Bayes-Spiele

Verfasst von:

Florian Fuchsbrunner
Marta Gawel
Lothar Kruppok
Natalia Rabel

im Rahmen einer Projektarbeit zur Vorlesung
„Spieltheorie“
bei Prof. Dr. Schottenloher (Sommersemester 2006)

Inhaltsverzeichnis

1 Geschichtliche Hinführung 2

2 Begriffseinführung 5
2.1 Informationen 5
2.1.1 Informationsmenge 5
2.1.2 Gemeinsames Wissen (Common Knowledge) 5
2.1.3 Perfektes Erinnerungsvermögen (Perfect Recall) 6
2.1.4 Spiel mit unvollkommener Information 6
2.1.5 Spiel mit unvollständiger Information 6
2.2 Modellierung 7
2.2.1 Unvollständige Information → unvollkommene Information 7
2.2.2 Common Priors 7

3 Bayes-Nash-Gleichgewichte 9

4 Perfektes Bayes–Nash–Gleichgewicht 13

5 Ein Beispiele und weitere Anwendungen 20
5.1 Einführung in die Signalisierungsspiele 20
5.2 Konkretes Beispiel 21
5.3 Weitere Anwendungsbereiche von Bayes-Spielen 24

1 Geschichtliche Hinführung

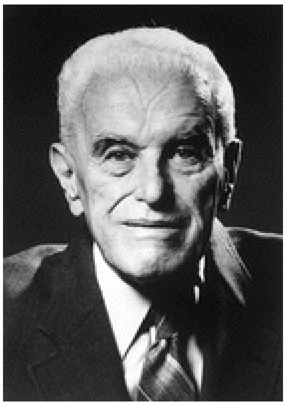
In der vorliegenden schriftlichen Ausarbeitung wollen wir uns mit Spielen beschäftigen, bei denen - grob gesagt - einzelne oder alle Spieler unsicher sind über charakteristische Größen anderer Spieler. Dies sind beispielsweise die Auszahlungen oder allgemeiner die Präferenzrelationen über die Spielergebnisse oder etwa sogar die den einzelnen Spielern zur Verfügung stehenden Strategien. Man spricht von *Spielen mit unvollständiger Information*.
Bevor wir uns jedoch der Struktur und Beispielen von Bayes-Spielen widmen, sollen kurz der geschichtliche Hintergrund angeschnitten werden, insbesondere historische Eckdaten zu zwei der bedeutendsten Personen in Zusammenhang mit Spielen mit unvollständiger Information, nämlich: Thomas Bayes und John Harsanyi.

Thomas Bayes wurde als Sohn eines Ministers 1702 in London geboren. Früh kam er in den Genuss von Privatunterricht wobei u.a. de Moivre einer seiner Lehrer war. Zudem besuchte er die religiöse Fund Academy.
Im Jahre 1719 begann er sein Studium der Theologie und Logik an der Universität zu Edinburgh. Er verließ die Universität als ein Angestellter auf Probe, jedoch mit geringem Erfolg. Schließlich muss er Mathematik studiert haben, vermutlich auch in Edinburgh – obwohl hierzu keine geschichtlichen Nachweise bestehen.

Im Jahre 1733 wurde er presbyterianischer Pfarrer und veröffentlichte 1736 erstaunlicherweise den mathematischen Artikel *„An Introduction to the Doctrine of Fluxions, and a Defense of the Mathematicians Against the Objections of the Author of The Analyst“,* in dem er die logischen Grundlagen von Newtons *„Calculus“* untermauerte und es gegen die Kritik des *Analyst* Autors Berkeley verteidigte.
Im Jahre 1742 wurde er als Mitglied der „Royal Society“ ernannt, der damals bekanntesten Vereinigung mathematischer Wissenschaftler (u.a. Newton, Bernoulli, Euler, etc.) – und dies obwohl bis dahin keinen mathematischen Text (zumindest unter seinem Namen) veröffentlicht hatte (seine Texte wurde meistens anonym veröffentlicht).
Erneut anonym wurde 1764 der Artikel *„Essay towards solving a problem in the doctrine of chances“* in dem Schriftstück *„Philosophical Transactions of the Royal Society of London“* veröffentlicht, die u.a. die nicht nur die für spieltheoretische Zwecke wichtige „Formel von Bayes“ enthielt. Diese galt als Antwort auf Probleme von bedingten Wahrscheinlichkeiten, die in den ersten Dekaden des 19.Jh. kursierten. Bayes Schlussfolgerungen wurden 1781 durch Laplace bestätigt und untermauert.

Heutzutage wird der Name Bayesianische oder Bayes-Wahrscheinlichkeit für solche Interpretationen von Wahrscheinlichkeiten gebraucht, deren Übereinstimmung in der Anwendung auf eine bestimmte Aussage oder Bedingung (nicht nur in Zusammenhang mit Zufallsvariablen) liegt. Der Begriff „Bayesian“ wird in diesem Sinne seit 1950 verwendet.
Allerdings muss bemerkt werden, dass Bayes selber in seiner Formulierung diese weitgehende Interpretation nicht vorsah.

Die spieltheoretische Bedeutung der Formel von Bayes wird bei der späteren Begriffseinführung noch deutlicher werden. An dieser Stelle sei nur gesagt, dass sie beispielsweise Anwendung bei Spielen mit unvollständiger Information im Bereich der Nutzentheorie findet, wenn es darum geht, den Erwartungsnutzen eines Pay-Offs zu bestimmen (die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ereignisses wird mit Bayes Formel ermittelt) oder aber aufgrund von Informationsasymmetrie eine Wahrscheinlichkeit an einem bestimmten Knoten innerhalb des Spielbaums zu berechnen.



Der ungarisch-amerikanische Wirtschaftswissenschaftler **John Charles Harsanyi** hieß eigentlich János Harsány. Er wurde am 29. Mai 1920 in Budapest als einziges Kind einer Apothekerfamilie geboren und starb am 9. August 2000 in Berkeley/Kalifornien.
In Budapest besuchte er das humanistische deutschsprachige Lutheraner-Gymnasium, zur damaligen Zeit eine der besten Schulen Ungarns. Im Jahr 1937 machte er seinen Abschluss und noch im selben Jahr gewann er einen nationalen Mathematik Wettbewerb.
Dem Wunsch seiner Eltern folgend studierte er zunächst Pharmazie. Obwohl er als Student zunächst keinen Militärdienst leisten musste, wurde er im März 1944, als deutsche Truppen Ungarn besetzten, in die ungarische Armee einbezogen. Gezwungenermaßen unterbrach er sein Studium und diente von Mai bis November 1944 beim Militär.

Nach dem Krieg, im Jahre 1946, schrieb er sich wieder an der Universität Budapest ein, um seinen Doktor in Philosophie - mit Nebenfächern Soziologie und Psychologie - zu machen. Im Juni 1947 erhielt er die Doktorwürde.

Als überzeugter Antimarxist emigrierte er im Dezember 1950 nach Sydney. Harshanyis ungarische Abschlüsse wurden in Australien nicht anerkannt, so studierte er, abends, nach seiner Fabrikarbeit, Wirtschaftswissenschaften 1953 bekam er seinen M.A. und 1954 eine Lehranstellung an der University of Queensland in Brisbane. Im Jahr 1956 bekam er eine Förderung der Rockefeller Stiftung, die es ihm ermöglichte zwei Jahre an der Stanford University zu studieren und seinen Doktor in Wirtschaftswissenschaften zu machen. Im Jahr 1958 kehrte er nach Australien an die Australian National University in Canberra zurück, da er dort eine attraktive Anstellung bekam. Jedoch fühlte er sich als Spieltheoretiker in Australien isoliert und so kam er (mit Hilfe von Kenneth Arrow, Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 1972 und James Tobin, Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften 1981) an die Wayne State University in Detroit. Später wurde er Professor an der Business School of the University of California in Berkeley.

Wissenschaftlich beschäftigte sich J. C. Harsanyi in den Jahren zwischen 1956 und 1973 hauptsächlich mit der Spieltheorie. Außerdem publizierte er mehrere Schriften zur utilitaristischen Ethik, vorwiegend unter der Verwendung rationaler Entscheidungsfindung für moralische Probleme. Das in der Moralphilosophie bekannte Prinzip des Durchschnittsnutzens geht auf ihn zurück, ebenso wie das Gleichwahrscheinlichkeitsmodell.
Des Weiteren modellierte John Harsanyi Bayes-Spiele erstmal in 1967. Er zeigte, dass sie sich ohne Schwierigkeiten in Spiele mit vollständiger, aber unvollkommener oder imperfekter Information überführen lassen („Harsanyi-Transformation"). Davor hat man geglaubt, dass Spiele mit unvollständiger Information überhaupt nicht analysiert werden können.
Nach einem Vorschlag von Harsanyi wird die Informationsasymmetrie oder Unsicherheit durch die Einbeziehung einer Wahrscheinlichkeitsverteilung formuliert.

An der University of California, Los Angeles (UCLA) übernahm er zwischen 1964 und 1990 eine Lehretätigkeit und bekam 1994 (zusammen mit John F. Nash, Princeton University und Reinhard Selten, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität) den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften, womit seine Verdienste in Sachen der nichtkooperativen Spieltheorie geehrt wurden.

Wie bedeutend und zugleich zahlreich Harsanyis Beiträge zur Spieltheorie waren, zeigt sich aus den folgenden autobiographischen Auszügen des Buches „Les Prix Nobel/Nobel lectures“:

„In the early 1950s I published papers on the use of von Neumann-Morgenstern utility functions in welfare economics and in ethics and on the welfare economics of variable tastes.
My interest in game-theoretic problems in a narrower sense was first aroused by John Nash's four brilliant papers, published in the period 1950-53, on cooperative and on noncooperative games, on two-person bargaining games and on mutually optimal threat strategies in such games, and on what we now call Nash equilibria.
In 1956 I showed the mathematical equivalence of Zeuthen's and of Nash's bargaining models and stated algebraic criteria for optimal threat strategies.
In 1963 I extended the Shapely value to games without transferable utility and showed that my new solution concept was a generalization both of the Shapley value and of Nash's bargaining solution with variable threats.
In a three-part paper published in 1967 and 1968, I showed how to convert a game with incomplete information into one with complete yet imperfect information, so as to make it accessible to game-theoretic analysis.
In 1973 I showed that "almost all" mixed-strategy Nash equilibria can be reinterpreted as pure-strategy strict equilibria of a suitably chosen game with randomly fluctuating payoff functions.”

Zusammenfassend muss man anmerken, dass die Verdienste Harsanyis weitaus bedeutender für die Entwicklung der Spieltheorie waren als jene von Bayes. Nichtsdestotrotz erhielt Bayes (aufgrund seiner oben angesprochenen wichtigen Formel) den Vorrang der Namensvergabe für Spiele mit unvollständiger Information.

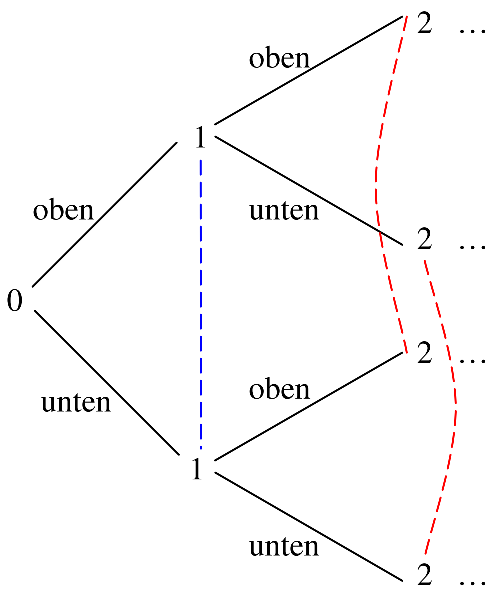
2 Begriffseinführung

2.1 Informationen

Da Bayes-Spiele sich von anderen Spielen in extensiver Form hauptsächlich durch Charakteristik der Spielinformation unterscheiden, beschreiben wir zuerst einige der üblichen Informationsannahmen, die für die Unterscheidung und die im Projekt dargestellten Beispiele wichtig sind.

2.1.1 Informationsmenge

Die Informationsmenge $I_k(i) \in \mathcal{P}_i$ des i-ten Spielers zu einem bestimmten Zeitpunkt (in einem Entscheidungsknoten des Spielbaumes) ist eine Zerlegung des Ereignisraumes E in diejenigen Ereignisse, deren Elemente für den Spieler i nicht unterscheidbar sind (k wird zur Nummerierung der Informationsmengen innerhalb einer Zerlegung verwendet).
In Spielen in extensiver Form besteht solch eine Zerlegung aus Mengen von Historien, die der Spieler unterscheiden kann. Die gestrichelte Linie verbindet Knoten, deren Historien zu gleicher Historienmenge (gleichem Ereignis) gehören, also nicht unterscheidbar sind.
Ein allgemeines Beispiel soll dies verdeutlichen:



Die blaue Linie deutet an, dass Spieler 1 nicht unterscheiden kann, ob er sich im oberen oder unteren Knoten befindet, d.h. ob Strategie des Spielers 0 „oben“ oder „unten“ war, also:

$$\mathcal{P}_1 = I_1(1) = \{(\text{oben}),(\text{unten})\}$$

Die rote Linie kennzeichnet Informationsmengen von Spieler 2 in dem Fall, dass er den Zug des Spielers 1 beobachten kann, nicht aber den des Spielers 0. Die Informationszerlegung für Spieler 2 sieht dann so aus:

$$\mathcal{P}_2 = I_1(2) \cup I_2(2) = \{(\text{oben,oben}),(\text{unten,oben})\} \cup \{(\text{oben,unten}),(\text{unten,unten})\}.$$

2.1.2 Gemeinsames Wissen (Common Knowledge)

Gemeinsames Wissen sind Informationen, die allen Spieler gleichermaßen bekannt sind. Wichtig dabei ist auch, dass jedem Spieler bewusst ist, dass die Informationen auch den anderen Spielern bekannt sind, und dass jeder weiß, dass die anderen wissen, dass derjenige es weiß, usw.

Meistens sind z.B. Spielregeln ein Teil des gemeinsamen Wissens. Es wird auch immer angenommen, dass alle Mitspieler sich rational verhalten und dass jeder weiß, dass alle anderen sein rationales Verhalten annehmen.

Bemerkung: Falls dazu jedem Spieler auch Strategiemengen S_i und die Auszahlungen $u_i(s)$ $(i=1,\dots,N)$ bekannt sind, liegt ein Spiel mit vollständiger Information vor. Gemeinsames Wissen ist in dem Fall $\Gamma=(M, (S_i), (u_i))$.

2.1.3 Perfektes Erinnerungsvermögen (Perfect Recall)

Ein Spieler zeichnet sich durch perfektes Erinnerungsvermögen aus, wenn er frühere Informationen nicht vergisst. D.h. er erinnert sich an jedem seiner Entscheidungsknoten an alle Informationen, über die er früher (an den vorherigen Knoten) verfügte, also auch an seine eigenen Spielzüge. Dadurch kann die Informationszerlegung im Laufe des Spiels immer feiner werden (der Spieler kann immer genauer sagen, an welchem Knoten er sich gerade befindet). Falls nicht anders vermerkt, wird perfektes Erinnerungsvermögen vorausgesetzt.

2.1.4 Spiel mit unvollkommener Information

Ein Spiel mit unvollkommener (oder auch imperfekter) Information liegt vor, wenn nicht alle Handlungen der anderen Mitspieler beobachtbar sind. Ein allgemeiner Beispielbaum dazu wurde oben, bei der Definition der Informationsmenge, schon eingeführt. In solchen Spielen machen auch solche Informationszerlegungen Sinn.
Moral Hazard: Wenn man Informationsvorteile ausnutzen versucht (d.h. wenn ein Spieler, dessen Spielzüge die anderen nicht beobachten können, aus dieser Unvollkommenheit der Information versucht im Vorteil zu sein), werden in der Regel die Auszahlungen der anderen Spieler niedriger ausfallen als im Fall eines Spiels mit vollkommener Information. Für diese Situationen verwendet man in der ökonomischen Theorie den Begriff *Moral Hazard.*

2.1.5 Spiel mit unvollständiger Information

Man sagt, ein Spiel hat unvollständige Information, wenn Charakteristika der Mitspieler zumindest teilweise nicht beobachtbar sind. Allgemein kann man sagen, dass diese Informationen zum Teil nicht zugänglich oder zu teuer sind. Informationen, über die ein Spieler verfügt, beeinflussen Strategien anderer Spieler. Dies können Informationen über mögliche Alternativen der anderen Spieler sein, aber auch z.B. Höhe der Produktionskosten. Durch eine gute Modellierung werden diese zu unbekannten Auszahlungen der anderen zusammengefasst.
Bei Spielen mit unvollkommener Information konnte man nicht alle Spielzüge sehen, dafür aber waren Spielstruktur und Spielereigenschaften allen bekannt. Jeder wusste, welche Handlungsalternativen die anderen Spieler haben und auch wie sie diese bewerten (Auszahlungsfunktionen). So kann jeder Spieler die optimale Strategie für jeden Spieler ermitteln. Viele Aspekte von Spielsituationen können aber unter solchen Voraussetzungen nicht analysiert werden. Harsanyi hat aber gezeigt, dass jedes Spiel mit unvollständiger Information in ein Spiel mit unvollkommener Information überführt werden kann. Wie das zu verstehen ist, wird an einem Beispiel im Abschnitt *Modellierung* erläutert.

Adverse Selection: Ähnlich wie bei Moral Hazard können auch Informationsunterschiede, die aus unvollständiger Information resultieren, ausgenutzt werden. In der ökonomischen Theorie wird dies als Adverse Selection bezeichnet.

Bemerkung: *Moral Hazard* und *Adverse Selection* stammen aus der Versicherungstheorie. Folgende Überlegung liegt dem Begriff Adverse Selection zugrunde: eine Versicherungsgesellschaft kann zwischen „guten" und „schlechten" Risiken nicht unterscheiden, wird daher eine Durchschnittsprämie für Versicherungen verlangen. Da diese Prämie aber für „gute" Risiken unattraktiv ist, werden solche Policen eher von Kunden gekauft, die höhere Schadenserwartung haben („schlechte" Risiken). So gesehen müsste die Gesellschaft wiederum noch höhere Prämie anbieten, hätte sie dann aber noch Kunden dafür?

2.2 Modellierung

In diesem Abschnitt wird erläutert, wie man Bayes-Spiele beschreibt und modelliert. Zuerst zeigen wir, wie man ein Spiel mit unvollständiger Information in solches mit unvollkommener überführt:

2.2.1 Unvollständige Information → unvollkommene Information

In Spielen mit unvollständiger Information sind die Grundannahmen des gemeinsamen Wissens nicht mehr erfüllt, d.h. $\Gamma=(M,(S_i),(u_i))$ ist nicht allen Spielern gleichermaßen bekannt (z.B. die Auszahlung u_i des i-ten Spielers ist den anderen nicht bekannt). Um Lösungskonzepte, die für Spiele mit vollständiger Information entwickelt wurden, anwenden zu können, müssen wir unser Spiel als solches modellieren.

Nach Harsanyi kann man dies erreichen, indem man einen zusätzlichen Spieler einführt (die Natur oder Spieler 0). Er „wählt" für jeden Spieler, deren Charakteristik nicht bekannt ist, gewisse Eigenschaften und bestimmt somit einen konkreten **Typ** $t_i \in T_i$ (= **Typenmenge**) des Spielers i. t_i kann nur von i, nicht aber von den anderen Spielern beobachtet werden. Wir erhalten dadurch ein Spiel mit vollständiger, aber unvollkommener Information. Es enthält $(t_1,\ldots, t_N)$ als Variable, die beschreiben sollen, welche *privaten* Informationen jeder Spieler i haben könnte.

2.2.2 Common Priors

Den Zügen der Natur, die am Anfang Eigenschaften für alle Spieler wählt, werden Wahrscheinlichkeiten p_i zugeordnet.Mit Wahrscheinlichkeit $p_i(t_i)$ ist Spieler i vom Typ t_i. Da Spieler i seinen Typ kennt, ist es für ihn relevant, die Verteilung $p(t_{-i}| t_i)$ zu bestimmen, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass die anderen Spieler vom Typ $(t_1,\ldots, t_{i-1}, t_{i+1},\ldots, t_N) \in T_{-i}$ sind, wenn man selbst vom Typ t_i ist. Dazu ist die Angabe aller denkbaren Typenkombinationen und Spezifizierung der subjektiven Wahrscheinlichkeitseinschätzungen aller Spieler, $p(t_{-i}| t_i)$, erforderlich. Solches Spiel wird als **Bayes-Spiel** bezeichnet.

Die Wahrscheinlichkeiten $p(t_{-i}| t_i)$ lassen sich als bedingte Wahrscheinlichkeiten berechnen, wenn man eine gemeinsame Ausgangsverteilung $p(t)$, $t \in T$, über alle *Züge der Natur*, d.h. über alle möglichen Typenkombinationen, unterstellt. Die so genannte **Common Priors-**

Annahme (Annahme, dass alle Spieler eine gemeinsame *a priori* Wahrscheinlichkeitsverteilung p = „Common Prior“ besitzen) ist bei der Analyse der Bayes-Spiele sehr wichtig und wird oft als Konsistenzbedingung gefordert. Somit ist

$$p(t_{-i} \mid t_i) = \frac{p(t_i, t_{-i})}{p(t_i)}, \text{ wobei } \quad p(t_i) = \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_i, t_{-i}) \qquad \text{, leicht zu berechnen.}$$

Warum sollte aber p(t) allen Spielern bekannt sein?
Man begründet es oft so, dass dies eine „objektive“ Vorstellung über die Wahrscheinlichkeiten ist, mit der die Natur die Spielertypen wählt – noch bevor alle Spieler ihre privaten Informationen erhalten (den eigenen Typ erfahren). Nachdem jeder schon seine private Information besitzt, können die Einschätzungen von zwei verschiedenen Spielern unterschiedlich aussehen, da sie verschiedene Informationen als gegeben in die Berechnung einbeziehen!

Nun, da wir ein Bayes-Spiel modellieren können, stellt sich uns die Frage, wie wir in eben diesen Spielen ein Adäquat zu den uns bereits bestens bekannten Nash-Gleichgewichten bzw. perfekten Nash-Gleichgewichten in Spielen mit vollständiger und vollkommener Information finden. Dies werden wir den beiden folgenden Kapitel vorführen.

3 Bayes-Nash-Gleichgewichte

Betrachten wir einen Spieler i und einen seiner Typen $t_i \in T_i$. Seine N – 1 Gegenspieler seien beschrieben durch ein Typenprofil $t_{-i} \in T_{-i}$, und ihre Strategieprofil sei $\sigma_{-i} \in \Delta_{-i}$. Wählt nun Spieler i eine Strategie $\sigma_i \in \Delta_i$, so ist sein erwarteter Nutzen gegeben durch:

$u_i((\sigma_i, \sigma_{-i}), (t_i, t_{-i}))$

Wie bereits früher erwähnt, kennt Spieler i die (gemischten) Strategien, die die anderen Spieler in jeder ihrer Ausprägungen spielen würden, d.h. bei gegebenem t_{-i} wüsste Spieler i die Strategien aller Gegenspieler. Er kennt aber die Typen der anderen Spieler nur nach ihrer Wahrscheinlichkeit, weiß also nicht die realisierten Typen und kann daher auch nicht vorhersagen, welches Ergebnis das Spiel bei Wahl einer Strategie σ_i haben würde. Welche Strategie soll er also wählen?
Spieler i kennt zwar nicht t_{-i}, weiß aber die Wahrscheinlichkeitsverteilung p, nach der die Natur die Typen der Spieler auswählt; und er kennt seinen eigenen Typ t_i, kann also seine (subjektive) Wahrscheinlichkeit über die Typen der anderen Spieler berechnen. Jeder Kombination von Typen t_{-i} gibt Spieler i die Wahrscheinlichkeit

$$\hat{p}_i(t_{-i} \mid t_i) := \frac{P(t_i, t_{-i})}{P(t_i)} := \frac{p(t)}{p_i(t_i)},$$

wobei p_i die Randverteilung des i-ten Spielers sei, d.h.

$$p_i(t_i) := \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} p(t_i, t_{-i})$$

Diese Zuordnung der Wahrscheinlichkeit $\hat{p}_i(t_{-i} \mid t_i) = \frac{p(t)}{p_i(t_i)}$ entspricht genau der Bayes'schen Regel (s.o.)
Also ergibt sich der erwartete Nutzen des i-ten Spielers, gegeben sein eigener Typ t_i und die gegnerischen Strategieprofile σ_{-i} (die natürlich von t_{-i} abhängen!), durch

$$\sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \hat{p}_i(t_{-i} \mid t_i) u_i((\sigma_i, \sigma_{-i}(t_{-i})), (t_i, t_{-i})) \quad (1)$$

Wir wollen eine beste Antwort von Spieler i (d.h. von Typ t_i) auf das Strategieprofil σ_{-i}, d.h. für **alle** möglichen Ausprägungen dieses Profils (also für alle Typenkombinationen t_{-i}) finden, müssen also (1) über dem Strategienraum Δ_i maximieren. Wir erweitern die Beste-Antwort-Korrespondenz um die Abhängigkeit vom Typ t_i des i-ten Spielers: $b_i : \Delta_{-i} \times T_i \to \Delta_i$

$$b_i(\sigma_{-i}, t_i) = \max_{\sigma_i \in \Delta_i} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} \hat{p}_i(t_{-i} \mid t_i) u_i((\sigma_i, \sigma_{-i}(t_{-i})), (t_i, t_{-i}))$$

Wenn ein Strategieprofil $\sigma \in \Delta$ derart ist, dass es den erwarteten Nutzen jedes Typs jedes Spielers maximiert, so sprechen wir von einem **Bayes–Nash–Gleichgewicht**.
Formal ist σ ein Bayes–Nash–Gleichgewicht, wenn

$$\forall i \in \{1,\dots,N\} \quad \forall t_i \in T_i : supp(\sigma_i(t_i)) \subset b_i(\sigma_{-i}, t_i)$$

Dazu ein Beispiel:

Betrachten wir einen Markt und zwei Firmen. Firma 1 produziert bereits in diesem Markt, Firma 2 überlegt, ob sie in den Markt eintreten soll oder nicht. Firma 1 muss die Entscheidung treffen, ob sie ihre etwas veraltete Fabrik modernisieren will oder nicht. Falls Firma 1 modernisiert, sieht Firma 2 für sich keine Chance und überlässt den Markt Firma 1. Falls Firma 1 aber nicht modernisiert und die veraltete Technologie beibehält, wäre es für Firma 2 interessant, in den Markt einzusteigen.
Zusätzlich hat Firma 1 entweder hohe Modernisierungskosten C oder niedrige Kosten c. Firma 1 kennt natürlich ihre Kosten, Firma 2 hat nur eine Vermutung, dass die Kosten von F1 hoch sind mit einer Wahrscheinlichkeit ρ und niedrig mit der Gegenwahrscheinlichkeit 1-ρ.
Die Auszahlungen seien wie folgt:

Bei hohen Kosten C:		
[ρ]		
1/2	Eintritt [y]	Nichteintritt [1-y]
Modern	0,-2	4,**0**
Veraltet	**4,2**	**6**,0

Bei niedrigen Kosten c:		
[1-ρ]		
1/2	Eintritt [y]	Nichteintritt [1-y]
Modern [x]	3,-2	**7,0**
Veraltet [1-x]	**4,2**	6,0

Firma 2 hat keine privaten Informationen, also ist ihr Typenraum T_2 einelementig und wird daher vernachlässigt. Firma 1 hat eine private Information über ihre Modernisierungskosten, also hat ihr Typenraum zwei Elemente: $T_1 = \{C, c\}$.

Eine Strategie für F1 ist eine Aktion für jede ihrer zwei Typen, also
$s_1(C) \in \{M, V\} = A_1$, $s_1(c) \in \{M, V\}$. Eine Strategie für F2 ist nur eine Aktion
$a_2 \in \{E, N\} = A_2$.

Wir sehen sofort, dass **im Fall von hohen Kosten C** für F1 eine strikt dominante Strategie, nämlich V, existiert. Also muss für jedes Bayes-Nash-GG s* gelten: $s_1(C) = V$.

Im Falle von niedrigen Kosten c hängt die beste Antwort von F1 von der Strategie von F2 ab. Wenn F2 eintritt, wird F1 V bevorzugen; wenn F2 nicht eintritt, wird F1 M bevorzugen. Es sei y die W'keit, mit der F2 in den Markt eintritt. Die Auszahlungen für F1 sind dann Funktionen der gemischten Strategie (y, 1-y) von F2:

$$u_1(M; y; c) = 3y + 7(1-y) = 7 - 4y$$
$$u_1(V; y; c) = 4y + 6(1-y) = 6 - 2y$$

F1 bevorzugt M, wenn $u_1(M; y; c) > u_1(V; y; c)$, also bei $y < 0{,}5$.
F1 bevorzugt V, wenn $u_1(M; y; c) < u_1(V; y; c)$, also bei $y > 0{,}5$.
Bei $y = 0{,}5$ ist F1 genau indifferent zwischen moderner und veralteter Technologie.

Es sei x die W'keit, mit der F1 M wählt.
Die beste-Antwort-Korrespondenz $x^*(y)$ von F1 auf y ist dann:

$$x^*(y) = \begin{cases} \{1\}, \text{ falls } y < 0{,}5 \\ [0{,}1], \text{ falls } y = 0{,}5 \\ \{0\}, \text{ falls } y > 0{,}5 \end{cases}$$

Jetzt suchen wir die beste-Antwort-Korrespondenz von F2. Man beachte, dass F2 nicht weiß, ob die Kosten hoch oder niedrig sind!
F2 trifft mit W'keit ρ auf eine F1 mit hohen Kosten C. In diesem Fall wählt F1 sicher A (s.o.). Das ergibt eine Auszahlung in Höhe von 2 für F2, falls sie eintritt.
Mit W'keit $1 - \rho$ hat F1 niedrige Kosten c. In diesem Fall wählt F1 M mit einer W'keit x.

Wenn also F2 eintritt, ist ihre erwartete Auszahlung

$$u_2(E; x) = 2\rho + (1 - \rho)(-2x + 2(1 - x)) = 2 - 4x(1 - \rho)$$

Wenn F2 nicht eintritt, ist ihre Auszahlung =0.

F2 bevorzugt Eintritt E, falls

$$u_2(E; x) = 2\rho + (1 - \rho)(-2x + 2(1 - x)) = 2 - 4x(1 - \rho) > 0 = u_2(N; x),$$

d.h. falls $x < 1/(2(1 - \rho)) =: \mu$. Beachte, dass $\mu \in [1/2, \infty)$ für $\rho \in [0,1]$. Damit können wir dann die beste-Antwort-Korrespondenz für F2 angeben:

$$y^*(x) = \begin{cases} \{1\}, \text{ falls } x < \mu \\ [0{,}1], \text{ falls } x = \mu \\ \{0\}, \text{ falls } x > \mu \end{cases}$$

Man bemerke dass, anders als bei F1, die beste Antwort bei F2 von μ, also von ρ abhängt.

Jetzt können wir leicht die Bayes-Nash-GG finden, indem wir die Schnittpunkte der beste-Antwort-Korrespondenzen finden. Man kann alle GG des Spiels schreiben als

$$((V, xM + (1 - x)V); yE + (1 - y)N)$$

wobei das erste Element (also V) die Strategie von F1 im Fall C darstellt, das zweite die Strategie von F1 im Fall c und das dritte die Strategie von F2.

Unterscheiden wir nach den Fällen, ob die Modernisierungskosten von F1, eher niedrig sind, eher hoch sind oder ob beides gleich wahrscheinlich ist:

1. Fall: $\rho < 0{,}5$

Dann gibt es zwei reine Bayes-Nash-GG, nämlich ((V, M); N) und ((V, V); E). Ersteres bedeutet, dass F1 bei niedrigen Kosten modernisiert und F2 nicht eintritt, letzteres bedeutet, dass F1 nicht modernisiert und F2 eintritt. Außerdem gibt es ein GG in gemischten Strategien, nämlich bei y = 0,5 und x = μ. Dies bedeutet, dass F2 mit W'keit 0,5 eintritt und F1 mit W'keit μ modernisiert.

2. Fall: ρ > 0,5

Dann gibt es nur ein einziges GG, nämlich ((V, V); E).

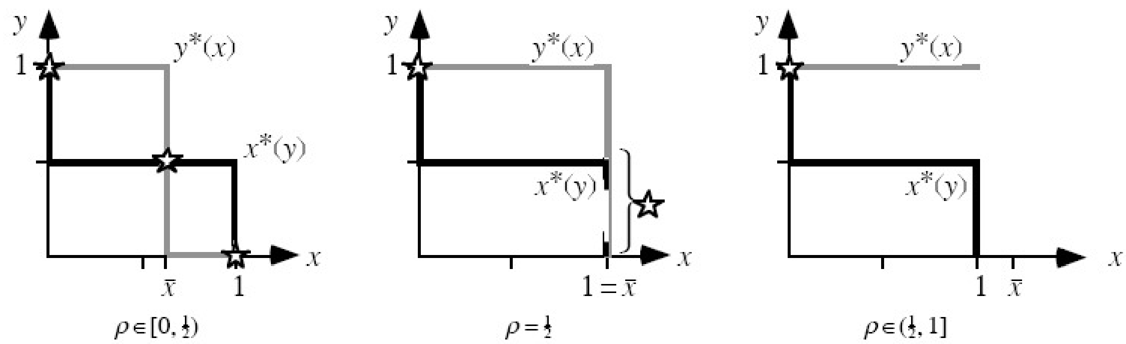
3. Fall: ρ = 0,5

In diesem Fall gibt es ein reines GG, nämlich ((V, V); E). Zusätzlich gibt es ein Kontinuum von gemischten Strategien. Es ist nämlich ρ = 0,5, also μ = 1, d.h. bei x = 1 modernisiert F1, und das macht F2 genau indifferent zwischen Eintritt und Nichteintritt. Aus der Bedingung x*(y) = {1} falls y < 0,5 ergibt sich dann, dass für alle y ∈ [0, 1/2) die Strategie

((V, M); yE + (1 – y)N)

ein Bayes-Nash-GG ist.

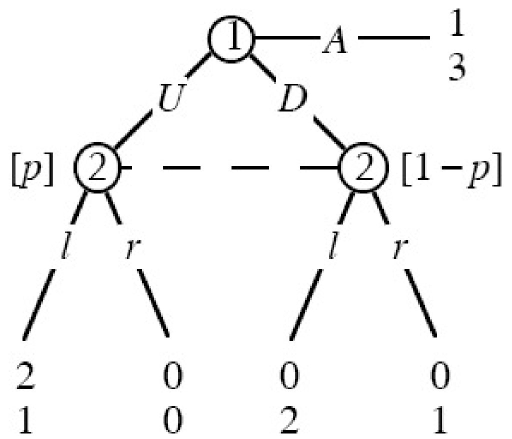
Die 3 Fälle sind im Folgenden grafisch illustriert; * markiert GG.



4 Perfektes Bayes–Nash–Gleichgewicht

Wir haben in der Vorlesung schon oft bei Spielen mit perfekter Information gesehen, dass Nash – GG manchmal nicht optimal sind, weil sie beispielsweise aus unglaubwürdigen Drohungen resultieren. Genauso verhält es sich bei Bayes – Spielen. Das passende Hilfsmittel zur Elimination war die Suche nach teilspielperfekten Gleichgewichten. Ein perfektes Bayes-Nash-GG ist das Analogon dazu. Leider lässt sich das Konzept nicht 1:1 auf Bayes – Spiele übertragen. Einer der Gründe hierfür ist, dass Teilspiele immer an einelementigen Entscheidungsmengen beginnen müssen.

Betrachten wir dazu das folgende Spiel:



	l	r
A	1,3	**1,3**
U	**2,1**	0,0
D	0,**2**	0,1

Es fällt sofort ins Auge, dass dieses Spiel zwei Bayes – Nash – GG in reinen Strategien besitzt, nämlich (A,r) und (U,l). Weil Spieler 2 keine einelementigen Entscheidungsmengen besitzt, hat das Spiel nur ein Teilspiel, nämlich das ganze Spiel selbst, also sind beide GG teilspielperfekt.

Sieht man etwas genauer hin, erscheint das Gleichgewicht (A,r) unplausibel:
Würde das Spiel die Informationsmenge {(U), (D)} von Spieler 2 erreichen, wäre S2 unsicher, ob sie über U oder D erreicht worden wäre. Dies ist aber für die Entscheidung von S2 nicht von Bedeutung, da in beiden Fällen *l* dominant ist gegenüber *r* (hätte S1 U gewählt, so wäre die Auszahlung für S2 1 bei Wahl von *l* und 0 bei *r*; hätte S1 D gewählt, so wäre die Auszahlung für S2 2 bei Wahl von *l* und 1 bei Wahl von *r*). In der Informationsmenge von S2 ist also *r* keine beste Antwort, egal welche Vermutung S2 über die Wahrscheinlichkeit p hat.

Im obigen Beispiel haben schon implizit die erste der Bedingungen erfüllt, die an ein Bayes – Spiel gemacht werden, damit man perfekte Bayes – GG finden kann, nämlich dass S2 in seiner Informationsmenge eine Vermutung p hat, mit welcher Wahrscheinlichkeit er über U in eben seine Informationsmenge gekommen ist.

Allgemein sieht das so aus:

Bayes – Bedingung 1:
Für ein Strategieprofil $\sigma \in \Delta$, für jeden Spieler $m \in M$ und für jede Informationsmenge des m-ten Spielers, $I_k(m) \in \mathcal{P}_m$, muss Spieler m Vermutungen („beliefs“) $\rho_m(I_k(m)) \in \Delta(I_k(m))$ darüber haben, in welchem Knoten seiner Informationsmenge er sich befindet, bedingt auf die Information, dass das Spiel die Informationsmenge erreicht hat.

$\rho_m(I_k(m))$ ist also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Informationsmenge $I_k(m)$. Somit sind die beliefs ρ_m von Spieler m eine Angabe von Wahrscheinlichkeitsverteilungen für jede Informationsmenge des m – ten Spielers. Das N-Tupel $\rho = (\rho_1,\ldots, \rho_N)$ von beliefs ist ein *belief- Profil*.

Im obigen Beispiel hat S1 nur eine (einelementige) Informationsmenge, nämlich die leere Menge, also den Start des Spiels. Natürlich weiß er sicher, dass er in $\emptyset$ ist, und das Wahrscheinlichkeitsmaß darauf ist natürlich trivial.
S2 hat auch nur eine Informationsmenge, nämlich $I_1(2) = \{(U), (D)\}$. Formal ist sein Wahrscheinlichkeitsmaß darauf

$$\mu = p\delta_U + (1\text{-}p)\delta_D$$

wobei δ_x das Punkt- oder Diracmaß in x darstellt. D.h.

$$\mu(U) = p\delta_U(U) + (1\text{-}p)\delta_D(U) = p + (1 - p)0 = p \qquad \text{und}$$
$$\mu(D) = p\delta_U(D) + (1\text{-}p)\delta_D(D) = 0p + (1 - p)1 = 1 - p.$$

Unser Spiel erfüllt also Bayes – Bedingung 1.

Nun hätten wir gerne eine Aussage über Strategie–belief–Kombinationen. Zu einem Bayes–Nash–GG (also zu einem Strategieprofil σ) geben wir zusätzlich ein belief – Profil ρ an und erhalten ein Strategie–belief–Profil (σ, ρ). Wir wollen eine Gleichgewichtsanforderung angeben, die in etwa das folgende aussagt: für jeden Spieler $m \in M$ und jede Spieler-m Informationsmenge $I_k(m) \in \mathcal{P}_m$ ist die Strategie von Spieler m eine beste Antwort, gegeben seine beliefs $\rho_m(I_k(m)) \in \Delta(I_k(m))$ zur Informationsmenge $I_k(m)$. Dies ist jedoch zu vage, wir müssen präzisieren.

Erinnern wir uns noch einmal daran, dass ein Teilspiel dadurch definiert ist, dass man eine einelementige Informationsmenge herausnimmt, als Startpunkt eines neuen Spieles festsetzt und die Informationsmengen, Aktionen und Auszahlungen des Teilspiels durch Restriktion des Ausgangsspiels erhält. Wir verallgemeinern jetzt das Konzept Teilspiel:

Definition:

Ein *Fortsetzungsspiel* ist gegeben durch eine (nicht notwendig einelementige) Informationsmenge $I_k(m) \in \mathcal{P}_m$ eines Spielers $m = j(I_k(m))$ und alle ihre Folgeknoten aus dem Ausgangsspiel. Wieder werden Informationsmengen, Aktionen und Auszahlungen des Fortsetzungsspiels durch Restriktion aus dem Ausgangsspiel abgeleitet.

Ist $I_k(m)$ einelementig, so ist das in $I_k(m)$ beginnende Fortsetzungsspiel genau das in $I_k(m)$ beginnende Teilspiel. Ist $I_k(m)$ jedoch mehrelementig, dann ist das Fortsetzungsspiel **kein**

Teilspiel. Mit gutem Grund: es kann nicht als eigenes Spiel gespielt werden, weil es keinen Startknoten hat! Wir stellen uns also wieder vor, die Natur würde zunächst einen Punkt aus der Menge $I_k(m)$ auswählen, und zwar genau nach dem belief von Spieler m in $I_k(m)$, also nach der Verteilung $\rho_m(I_k(m))$. Wir können jede Strategie und jeden belief auf das Fortsetzungsspiel restriktieren, indem wir einfach alle überflüssigen Teile entfernen.

Bayes – Bedingung 2

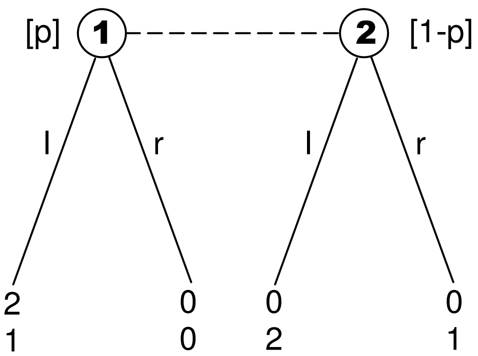
Man betrachte das Fortsetzungsspiel, das durch eine Informationsmenge $I_k(m)$ und den bedingten belief $\rho_m(I_k(m))$ definiert wird. Die Restriktion eines Strategie – belief – Profils (σ,ρ) auf dieses Fortsetzungsspiel muss ein Bayes – Nash – GG des Fortsetzungsspiels sein.

Definition:

Sei (σ, ρ) ein Strategie – belief – Profil und $I_k(m)$ eine Informationsmenge. Sei (σ', ρ') die Restriktion von (σ, ρ) auf das Fortsetzungsspiel beginnend in $I_k(m)$. Man sagt, eine Strategie σ_i des i-ten Spielers ist *strikt dominiert beginnend in der Informationsmenge* $I_k(m)$, wenn es eine andere Strategie μ_i des i-ten Spielers gibt, so dass für alle Strategieprofile der Gegenspieler, σ_{-i}, die erwartete Auszahlung für Spieler i im Fortsetzungsspiel strikt größer ist, wenn i μ_i wählt anstatt σ_i:

$$u_i'(\mu_i', \sigma_{-i}'; t) > u_i'(\sigma_i', \sigma_{-i}'; t).$$

Die Bayes – Bedingungen 1 und 2 reichen aus, um das „unerwünschte" Gleichgewicht (A, r) im Beispiel zu eliminieren. Dazu betrachten wir das Fortsetzungsspiel, das in der Informationsmenge von Spieler 2 beginnt. Die beliefs von S2 werden durch den Parameter p ausgedrückt:

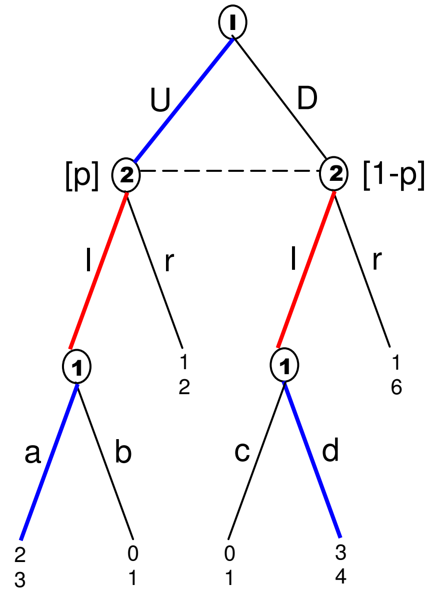


l	*r*
2p, 2-p	0, 1-p

Weil $2 - p > 1 - p$ für alle $p \in [0,1]$, ist die Strategie *l* strikt dominant über *r*, also ist *l* das einzige Nash – GG des Fortsetzungsspiels. Also erfüllt (A, r) nicht die Bayes – Bedingung 2.

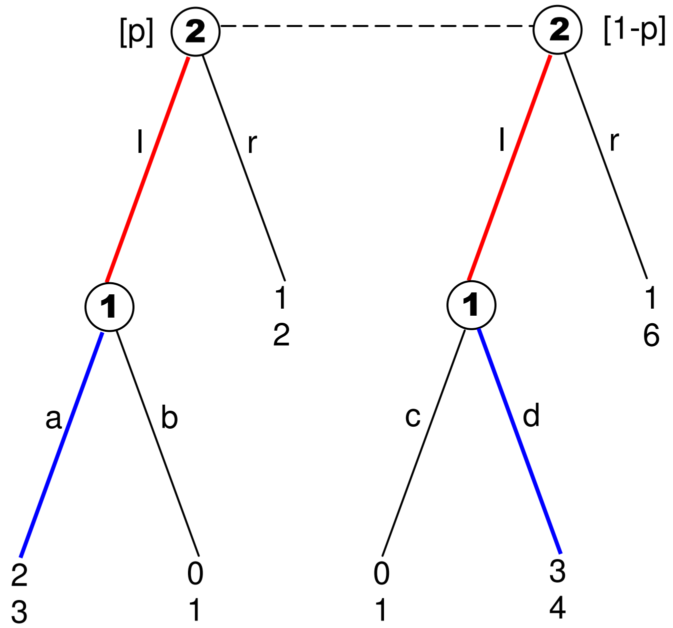
Beispiel: Ein Strategie – belief – Profil auf ein Fortsetzungsspiel einschränken

Es sei folgendes Spiel gegeben:



Ein mögliches Strategie – belief – Profil ist
s := ((U, a, d); (l); p),
wobei (U, a, d) die Strategie des ersten Spielers ist, (l) die des zweiten, und p ist der belief von S2 in seiner Informationsmenge {(U), (D)}.

Die nächste Abbildung zeigt das Fortsetzungsspiel, das in der Informationsmenge von S2 beginnt:



Der Auszahlungsvektor der Restriktion s' ist dann

$p(2, 3) + (1 – p)(3, 4) = (3 – p, 4 – p)$.

Untersuchen wir, ob das Profil s die Bayes – Bedingung 2 hinsichtlich des Fortsetzungsspiels erfüllt. Dazu sehen wir uns die Auszahlungsmatrix des Fortsetzungsspiels an:

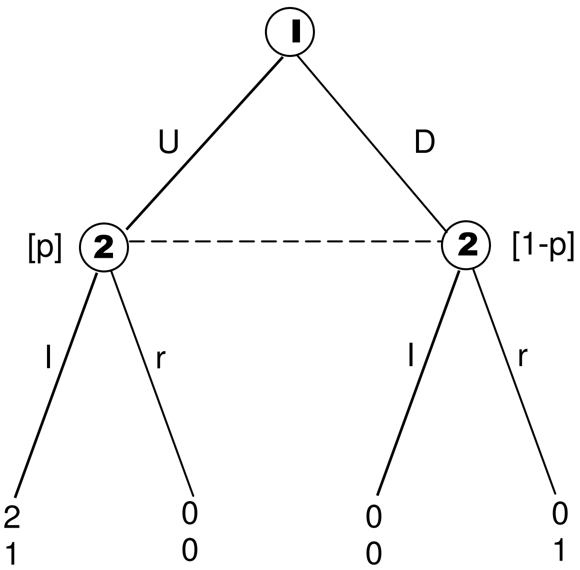
	l	r
(a, c)	2p, 1 + 2p	1, 6 – 4p
(a, d)	3 – p, 4 – p	1, 6 – 4p
(b, c)	0, 1	1, 6 – 4p
(b, d)	3 – 3p, 4 – 3p	1, 6 – 4p

Damit s Bedingung 2 hinsichtlich des Fortsetzungsspiels erfüllt, muss s' = ((a, d); (l); p) ein Bayes – Nash – GG des Fortsetzungsspiels sein. Dafür ist es erforderlich, dass (a, d) eine beste Antwort von S1 auf *l* ist, also $3 - p \geq \max\{2p, 0, 3 - 3p\}$. Man sieht leicht, dass das für alle p aus dem Einheitsintervall erfüllt ist.
Außerdem muss *l* beste Antwort von S2 auf (a, d) sein. Dafür muss gelten:

$$4 - p \geq 6 - 4p \Leftrightarrow p \in [\frac{2}{3}, 1].$$

Also ist s' ein Bayes – Nash – GG genau dann wenn p ∈ [2/3, 1].

Wir haben gesehen, dass die Bedingungen 1 und 2 unerwünschte Gleichgewichte eliminieren. Sie genügen aber noch nicht, um ein perfektes Bayes – GG zu definieren, denn sie garantieren nicht, dass ein Strategie – belief – Profil überhaupt ein Bayes – Nash – GG ist. Dazu sehen wir uns ein weiteres Spiel an:



	L	r
U	**2,1**	**0**,0
D	0,0	**0,1**

Das Strategie – belief – Profil s = (U; r; p = 0) erfüllt die Bedingungen 1 und 2, ist aber KEIN Bayes–Nash–GG des Spiels.

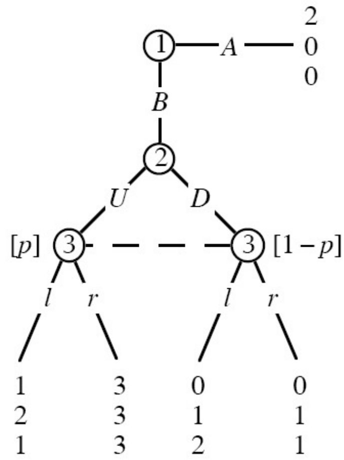
Warum aber erfüllt s die Bedingungen? Das liegt grob gesprochen daran, dass der belief von Spieler 2, also die Vermutung p = 0, „falsch“ ist, und zwar im folgenden Sinne:

<u>Bayes – Bedingung 3</u>
Die beliefs in jeder Informationsmenge, die auf dem Gleichgewichtspfad liegen, müssen aus dem Strategieprofil nach der Bayes'schen Regel bestimmt sein. Das heißt:

Ist $I_k(m) \in \mathcal{P}_m$ eine Informationsmenge des m-ten Spielers, die mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht wird, wenn sich die Spieler nach einem Strategie – Profil σ verhalten, dann muss $\rho_m(I_k(m))$ aus σ mit der Bayes'schen Regel berechnet werden.

In unserem Spiel wird dadurch das Profil s = (U; r; p = 0) als Kandidat für ein perfektes Bayes-GG eliminiert, denn: gegeben den Fall, dass S1 U wählt, muss der belief von S2 sein Gewicht auf dem Knoten haben, der durch U erreicht wird – d.h. wir müssten p = 1 anstatt p = 0 haben.

Das Profil t = (U; r; p = 1) würde also Bedingung 3 erfüllen. (Bemerkung: t erfüllt aber nicht Bedingung 2, ist also auch kein perfektes BayesGG)



Leider reichen die Bedingungen 1 – 3 immer noch nicht aus. Dies zeigt uns ein weiteres Beispiel.

Betrachten wir das Fortsetzungsspiel, das in der einelementigen Informationsmenge von S2, {(B)}, beginnt (weil die Menge einelementig ist, ist das sogar ein Teilspiel!). Dieses Teilspiel hat ein eindeutiges NashGG, (U; r). (B; U; r) ist also das einzige teilspielperfekte GG des ganzen Spiels, und nach Bedingung 3 muss der belief von S3 p=1 sein (weil die Informationsmenge von S3 auf dem GG-Pfad liegt). Also erfüllt das Strategie – belief – Profil (B; U; r; p=1) die Bedingungen 1 - 3.

Ein anderes Strategie – belief – Profil dieses Spiels ist (A; U; *l*; p=0). Dieses Profil (beziehungsweise sein Strategie-Anteil (A; U; *l*)) ist ein NashGG, und es erfüllt die Bedingungen 1 – 3. Denn die Informationsmenge von S3 ist nicht auf dem Gleichgewichtspfad, also stellt Bedingung 3 keine Bedingung an den belief von S3. Es ist jedoch nicht teilspielperfekt, denn wir haben bereits gesehen, dass Teilspielperfektheit (U; r) von den Spielern 2 und 3 erfordert. Das Problem bei diesem Profil kann wieder auf die beliefs von S3 in seiner Informationsmenge zurückgeführt werden. Die Informationsmenge von S3 kann nur erreicht werden, wenn S1 B spielen würde. Dem Profil entsprechend wählt S2 dann U. Bedingt auf das Wissen, dass seine Informationsmenge erreicht wurde, sollte S3 dann also annehmen, dass sie über (B; U) erreicht wurde und nicht über (B; D). Sein belief sollte also lauten p=1 anstatt p=0.

Wir formulieren also eine zusätzliche Bedingung, die nicht-teilspielperfekte GG eliminiert.

<u>Bayes – Bedingung 4</u>

Die beliefs in jeder Informationsmenge, die nicht auf dem Gleichgewichtspfad liegt, muss durch das Strategieprofil nach der Bayes'schen Regel bestimmt sein, wo immer das möglich ist.

Der Zusatz „wo immer das möglich ist“ ist nötig, da es Informationsmengen geben kann, die nicht mit positiver Wahrscheinlichkeit erreicht werden, und auf die man deswegen die Bayes'sche Regel nicht anwenden kann.

Hiermit sind wir endlich am Ziel!

Definition:

Ein perfektes Bayes – Gleichgewicht ist ein Strategie – belief – Profil, das die Bedingungen 1 – 4 erfüllt.

Wie bereits gezeigt, führt das Konzept eines perfekten Bayesianischen Gleichgewichts die Idee ein, dass die Spieler Wahrscheinlichkeitseinschätzungen darüber haben, in welchem Entscheidungsknoten sie sich befinden.
Diese Einschätzungen sollten etwas mit der a priori Wahrscheinlichkeitseinschätzung zu tun haben, mit der die Spieler gewisse Typen annehmen.
Durch die Wahl der Aktion kann ein „früher" Spieler jedoch auch seinen Typ signalisieren oder ihn versuchen zu verbergen. Deshalb wird die Einschätzung zwar mit der a priori Verteilung über die Typen in Zusammenhang stehen, sie kann jedoch durch die beobachteten Aktionen modifiziert werden.

Dies bringt uns zu dem Begriff der Signalisierungsspiele. Diese sollen als ein bekanntes Gebiet von Spielen mit unvollständiger Information im Folgenden kurz angeschnitten werden.

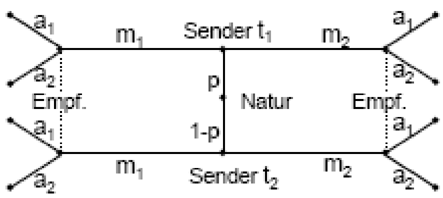
5 Ein Beispiele und weitere Anwendungen

5.1 Einführung in die Signalisierungsspiele

Um das zugrunde liegende Konzept möglichst einfach zu verdeutlichen und uns nicht in den Fesseln der Nomenklatur zu verfangen, wollen wir uns auf zwei Spieler beschränken.
Spieler 1 ist der Sender, *S*, und Spieler 2 ist der Empfänger, *R*. Der Empfänger weiß nicht, von welchem Typ der Sender ist. Demgegenüber ist der Typ des Empfängers allen bekannt. Der Sender kann Signale wählen, die der Empfänger beobachtet. Der Empfänger kann dann eine Aktion wählen.
Der Ablauf dieser Spiele ist also ganz allgemein gefasst wie folgt strukturiert:

1. Die Natur wählt den Typ des Senders: $t_i \in T = \{t_1, ..., t_l\}$ mit Wahrscheinlichkeit p(t_i)
2. Der Sender beobachtet den Typ und sendet ein Signal: $m_j \in M = \{m_1, ..., m_J\}$
3. Der Empfänger sieht das Signal, aktualisiert seine Einschätzung über den Typ des Senders und wählt dann eine Aktion $a_k \in A = \{a_1, ..., a_K\}$
4. Daraus resultieren folgende Auszahlungen: $U_S(t_i, m_j, a_k)$ und $U_R(t_i, m_j, a_k)$

Ein exemplarischer Spielbaum zu obiger Struktur, könnte wie folgt aussehen (l=J=K=2):



Für Signalisierungsspiele ist es nun möglich, die Anforderungen für ein perfektes Bayesianisches Gleichgewicht konkreter zu fassen. Die Entsprechungen der ersten drei Anforderungen sind:

i) R hat für jedes Signal m$\in M$ von S eine Wahrscheinlichkeitseinschätzung über die Typen t$\in T$ von S: $\mu(t \mid m)$

ii) $a^*(m)$ ist Lösung von $\max_{a \in A} \sum_{t \in T} u_R(m, a, t)\mu(t \mid m)$ und $m^*(t)$ Lösung von $\max_{m \in M} u_S(m, a^*(m), t)$

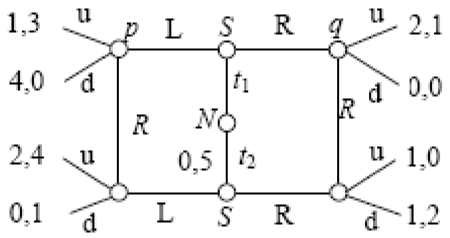
iii) Sei T(m)={t$\in T \mid m^*(t) =$ m}. Falls $\sum_{s \in T(m)} p(s) > 0$ gilt: $\mu(t \mid m) = \dfrac{p(t)}{\sum_{s \in T(m)} p(s)}$

Für die vierte Anforderung gibt es allerdings keine Entsprechung.
Hinweis: Für Botschaften, die gemäß der Gleichgewichtsstrategie nicht gesendet werden, ist das perfekte Bayesianische Gleichgewicht bezüglich der Einschätzungen nicht eindeutig. Jede Einschätzung der Typen ist für solche Botschaften im Gleichgewicht erlaubt.

> ***Definition:***
>
> Ein **perfektes Bayesianisches Gleichgewicht** eines Signalisierungsspiels in reinen Strategien besteht aus $a^*()$, $m^*()$, $\mu(t \mid m)$ mit den Eigenschaften i) bis iii).

5.2 Konkretes Beispiel

Um einen Eindruck von der möglichen Struktur von perfekten Bayesianischen Gleichgewichten zu bekommen, betrachten wir für den Rest des Abschnitts in einem ausführlichen Beispiel einen Spezialfall, in dem die Mengen *M, A* und *T* jeweils aus zwei Elementen bestehen. Der zugehörige Spielbaum sieht so aus:



Spielablauf:
Beide Typen des Spielers *S* können die Botschaft L oder R senden. Darauf kann der Empfänger *R* mit den Aktionen u oder d reagieren. Die a priori Verteilung weist beiden Typen dieselbe Wahrscheinlichkeit zu. Die Einschätzungen werden mit $p = \mu(t_1 \mid L)$ und $q = \mu(t_1 \mid R)$ abgekürzt.

Grundsätzlich kann der Spieler *S* seinen Typ dadurch verbergen, dass er für beide Typen die Botschaft L oder R sendet. Wir sprechen dann von einer **pooling Strategie**. Der Spieler *S* kann sich auch offenbaren, indem einer seiner Typen L und der andere R sendet. Dann sprechen wir von einer **trennenden (separating) Strategie**.

Welche Strategien des Spielers *S* können nun zu einem perfekten Bayesianischen Gleichgewicht gehören? Insgesamt gibt es 4 Strategiemöglichkeiten:

I) Pooling in L: beide Typen senden L
II) Pooling in R: beide Typen senden R
III) Separating 1: t_1 sendet L, t_2 sendet R,
IV) Separating 2: t_1 sendet R, t_2 sendet L,

Beginnen wir mit der ersten Möglichkeit **I)**:
Anforderung ii) des Bayesianischen Gleichgewichts macht es erforderlich, dass p = 0,5. Anforderung ii) verlangt dann, dass *R* immer u wählt, wenn er L beobachtet. In diesem Fall hat t_1 eine Auszahlung von 1 und t_2 eine Auszahlung von 2.

Kann einer der Typen dadurch gewinnen, dass er anstatt L R wählt? Es kommt offenbar darauf an, wie sich *R* verhält, wenn er R beobachtet. Wenn er mit u reagiert, stellt erhält t_1 nach einer Wahl von R 2 und t_2 erhält dann 1. Damit würde sich in diesem Fall t_1 besser stellen, wenn er R wählt.

Wenn *R* d wählt, würde nach einem Signal R t_1 0 und t_2 1 erhalten. In diesem Fall gibt es keinen Anreiz für die beiden Typen des Spielers *S* anstatt L R zu wählen. Damit also kein Typ von *S* einen Anreiz hat, R zu wählen, müsste gewährleistet sein, dass *R* d wählt, wenn er R beobachtet.

Es bleibt also zu klären, unter welchen Umständen *R* d wählt, wenn er R beobachtet. Die erwartete Auszahlung für die Alternative u ist:

$$q\,1 + (1 - q)\,0 = q$$

und für die Alternative d:

$$q\,0 + (1 - q)2 = 2 - 2q$$

Folglich ist die Alternative d besser solange

$$2 - 2q > q \Leftrightarrow q < 2/3.$$

Damit ist Fall **I)** konsistent mit einem perfekten Bayesianischen Gleichgewicht. Die Gleichgewichtsstrategie besteht daraus, dass beide Typen des Senders *S* L wählen, *R* u wählt, wenn er L beobachtet, und d wählt, wenn er R beobachtet. Für die Einschätzungen muss gelten: p = 0,5 und q muss kleiner oder gleich 2/3 sein.
Man beachte, dass die Anforderung ii) die möglichen gleichgewichtigen Einschätzungen q einschränkt, obwohl die Anforderung iii) nichts zu der Festlegung von q beiträgt (R liegt nicht auf dem Gleichgewichtspfad).

Betrachten wir den nächsten Fall **II)**:
In diesem Fall erfordert Anforderung iii) q = 0,5 In Fall I) haben wir schon argumentiert, dass *R* in diesem Fall d wählt, wenn er R beobachtet. Also erhält t_1 nach Botschaft R 0 und t_2 erhält dann 1.
Da *R* immer (unabhängig von p) u wählt, wenn er L beobachtet, würde t_1 nach Botschaft L 1 erhalten. Er stellt sich also gegenüber der Botschaft R besser, wenn er L wählt. Folglich kann R nicht Bestandteil eines perfekten Bayesianischen Gleichgewichts sein und wir können zum nächsten Fall übergehen.

III)
Anforderung iii) impliziert dann $p = 1$ und $q = 0$. Daraus folgt, dass *R* d wählt, wenn er R beobachtet, und u wählt, wenn er L beobachtet. Dann erhält t_1 nach Botschaft L 1 und t_2 erhält
nach Botschaft R ebenfalls 1. Dies ist im Widerspruch zu Anforderung ii) für den Typ t_2: Er würde nach Botschaft L die Auszahlung 2 erreichen. Folglich gibt es auch kein perfektes Bayesianisches Gleichgewicht im Fall III) und wir können den letzten Fall untersuchen.

IV)
Hier erfordert Anforderung iii) $p = 0$ und $q = 1$. Dies impliziert, dass *R* immer (unabhängig von der Beobachtung L oder R immer u wählt. Beide Typen des Spielers *S* erhalten dann 2. Würde t_1 die Botschaft L senden, würde er nur 1 erhalten. Würde t_2 die Botschaft R senden, würde er ebenfalls nur 1 erhalten. Folglich sind die Strategien, t_1 sendet R und t_2 sendet L, *R* wählt immer u, und die Einschätzungen $p = 0$ und $q = 1$ ein perfektes Bayesianisches Gleichgewicht.

Mit diesem Beispiel wird klar, dass Signalisierungsspiele mehrere Gleichgewichte haben können. Sie können auch von unterschiedlichem Typ sein. Hier haben wir sowohl ein Gleichgewicht in pooling Strategien (ein **pooling Gleichgewicht**) als auch ein Gleichgewicht in trennenden Strategien (ein **separating Gleichgewicht**).
Bei mehr als zwei Typen können auch noch weitere Mischformen vorkommen. Manche Typen des Spielers *S* können im Gleichgewicht eine pooling Strategie und andere trennende Strategien aufweisen. In diesem Fall würde man von einem **partiellen pooling Gleichgewicht** sprechen. Falls auch gemischte Strategien zugelassen werden und dies Gleichgewichtsstrategien sind wird von **hybriden Gleichgewichten** gesprochen.

<u>Bemerkung:</u>
In dem pooling Gleichgewicht des obigen Beispiels fällt auf, dass die Einschätzungen zwar nicht völlig frei aber zu einem beträchtlichen Ausmaß willkürlich gewählt werden können, wenn sie sich auf eine Informationsmenge beziehen, die nicht auf dem Gleichgewichtspfad liegen. Dies hat für manche Anwendungen zur Folge, dass es sehr viele Gleichgewichte geben kann. Plausible Verfeinerungen des perfekten Bayesianischen Gleichgewichts findet man in den Signalisierungsspielen von Spence beispielsweise „Ausbildung als Signal“ (Gedanke: Signale verursachen Kosten) bzw. in Zusammenhang mit den bereits angesprochen sequentiellen Gleichgewichten.

5.3 Weitere Anwendungsbereiche von Bayes-Spielen

Im Kontext von Bayes-Spielen, insbesondere Signalisierungsspielen, hätten hier genauso gut Themen wie

- „Cheap Talk", also Signale die keine Kosten verursachen,
- das Prinzip der Vorwärtsinduktion
- Geldpolitik der Zentralbank
- Versicherungsbetrug
- Auktionen, wie zum Beispiel bei Ebay
- Bewertungsvorgänge von Käufern und Verkäufern bei Ebay
- Arbeitsmarktpolitik vor Wahlen,
- Werbung als Signal
- etc.

angesprochen werden können. Allerdings hätte dies sowohl den Zeitrahmen als auch die Themenbegrenzung gesprengt und nicht zuletzt voraussichtlich zu viele Berührpunkte mit den anderen Projekten aufgewiesen.

An dieser Stelle wollen wir auf andere Projekte verweisen, die mit den von uns zusammengetragenen Ergebnissen weiter arbeiten werden und hoffentlich vertieft auf die oben genannten Anwendungsmöglichkeiten eingehen.

Solche Projekte könnten zum Beispiel wie folgt lauten:

- Auktionen
- Signalisierungsspiele
- Spieltheorie und politische Konflikte
- Risikomanagement in der Altersvorsorge

Links zu den jeweiligen Projekten finden sich auf der Homepage zur Wikiludia.