Das Gefangenendilemma – 5 Beispiele

1.Einleitung

Eines der sehr berühmten Beispiele für ein einfaches Spiel in der Spieltheorie ist das Gefangenendilemma. In seiner klassischen Form stellt es sich folgendermaßen dar:

2 Bankräuber werden nach Ihrer Tat gefasst, es kann Ihnen jedoch außer unerlaubten Waffenbesitzes nichts nachgewiesen werden, was 3 Jahre Gefängnis nach sich ziehen würde. Bei der Polizei werden die beiden getrennt von einander verhört. Die Staatsanwaltschaft bietet eine Kronzeugenregelung an.
Auf den Bankraub stehen 10 Jahre Gefängnis; gesteht nur einer der beiden greift die Kronzeugenregelung, d.h. 0 Jahre für den Geständigen. Liefern jedoch beide ein Geständnis ab, bekommen beide aufgrund mildernder Umstände (sie haben ja gestanden!) nur 8 Jahre.

S1\S2	abstr.		gest.	
abstreiten		-3		0
	-3		-10	
gestehen		-10		-8
	0		-8	

Abb. 1

Jetzt stellt sich die Frage für jeden der Verbrecher, allg. Spieler genannt, wie er sich im Verhör verhalten sollte. Obwohl es für beide, zusammen betrachtet, besser wäre zu schweigen, haben beide aus zwei Gründen einen Anreiz, von einem evtl. Schweigeabkommen abzuweichen:
1. Freiheit ist besser als 3 Jahre Gefängnis, wenn man den anderen Spieler als loyal einschätzt.
2. Im Sinne der Schadensbegrenzung sind 8 Jahre besser als 10 Jahre Gefängnis, wenn der andere Spieler vom Abkommen abweicht.

Unter der Voraussetzung rationaler Spieler sucht man nun eine selbstdurchsetzende Strategienkombination, d.h. eine,von der niemand einen Anreiz hat abzuweichen. Das ist die Strategienkombination s=(s_1, s_2, ..., s_n) aller Spieler, wenn jede Strategie s_i eine beste Antwort gegen die gegebene Strategien s'=(s_i, s_{-i})der anderen Spieler ist. Dies ist das Nash-Gleichgewicht.

Im obigen Fall ist das einzige Nash-GGW die Strategienkombination „beide gestehen" V/V. Unter Vernachlässigung äußerer Umstände wie Freundschaft/Liebe (Bonnie & Clyde) oder Morddrohung der Mafia ist es immer besser zu gestehen (s_{-i}=K: -3 < 0; s_{-i}=B: -10 < -8).

Allgemein ergibt sich für alle Spiele mit 2 Strategien $|S_1|=|S_2|=2$ und 2 Spielern folgende Matrix:

S1\S2	Koop.		Verrat	
Kooperation		a'		c'
	a		c	
Verrat		d'		b'
	d		b	

Abb. 2: b´ < a´ und b < a

Man spricht allgemein von einem Gefangenendilemma, wenn beide Spieler einen Anreiz haben, von dem für sie besseren Fall K/K abzuweichen und sie sich für den schlechten Fall V/V entscheiden. Es darf nur ein Nash-GGW geben bei V/V unter der Voraussetzung, daß b < a, b' < a', d.h. Verrat wird schlechter bewertet als Kooperation.
Das Nash-GGW tritt ein, wenn c < b und d' < b'. Das einzige weitere, noch mögliche Nash-GGW bei K/K kommt nicht zustande, wenn a´ < c´ oder a < d (mind 1 strikte Ungleichung erforderlich). Für das V/V Nash-GGW reicht es aus, nur eine strikte Ungleichung zu fordern, jedoch ergeben sich dann stärkere Forderungen für die Ungleichungen, die das 2. Nash-GGW verhindern.

2. Weitere Beispiele

Es gibt noch weitere Interpretationen des Gefangenendilemmas aus vielen verschiedenen Bereichen.
Man muss jedoch beachten, dass in den einfachen Beispielen , die hier aufgeführt werden, es sich nur um eine einzige Entscheidung handelt. Gerade in der schnell lebigen Wirtschaft werden in kurzer Zeit viele Entscheidungen revidiert bzw. neu getroffen. Betrachtet man diese in der Summe, so ist es längerfristig oft günstiger andere Entscheidungen zu treffen, als die einzelne Entscheidung zunächst vermuten ließe.

2.1. Viele politische Entscheidungen folgen dem Gefangenendilemma.

In der Diplomatie z.B.: ein vereinfachtes Modell des Ausbruchs des ersten Weltkriegs:
Nach der Ermordung des österreichischen Thronfolgers und dem Einmarsch Österreichs in Serbien, beginnt Rußland mobil zu machen. Für Deutschland stellt sich die Frage, ob Rußland nur droht und auf Verhandlungen abzielt, oder wirklich Krieg führen will. Als Strategien hat Deutschland zum einen keine eigene Mobilmachung, was es Rußland im Krieg ausliefern würde, zum anderen die Mobilmachung, was unweigerlich zum Krieg führen würde. Die Zahlenwerte sollen die erwarteten Verluste (an Glaubwürdigkeit gegenüber Bündnispartnern, Kapital und Menschenleben) für die beiden Länder darstellen. Dabei möchten wir betonen, dass man natürlich Menschenleben niemals in irgendeiner Rechnung gegen anderweitige Verluste abwägen kann. Allerdings muss man davon ausgehen, dass die damaligen politischen Entscheidungsträger sicherlich andere moralische Vorstellungen hatten.

De\Ruß	Droh.		Krieg	
Verhandeln		-3		0
	-3		-8	
Krieg		-5		-5
	-5		-5	

Abb.3

Die Entscheidungsmatrix ist nicht symmetrisch, da Rußland bereits mobil gemacht hat und nicht mehr von Deutschland überrascht werden kann, während Deutschland's Wehrmacht noch im Friedenszustand ist. Man erkennt, dass der Krieg die einzige „rationale“ Entscheidung (Nash-GGW) zu diesem Zeitpunkt ist. Wenn eine Kriegsmaschinerie einmal in Gang ist, lässt sie sich schwerlich noch stoppen.

Einige Jahre später kam es zum Dilemma des Wettrüstens im Kalten Krieg zwischen West- und Ostmächten. Beide Seiten hatten die Wahl aufzurüsten oder das Geld für zivile Zwecke zu nutzen. Dabei ist zu beachten, dass auf beiden Seiten die Angst bestand überfallen zu werden, sobald die andere Seite die stärkere Militärmacht stellen würde. Dies führt zur folgenden erwarteten Auszahlungen:

S1\S2	Koop.		Rüsten	
Kooperation		2		3
	2		0	
Rüsten		0		1
	3		1	

Abb. 4

Dies ist die Einschätzung eines neutralen Beobachters der Situation, im Kalten Krieg z.B.: Kamerun. Alternativ könnte dies auch die Einschätzung einer Seite sein, die wirklich angreifen würde, sobald er militärisch im Vorteil wäre. Sollte ein Spieler nicht wirklich vorhaben anzugreifen, würde sich allerdings das Diagramm signifikant verändern.

2.2. Betrachtet man in der Wirtschaft einmalige, langfristige Entscheidungen, so tritt auch hier häufig das Gefangenendilemma auf. Ein gutes Beispiel dafür war die UMTS-Versteigerung, bei der sich die gleiche Lizenz-Vergabe-Situation mehrfach bei unterschiedlich hohen Preisen dafür einstellte.

Ein weiteres Beispiel wäre die Regulierung der Öl-Preise durch die Förderung in den OPEC-Staaten
2 Staaten haben die Möglichkeit geringe Mengen zu fördern (GF) oder hohe Mengen zu fördern (HF). Hohe Förderung führt zu einem Preisverfall, niedrige Förderung birgt aber das Risiko bei hoher Förderung des anderen vom Makt verdrängt zu werden. Die Variierung der Fördermenge soll lange gegenüber dem Entscheidungsprozess dauern.

S1\S2	GF		HF	
GF		7		10
	7		1	
HF		1		3
	10		3	

Abb. 5

Wieder werden sich beide für den schlechten Fall entscheiden. Dieses Schema lässt sich auch auf die Zinserhebung 2-er Banken übertragen, vorausgesetzt eine schnelle Änderung der Zinsen führt zur Ablehnung vom Kunden, und ist damit entweder streng dominiert oder von Anfang an ausgeschlossen.

2.3. Mit Lebensqualität als Entscheidungsfaktor lassen sich viele Situationen des täglichen Lebens simulieren.

Angenommen ein Pärchen fährt getrennt voneinander in Urlaub, beide hassen es Postkarten zu schreiben, dementsprechend wichtig ist es Ihnen, wenn sie sich überwinden zu schreiben, auch eine Postkarte zu bekommen. Für jeden stellt sich die Frage, ob ihm/ihr der andere schreibt. Schreibt einer keine Karte, obwohl er eine bekommt, so muss er das, zu Hause angekommen, wieder gutmachen.

S1\S2	k PK		PK	
k PK		3		4
	3		-1	
PK		-1		0
	4		0	

Abb.6

Beide werden also eine Postkarte schreiben.

3. Ausblick

3.1. Hirschjagtparabel

Ein sehr bekanntes Spiel ist Rousseaus Hirschjagdparabel. Bei einer steinzeitlichen Jagd haben die Jäger mehrere Hasen und einen Hirschen eingekreist. Ohne moderne Hilfsmittel wie Gewehre, hat jeder Jäger die Wahl, einen Hasen alleine oder gemeinsam den Hirschen zu erlegen. Greift aber nur ein Jäger nach dem Hasen, ist es dem Rest der Jäger nicht mehr möglich, die Flucht des Hirsches zu verhindern, und sie gehen leer aus. Als Spieler 1 wählen wir einen beliebigen Jäger, als Spieler 2 den Rest der Jäger, da eine erfolgreiche Hirschjagd bereits durch einen ‚Hasenfänger' verhindert wird.

1\2	Hirsch		Hase	
Hirsch		5		4
	5		0	
Hase		0		2
	4		2	

Abb. 7

Hier sind zwar mathematisch 2 Nash-GGW vorhanden, aber bei einer größeren Anzahl von Jägern ist die Warscheinlichkeit sehr groß, daß, obwohl kein Anreiz besteht von der Hirsch-Strategie abzuweichen, mind. 1 Jäger versucht einen Hasen zu erlegen, da er einem anderen Jäger unterstellt dies auch zu tun, weil dieser wiederrum ihm, bzw. einem anderen Jäger dasselbe unterstellt, usw. Jeder Jäger ist auf jeden einzelnen anderen angewiesen. Es stellt sich jedem nicht nur die Frage, wie sehr man dem anderen vertraut, sondern auch wie sehr man dem anderen vertraut, dass er einem selber vertraut. Die Unsicherheit über die Entscheidung der anderen wird noch dadurch verstärkt, daß die Jäger ‚bestraft' werden, wenn alle nach dem Hasen greifen, da nicht genügend Hasen für alle vorhanden sind.

Man kann argumentieren, dass Hase/Hase Hirsch/Hirsch risiko-dominiert (lieber weniger sicher, als mehr mit Risiko) und deshalb gewählt werden sollte, denn die Auszahlung U(Hase/Hirsch)=4 ist nicht deutlich geringer als U(Hirsch/Hirsch)=5, aber U(Hirsch/Hase)== deutlich schlechter als U(Hase/Hase)=2.
Je nach Ausgangssituation (z.B.: der Mensch ist nicht 100% rational, eine Gruppe von Menschen noch viel weniger), kann also auch hier ein Gefangenendilemma auftreten, wenn auch nicht in der klassischen Form.

3.2. Unendliche Wiederholung des Gefangenendilemmas:

Oft ist es jedoch so, dass man oft in Entscheidungssituationen, die durch das Gefangendilemma gut beschrieben werden, mehr als einmal hintereinander gerät. Beispielsweise wird die OPEC nicht nur einmal die Preise besprechen, sondern mehrmals. Im Idealfall kann man davon ausgehen, dass solche Gespräche prinzipiell unendlich oft stattfinden könnten. Um diese Situation nun modellieren zu können, muss man eine Möglichkeit finden, zwischen „Gewinn jetzt“ und „Gewinn später“ zu unterscheiden:

Nehmen wir an, die Spieler verhandeln einmal jedes Jahr. Dann stellt der Zinssatz p einen guten Diskontfaktor dar. Konsum jetzt in Höhe von m ist besser als Konsum nächstes Jahr in Höhe von M, wenn $(1+p)m > M$ gilt. Wir können auch sagen, dass die Bewertung von Konsum im nächsten Jahr auf das q-fache geschmälert ist mit $q:=1/(1+p)<1$.

Bei unendlich oft wiederholten Spielen ist nun folgende Taktik ein Nash-Gleichgewicht (der Beweis muss leider ausgelassen werden):

Man kooperiert so lange, wie der andere kooperiert, sobald derjenige aber von der Kooperationsstrategie abweicht, weicht man selbst auch immer ab.

Damit ergibt sich folgende Ungleichung, aus der man ableiten kann, ab welchem Zinssatz sich „Verrat“ lohnt:

S1\S2	Koop.		Verrat	
Kooperation		2		3
	2		0	
Verrat		0		1
	3		1	

Es muss gelten: $2 + 2q + 2q^2 + 2q^3 + ... < 3 + 1q + 1q^2 + ...$

Das gilt genau dann, wenn

$2\,[1/(1-q)] < 3 + 1/(1-q) - 1 \Leftrightarrow 1/(1-q) < 2 \Leftrightarrow 1/2 < 1 - q \Leftrightarrow q < 0{,}5$

Damit muss also $q = 1/(1+p) < 0{,}5 \Leftrightarrow 1 + p > 2 \Leftrightarrow p > 1$ gelten, damit sich eine Abweichung von „Kooperation“ lohnen würde.

Daran kann man sehen, warum sich Kartelle doch oft über lange Zeit halten können. Denn bei Kartellen z.B. in der Baubranche ist für jeden Akteur davon auszugehen, dass es auch in der Zukunft mehr oder weniger jedes Jahr eine Ausschreibung für ein großes Bauprojekt geben wird; und nur bei einem relativ hohen Zinssatz würde sich „Verrat“ lohnen.