que la fonction g définie plus haut est injective. L'algorithme est le suivant : on se donne un point de la surface et un vecteur tangent en ce point grâce à un triplé $(\theta, \lambda, \varphi)$. Ce qui permet de calculer $A = \vec{r}(\theta, \lambda)$ et $\vec{t} = cos(\varphi)\vec{e}_\theta + sin(\varphi)\vec{e}_\lambda$ (où $(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\lambda)$ est la base normalisée de $(\frac{\partial \vec{r}}{\partial_\theta}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial_\lambda}))$. Ainsi que le nouveau point $A_2 = A + h.\vec{t}$ où h est le pas de la résolution.
On calcule alors (θ_2, λ_2) : les coordonnées de A' : θ est l'angle en coordonnée cylindrique de A_2, et si z_2 est la composante de A_2 sur $\vec{k}$ alors $\lambda_2 = g^{-1}(z_2)$. On trouve alors φ_2 grâce à la relation de Clairaut : $f(\lambda)cos(\varphi) = f(\lambda_2)cos(\varphi_2)$. On obtient les courbes présentées en annexes.

3 Interprétation physique

3.1 Point matériel sur une surface

Étant donné un point matériel contraint à une surface, il décrit une géodésique si son accélération est orthogonal au plan tangent en tout point. En notant $\vec{v}$ sa vitesse, on a alors : $(\vec{v}|\frac{d\vec{v}}{dt}) = 0)$ d'où $\|\vec{v}\|$ est constante. En appliquant la Seconde Loi de Newton on a :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

Ainsi la force à laquelle il est soumis, $\vec{F}$, est normale à la surface en tout point. On en déduit les géodésiques d'une surface sont les mouvements sans frottements.

3.2 Élastique tendu sur une surface

Il en va de même pour un élastique tendu sur une surface. Supposons avoir enduit la surface d'une substance ne permettant aucun frottement. Alors l'élastique aura tendance à minimiser la longueur, pour cela , il empruntera une géodésique de la surface.

4 Bibliographie

Iglesias P., *À propos de géodésiques*, Le journal de maths des élèves de l'École normale supérieur de Lyon 1994, 1, 29

Briend J.Y., *Géodésiques des surfaces de révolution*, Le journal de maths des élèves de l'École normale supérieur de Lyon 1994, 1, 41

Ramis E., Deschamps C. Odoux J., *Applications de l'analyse à la géométrie*, Masson, Paris, 1981

Doneddu A., *Analyse et géométrie différentielle*, Dunod, Paris, 1973

Pressley A., *Elementary Differential Geometry*, Springer, Londres, 2010

Raynaud, X., *The shortest path between two points, Geodesics and Mechanics*, W. Østreng (ed), Oslo, 2010