16. Kurvenintegrale und der Satz von Stokes

16.1. Kurvenintegrale

Generalvoraussetzung: $I \subseteq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall
$\varkappa : I \to \mathbb{R}^d$ C^1-Kurve mit
C^1-Kurvenbogen $\Gamma_\varkappa =: \Gamma$

16.1. Definition

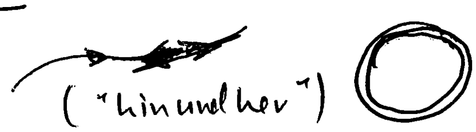
- Sei $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}^d \cap \Gamma$-messbares Skalarfeld mit $(f \circ \varkappa)|\varkappa'| \in L^1(I)$

  Kurvenintegral (für Skalarfeld)
$$\int_\varkappa f(x)\,dx := \int_I f(\varkappa(t))\,|\varkappa'(t)|\,dt$$
- Sei $A : \Gamma \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{B}^d \cap \Gamma$ messbares Vektorfeld mit $(A \circ \varkappa) \cdot \varkappa' \in L^1(I)$

  Kurvenintegral (für Vektorfelder)
$$\int_\varkappa A(x) \cdot dx := \int_I A(\varkappa(t)) \cdot \varkappa'(t)\,dt$$
- C^1-Kurve $\varkappa$ geschlossen $:\Leftrightarrow \varkappa(\min I) = \varkappa(\max I)$

  In diesem Fall auch übliche Notation:
$$\oint_\varkappa f(x)\,dx \quad , \quad \oint_\varkappa A(x) \cdot dx$$

16.2. Bemerkung: (a) $\varkappa$ nicht injektiv $\Rightarrow$ (Teile von) Γ u.U. mehrfach durchlaufen:



(b) Falls $\varkappa(I) = \Gamma$ 1-dim C^1-Mfkt und $\exists$ Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}$ mit $\varkappa : I \setminus N \to \Gamma$ Karte
$$\Rightarrow \int_\varkappa f(x)\,dx = \int_\Gamma f(x)\,dx \quad \text{(nach 15.22)}$$

[Bsp.: $\Gamma = S^1$, $\kappa: [0,2\pi] \to S^1$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$]

$\boxed{\text{Von nun an gelte}}$: Alle Kurven, bis auf eine Nullmenge, injektiv!

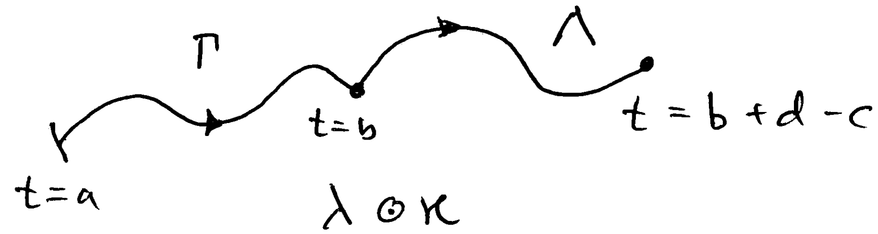
$\boxed{\text{16.3. Definition}}$ • für $\kappa: [a,b] \to \Gamma$ C^1-Kurve

sei $\kappa^-: [a,b] \to \Gamma$ (C^1-Kurve)
$t \mapsto \kappa(b+a-t)$ (κ rückwärts durchlaufen)

• Sei $\lambda: [c,d] \to \mathbb{R}^d$ C^1-Kurve mit C^1-Kurvenbogen Λ mit $\kappa(b) = \lambda(c)$

$$\lambda \odot \kappa: [a, b+(d-c)] \to \Gamma \cup \Lambda$$
$$t \mapsto \begin{cases} \kappa(t), & t \in [a,b] \\ \lambda(t-b+c), & t \in]b, b+d-c] \end{cases}$$

Aneinander-Kettung von κ und λ



• κ stückweise C^1-Kurve $:\Leftrightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N}$ und $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ C^1-Kurven mit
$$\kappa = \kappa_n \odot \dots \odot \kappa_1$$

• seien κ, λ C^1-Kurven wie oben und $f: \Gamma \cup \Lambda \to \mathbb{R}$ messbar

Setze
$$\int_{\lambda \odot \kappa} f(x)\,dx := \int_{\lambda} f(x)\,dx + \int_{\kappa} f(x)\,dx$$

falls beide Integrale auf rechter Seite existieren

- analog für Vektorfelder (siehe 16.1)
- falls $\lambda \odot \kappa$ sogar C^1-Kurve, dann im Einklang mit Def. 16.1.

16.4 Lemma Sei $\kappa : I \to \Gamma$ eine stückweise C^1-Kurve.
Sei $\tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$ kpt.'es Intervall, sei $\varphi : I \to \tilde{I}$ ein Homöomorphismus, der auf $\mathring{I}$ & $\mathring{\tilde{I}}$ (Inneren) ein Diffeom. ist.
Dann ist $\tilde{\kappa} := \kappa \circ \varphi^{-1}$ stückweise C^1-Kurve mit $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ und für alle messbaren Skalarfelder $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ und alle messbaren Vektorfelder $A : \Gamma \to \mathbb{R}^d$ gilt

$$\int_\kappa f(x)\,dx = \int_{\tilde{\kappa}} f(x)\,dx \quad \text{(falls eine Seite exist.)}$$

$$\int_\kappa A(x) \cdot dx = \sigma \int_{\tilde{\kappa}} A(x) \cdot dx \quad \text{(falls eine Seite exist.)}$$

wobei $\sigma := \operatorname{sgn} \varphi'(t)$ (unabh. von $t \in \mathring{I}$)

Insbesondere:
$$\int_\kappa A(x) \cdot dx = -\int_{\kappa^-} A(x) \cdot dx$$

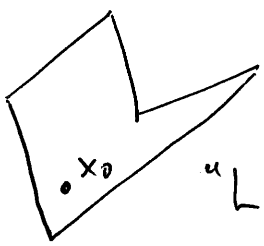
(abhängig von Richtung, in der Γ durchlaufen)

Beweis: • benutze $\kappa'(t) = \tilde{\kappa}'(\varphi(t))\,\varphi'(t) \quad \forall t \in \mathring{I}$
& Substitutionsformel, falls κ C^1-Kurve
• im allg. Fall, zerlege zuerst in C^1-Kurven κ_ν, $\nu = 1, \dots, n$ ■

16.5. Definition Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$

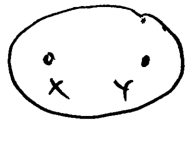
B sternförmig (bzgl. $x_0 \in \mathbb{R}^d$) $:\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in B : \forall x \in B \text{ gilt} \\ \{x_0 + \tau(x - x_0) : \tau \in [0,1]\} \subseteq B \end{cases}$

Geradenstück von x_0 nach x



"Lehrer sieht alle"

($\Leftarrow$ "jeder sieht jeden": Konvex



)

16.6. Satz (über Gradientenfelder)

Für $B \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $A \in C^1(B; \mathbb{R}^d)$ Vektorfeld betrachte die Aussagen:

(i) $\forall$ geschlossenen stückweisen C^1-Kurve κ mit $\Gamma \subseteq B$ gilt
$$\oint_\kappa A(x) \cdot dx = 0$$

(ii) $\forall$ stückweisen C^1-Kurven κ und $\tilde{\kappa}$ mit $\Gamma \subseteq B$, $\tilde{\Gamma} \subseteq B$ und $\kappa\left(\begin{smallmatrix}\max\\ \min\end{smallmatrix} I\right) = \tilde{\kappa}\left(\begin{smallmatrix}\max\\ \min\end{smallmatrix} \tilde{I}\right)$ (gleiche Anfangs- und Endpunkt) gilt

$$\int_\kappa A(x) \cdot dx = \int_{\tilde{\kappa}} A(x) \cdot dx \qquad \text{Wegunabhängigkeit}$$

(iii) A ist ein Gradientenfeld (oder: konservativ), d.h. $\exists f \in C^2(B; \mathbb{R})$ mit $A = \nabla f$ (A besitzt Potential f)

(iv) Es gelten die Integrabilitätsbedingungen
$$\frac{\partial A_j}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad \forall j,k \in \{1, \dots, d\}$$

Dann gilt: $\quad$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv)

Falls B zusätzlich sternförmig, so gilt auch

(iv) $\Rightarrow$ (iii) [Lemma von Poincaré]

16.7. Bemerkung

(a) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) gilt auch, falls A nur $\in C(B;\mathbb{R}^d)$.
In dem Fall ist dann $f \in C^1(B;\mathbb{R})$.

(b) (iv) bedeutet in $d=3$: $\nabla \times A = 0$, d.h. A wirbelfrei (s. 8.4)

(c) Die Vorauss. „B sternförmig" für (iv) $\Rightarrow$ (iii) kann abgeschwächt, aber nicht weggelassen werden!

Beweis von Satz 16.6: (i) $\Rightarrow$ (ii): da $\tilde{\kappa} - \oplus \kappa$ geschlossene stückweise C^1-Kurve (verwende Lem. 16.4). ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Definiere Äquiv.rel. $\sim$ auf B: $\forall x,y \in B$ sei

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists \kappa : I \to B \text{ stückweise } C^1\text{-Kurve mit } \kappa(\min I) = x \ \&\ \kappa(\max I) = y$$

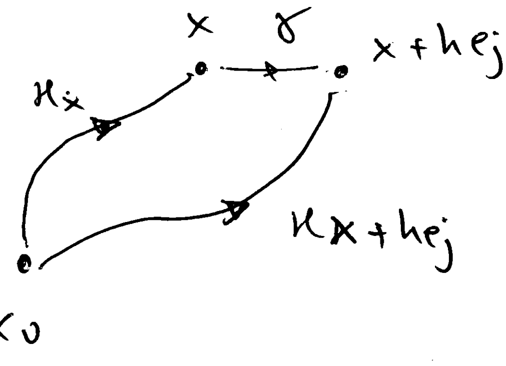
Äquiv.klassen $[x] := \{y \in B : y \sim x\}$ heißt die
Wegzusammenhangskomponente von $x \in B$
(siehe dazu später) - es gilt $B = \dot{\bigcup}_{[x] \in B/\sim} [x]$

1. Schritt: B sei wegzusammenhängend, d.h. $\exists y \in B : B = [y]$
(d.h. $\forall x,y \in B$: $x \sim y$). (*)

Fixiere $x_0 \in B$, sei $x \in B$ bel. fest,
und $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ klein, so $B_{|h|}(x) \subseteq B$ (B offen!).

Wähle κ_x, bzw. κ_{x+he_j} C^1-Kurve von x_0 nach x, bzw. $x + he_j$, $j \in \{1,..,d\}$
↑ j'ter Einheitsvektor

(möglich wegen (*))



Sei $\gamma : \begin{array}{l} [0,1] \to B \\ t \mapsto x + the_j \end{array}$

Setze $\quad f(x) := \int_{K_x} A(y) \bullet dy \quad (x \in B)$

(wohldef: nur von x abh. (und fixe x_0), nicht aber von Wahl von K_x – per Annahme (ii)!).

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\left[f(x+he_j) - f(x)\right] = \frac{1}{h}\underbrace{\left[\int_{K_{x+he_j}} A(y)\bullet dy - \int_{K_x} A(y)\bullet dy\right]}_{\underbrace{\int_{K_{x+he_j} \odot K_x^-} A(y)\bullet dy}_{\int_\gamma A(y)\bullet dy}}$$

u. V. (ii) (siehe Bild)

Def γ & Def 16.1

$$\downarrow$$

$$= \int_0^1 \underbrace{A(x+the_j)\bullet e_j}_{A_j(x+the_j)}\, dt \overset{\text{Mittelwertsatz}}{=} A_j(x + \Theta_h e_j)$$

mit $\Theta_h \in [0,h]$

$\xrightarrow{h\to 0} A_j(x)$, also $\nabla f = A$.

Da $A \in C^1(B; \mathbb{R}^d)$ ist $f \in C^2(B; \mathbb{R})$.

2. Schritt: Falls B nicht wegzusammenhängend, zerlege in Wegzusammenhangskomponenten $B = \dot{\bigcup}_{[x] \in B/\sim} [x]$

und definiere f separat auf allen $[x] := \{y \in B : y \sim x\} \in B/\sim$ wie in 1. Schritt (NB.: $[x]$ offen in $\mathbb{R}^d$, da

$B_\varepsilon(y) \subseteq [x] \;\; \forall y \in [x]$ und $\varepsilon > 0$

so klein, dass $B_\varepsilon(y) \subseteq B$). ✓

„(iii) ⇒ (i)": Sei $\kappa = \kappa_n \oplus \dots \oplus \kappa_1 : I \to B$ geschlossene stückweise C^1-Kurve, wobei $\kappa_\nu : I_\nu \to B$, $\nu = 1, \dots, n$, C^1-Kurven mit $\kappa_\nu(\max I_\nu) = \kappa_{\nu+1}(\min I_{\nu+1})$ für $\nu = 1, \dots, n-1$ und $\kappa_n(\max I_n) = \kappa_1(\min I_1)$

$$\Rightarrow \oint_\kappa (\nabla f)(x) \cdot dx \underset{\text{per Def.}}{=} \sum_{\nu=1}^n \int_{\kappa_\nu} (\nabla f)(x) \cdot dx$$

$$= \sum_{\nu=1}^n \int_{I_\nu} \underbrace{(\nabla f)(\kappa_\nu(t)) \cdot \kappa_\nu'(t)}_{\frac{d}{dt} f(\kappa_\nu(t))} dt = \sum_{\nu=1}^n \left[f(\kappa_\nu(\max I_\nu)) - f(\kappa_\nu(\min I_\nu)) \right]$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

„(iii) ⇒ (iv)": Satz von Schwarz (Satz 8.8) über Vertauschbarkeit 2. partieller Ableitungen.

„(iv) ⇒ (iii)": Sei B auch sternförmig; o.E. sei $x_0 = 0$ der zugeh. Punkt für die Verbindungsstrecken.

Für $x \in B$ setze

$$f(x) := \sum_{k=1}^d x_k \int_0^1 A_k(\underset{\substack{\in \\ B}}{tx}) \, dt \quad \forall t \in [0,1] \text{ da sternf.} \Rightarrow \text{wohldef.!}$$

$A \in C^1(B; \mathbb{R}^d) \Rightarrow f \in C^1(B; \mathbb{R})$ mit Satz 12.48 (b) („Diff.barkeit von Param.-Int")

(exist. Majorante aus Beschränktheit 1. part. Abl. von A auf Kompakta (da stetig))

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 A_j(tx) \, dt + \sum_{k=1}^d x_k \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 A_k(tx) \, dt \, ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 A_k(tx) \, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j} [A_k(tx)] \, dt = \int_0^1 t \frac{\partial A_k}{\partial x_j}(tx) \, dt$$

Da $\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_k}$ $\forall j,k \in \{1,\dots,d\}$ n. V., folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \underbrace{\Big[A_j(tx) + t \underbrace{\sum_{k=1}^{d} x_k \frac{\partial A_j}{\partial x_k}(tx)}_{\frac{d}{dt}[A_j(tx)]}\Big]}_{\frac{d}{dt}(t A_j(tx))} dt = t A_j(tx)\Big|_0^1 = A_j(x) \checkmark$$

Da $A \in C^1(B;\mathbb{R}^d) \Rightarrow f \in C^2(B;\mathbb{R})$ ✓ ∎

16.8 Bemerkung: Zur "Wegzusammenhangskomponente (von $x \in B$)":

Man kann zeigen (!): Für $B \subseteq \mathbb{R}^d$ offen gilt:

$x \sim y :\Leftrightarrow \exists$ stückweise C^1-Kurve von x nach y

$\overset{!}{\Leftrightarrow} \exists\, C^0$-Kurve von x nach y

("⇒" trivial). ↑ "Weg"

16.2. Orientierte Hyperflächen mit Rand

16.9. Definition Sei M n-dim. C^1-Mfkt. in $\mathbb{R}^d$

- Seien $\varphi, \tilde{\varphi}$ zwei überlappende Karten von M, d.h. $V := \varphi(T) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{T}) \neq \emptyset$. Sei $W := \varphi^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\psi : W \to \tilde{W}$ Diffeom., so dass $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$ (exist. nach Satz 15.6(b))

$$\varphi, \tilde{\varphi} \left\{ \begin{array}{c} \text{gleich} \\ \text{gegensätzlich} \end{array} \right\} \text{orientiert} :\Leftrightarrow \det(D\psi)(t) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0 \quad \forall t \in W$$

- $\mathcal{A}$ orientierter Atlas von M :⇔ je 2 überlappende Karten von $\mathcal{A}$ sind gleich orientiert

- zwei orientierte Atlanten $\mathcal{A}$ & $\mathcal{A}'$ von M sind gleichorientiert :⇔ $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ ist orientiertes Atlas

- M ist orientierbar :⇔ $\mathcal{O} := \{\text{Mengen der orientierten Atlanten von } M\} \neq \emptyset$

"Gleichorientierung" def. Äquiv. relation $\sim$ auf $\mathcal{O}$ (wenn M orientierbar)

$\sigma \in \mathcal{O}/_\sim$ heißt Orientierung von M

(M, σ) : orientierte Mfkt

16.10. Beispiel $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ orientierbare Mfkt. im $\mathbb{R}^2$

orientiertes Atlas $\mathcal{A} = \{\varphi, \tilde{\varphi}\}$,

$$\varphi : \begin{array}{l}]0,2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \tilde{\varphi} : \begin{array}{l}]-\pi,\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \tilde{t} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos \tilde{t} \\ \sin \tilde{t} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\psi :]0,2\pi[\to]-\pi,\pi[;\ t \mapsto \psi(t) := t - \pi \Rightarrow \psi'(t) = 1 > 0\ \forall t$

Außerdem: $\tilde{\varphi}_- : \begin{array}{l}]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 \\ \tilde{t} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \tilde{t} \\ -\sin \tilde{t} \end{pmatrix} \end{array}$ gegensätzlich orientiert zu $\tilde{\varphi}$, als auch φ ($\psi(t) = -t$, bzw. $\psi(t) = \pi - t$)

Hier: $\operatorname{card}(\mathcal{O}/_\sim) = 2$ - es gibt 2 Orientierungen von S^1
(Falls > 2 Orientierungen existieren $\Rightarrow M$ nicht zusammenhängend).

$\boxed{\text{16.11. Definition}}$ (Orientierung von Tangentialräumen).

(a) Basis $\{v_1, .., v_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ positiv (bzw. negativ) orientiert (bzgl. kanon. Basis $\{e_1, .., e_n\}$) $:\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} > 0$ (bzw. < 0)

(b) Sei (M, σ) orient. Mfkt., $a \in M$, $\{\tau_1, .., \tau_n\}$ Basis von T_aM, und φ zu σ gleichorientierte Karte von M (d.h. für $\mathcal{A} \in \sigma$ gilt: $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ orient. Atlas von M), mit $a \in \varphi(T)$

$\{\tau_1, .., \tau_n\}$ pos. orientiert (bzgl. σ) $:\Leftrightarrow$ $\exists$ pos. orient. Basis $\{v_1, .., v_n\}$ in $\mathbb{R}^n$: $\tau_j = (D\varphi)(\varphi^{-1}(a))\, v_j$ für $j = 1, .., n$

Insbesondere: $\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\varphi^{-1}(a)), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_n}(\varphi^{-1}(a)) \right\}$ ist

pos. orient. Basis von $T_a M$ (wähle $v_j = e_j$)

16.12. Lemma Def. 16.11 (b) ist unabh. von Wahl der gleichorientierten Karte φ mit $\varphi(T) \ni a$.

Beweis: Sei $\tilde{\varphi}$ eine weitere solche Karte mit $\tilde{\varphi}(\tilde{T}) \ni a$.

$\Rightarrow \varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$ mit $\det((D\psi)(t)) > 0 \quad \forall t \in W$

(siehe Def. 16.9). Setze $\tilde{v}_j := (D\psi)(\varphi^{-1}(a))\, v_j$, $j = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \tau_j = (D(\underbrace{\tilde{\varphi} \circ \psi}_{\varphi}))(\varphi^{-1}(a))\, v_j = (D\tilde{\varphi})(\underbrace{\psi \circ \varphi^{-1}(a)}_{\tilde{\varphi}^{-1}(a)}) \underbrace{(D\psi)(\varphi^{-1}(a))\, v_j}_{\tilde{v}_j}$$

$$= (D\tilde{\varphi})(\tilde{\varphi}^{-1}(a))\, \tilde{v}_j$$

und
$$\det \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{\underbrace{(D\psi)(\varphi^{-1}(a))}_{\det > 0} \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{\det > 0}} > 0 \quad - \quad \text{also } \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$$

pos. orient. Basis von $\mathbb{R}^n$

$\blacksquare$

16.13. Definition Sei $\underline{d \geq 2}$.

(a) $M \subseteq \mathbb{R}^d$ <u>Hyperfläche</u> $:\Leftrightarrow$ M $(d-1)$-dim. C^1-Mfkt. in $\mathbb{R}^d$

[Nach Satz 15.8: M (lokal) beschrieben als Lösungsmenge <u>einer</u> Gleichung; es gilt

$\dim N_a M = 1$ (Satz 15.11 (b))]

(b) ν ist <u>Einheitsnormalenfeld</u> (von Hyperfläche M) $:\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \nu : M \to \mathbb{R}^d \\ M \ni a \mapsto \nu(a) \in \left\{ \dfrac{\pm (\nabla f)(a)}{|(\nabla f)(a)|} \right\} \\ \text{(lokal; mit } f \text{ eine Funktion, deren Nullstellenmenge } M \text{ ist)} \end{cases}$

(c) Sei (M, σ) orientierte Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$ mit Einheitsnormalenfeld ν:

ν <u>positiv orientiert bzgl. σ</u> $:\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} \forall a \in M \ \exists \text{ eine bzgl. } \sigma \text{ pos. orient.} \\ \text{Basis } \{\tau_1^{(a)}, \dots, \tau_{d-1}^{(a)}\} \text{ von } T_a M, \\ \text{so dass } \{\nu(a), \tau_1^{(a)}, \dots, \tau_{d-1}^{(a)}\} \\ \text{eine pos. orient. Basis in } \mathbb{R}^d \text{ ist.} \end{cases}$

16.14. Lemma Def. 16.13(c) ist unabh. von <u>Wahl</u> der bzgl. σ pos. orient. Basis $\{\tau_1^{(a)}, \dots, \tau_{d-1}^{(a)}\}$ von $T_a M$

<u>Beweis</u>: Sei $\{\tilde{\tau}_1^{(a)}, \dots, \tilde{\tau}_{d-1}^{(a)}\}$ eine weitere solche Basis (bzgl. σ pos. orient. Basis von $T_a M$)

$\Rightarrow (*)\ \tau_j^{(a)} = (D\varphi)(\varphi^{-1}(a))\, v_j, \quad \tilde{\tau}_j^{(a)} = (D\varphi)(\varphi^{-1}a)\, \tilde{v}_j, \quad j = 1, \dots, d-1,$

mit $\{v_1, \dots, v_{d-1}\}$, $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{d-1}\}$ je eine pos. orient. Basis $\mathbb{R}^{d-1}$

$\Rightarrow \exists\, A \in \mathrm{Mat}((d-1)\times(d-1); \mathbb{R}) : \tilde{v}_j = A v_j,\ j = 1, \dots, d-1$ (Basiswechsel)

Da $$0 < \det \begin{pmatrix} | & & | \\ \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix} = \det(A) \underbrace{\det \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix}}_{>0}$$

$\Rightarrow \quad \det(A) > 0.$

In Basis $\{\nu(a), \tau_1^{(a)}, \dots, \tau_{d-1}^{(a)}\}$ von $\mathbb{R}^d$ $(= N_a M \oplus T_a M,\ N_a M \perp T_a M)$

hat $(D\varphi)(\varphi^{-1}(a))$ Matrixdarstellung:

$$(**)\quad (D\varphi)(\varphi^{-1}(a)) = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ \hline F \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}\,(d \times (d-1), \mathbb{R})$$

mit $F \in \mathrm{Mat}\,((d-1)\times(d-1); \mathbb{R})$. In gleicher Basis:

$$\det\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \nu(a) & \tilde{\tau}_1^{(a)} & \cdots & \tilde{\tau}_{d-1}^{(a)} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{wegen } (*) \\ \& (**)}}{=} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & F\begin{pmatrix} | & & | \\ \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$= \det\left(FA\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\det\left(F\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix}\right)}_{\det\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \nu(a) & \tau_1^{(a)} & \cdots & \tau_{d-1}^{(a)} \\ | & | & & | \end{pmatrix} > 0} \cdot \underbrace{\det A}_{>0} > 0 \qquad \boxtimes$$

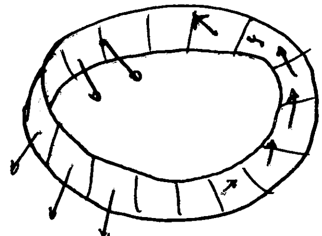
$\boxed{\text{16.15. Satz}}$ Sei $d \geq 2$ und (M, σ) eine orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^d$. Dann $\exists!$ Einheits-Normalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^d$ mit <u>pos.</u> Orient. bzgl. σ. Zudem ist ν stetig

---

16.16. <u>Bemerkung</u>: Es gilt auch die Umkehrung von Satz 16.15: $\exists$ stetiges Einheitsnormalenfeld für Hyperfläche $M \Rightarrow M$ orientierbar.

Man kann also dies als <u>Def.</u> der Orientierbarkeit von <u>Hyperflächen</u> verwenden!

16.17. Beispiel: Möbius-Band M



ist Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$, aber nicht orientierbar, da $\nexists$ stetiges Einheitsnormalenfeld (siehe Forster Bsp. 20.6 p. 274 (8. Auflage))

Beweis Satz 16.15: • Existenz: aus Def. 16.13 klar.

• Eindeutigkeit: Sei $a \in M$ und $\{\tau_1, \dots, \tau_{d-1}\}$ pos. orient. Basis von $T_a M$ bzgl. σ.

Sei $\xi \in \{\pm 1\} \Rightarrow \det\left(\xi (\nabla f)(a) \;\; \tau_1 \dots \tau_{d-1}\right) > 0$

für entweder $\xi = +1$ oder $\xi = -1$

• Stetigkeit: Sei $a \in M$, $U \ni a$ offene Umgebung im $\mathbb{R}^d$ und $f \in C^1(U; \mathbb{R})$ mit $V := M \cap U = \{x \in U : f(x) = 0\}$ (NB: ex. nach Satz 15.8); zudem $(\nabla f)(a) \neq 0$

$\Rightarrow (\nabla f)(x) \neq 0 \;\; \forall x \in V$, falls U hinreichend klein, da $f \in C^1$.

Setze $\tilde{\nu}(x) := \dfrac{(\nabla f)(x)}{|(\nabla f)(x)|}$, $x \in V \Rightarrow V \ni x \mapsto \tilde{\nu}(x)$ stetig!

Sei $\nu : M \to \mathbb{R}^d$ das eindeutige Einheitsnormalenfeld (mit pos. Orient. bzgl. σ)

o.E. gelte $\tilde{\nu}(a) = \nu(a)$ [sonst $f \to -f$]

Sei $\varphi : T \to V$ Karte von M

$$\Rightarrow T \ni t \mapsto h(t) := \det\left(\tilde{\nu}(\varphi(t)) \;\; \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) \; \dots \; \frac{\partial \varphi}{\partial t_{d-1}}(t)\right)$$

ist stetig, und $h(\varphi^{-1}(a)) > 0$

$\tilde{\nu}(a) = \nu(a)$ & ν pos. orient. bzgl. σ

h stetig
$\Rightarrow \quad \exists\, \varepsilon > 0 : h(t) > 0 \quad \forall t \in B_\varepsilon^{(d-1)}(\varphi^{-1}(a)) =: T_0$

$\Rightarrow \quad \tilde{\nu}(x) = \nu(x) \quad \forall x \in \underbrace{\varphi(T_0)}_{} \subseteq V$

offene Umgeb. (in M) von a ∎

$\tilde{\nu}$ stetig in a
$\Rightarrow \quad \nu$ stetig in a

16.18 Lemma Sei (M, σ) orient. Hyperfläche in $\underline{d = 3}$ (d.h. $\dim \underline{M = 2}$), sei $a \in M$, und $\nu(a)$ der bzgl. σ pos. orient. Einheitsnormalenvektor in a.
Dann gilt, für eine Basis $\{\tau_1, \tau_2\}$ von $T_a M$:

$$\left.\begin{array}{c}\{\tau_1, \tau_2\} \text{ pos. orient.} \\ \text{Basis bzgl. } \sigma\end{array}\right\} \Leftrightarrow \nu(a) = \frac{\tau_1 \times \tau_2}{|\tau_1 \times \tau_2|}$$

(für "$\times$", siehe 8.4)

Beweis: Da $0 \neq \tau_1 \times \tau_2 \perp \operatorname{span}(\tau_1, \tau_2) = T_a M$ und $\dim N_a M = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu(a) = \pm \frac{\tau_1 \times \tau_2}{|\tau_1 \times \tau_2|}$

pos. orient. $\Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \nu(a) & \tau_1 & \tau_2 \\ | & | & | \end{pmatrix} > 0$

$\Rightarrow$ es muss "+" gelten, da

$$\det(\tau_1 \times \tau_2 | \tau_1 | \tau_2) = (\det \underset{SO(3)}{R}) \cdot \det(\tau_1 \times \tau_2 | \tau_1 | \tau_2) \quad (\forall R \in SO(3))$$

$$= \det(\underbrace{R\tau_1}_{=:\hat{\tau}_1} \times \underbrace{R\tau_2}_{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|\tau_2|} \,|\, \underbrace{R\tau_1}_{\hat{\tau}_1} \,|\, \underbrace{R\tau_2}_{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|\tau_2|})$$

wähle $R \in SO(3)$, so dass $R\tau_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|\tau_2|$

$$= |\tau_2|^2 \det\begin{pmatrix} \hat{\tau}_{1,2} & \hat{\tau}_{1,1} & 0 \\ -\hat{\tau}_{1,1} & \hat{\tau}_{1,2} & 0 \\ 0 & \hat{\tau}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \hat{\tau}_{1,2} & \hat{\tau}_{1,1} \\ -\hat{\tau}_{1,1} & \hat{\tau}_{1,2} \end{pmatrix} \times |\tau_2|^2$$

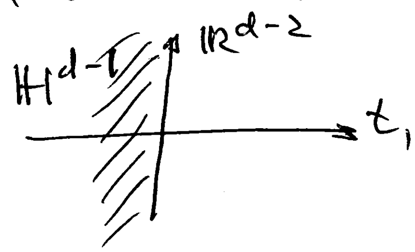
$$= |\tau_2|^2 (\hat{\tau}_{1,2}^2 + \hat{\tau}_{1,1}^2) > 0$$

∎

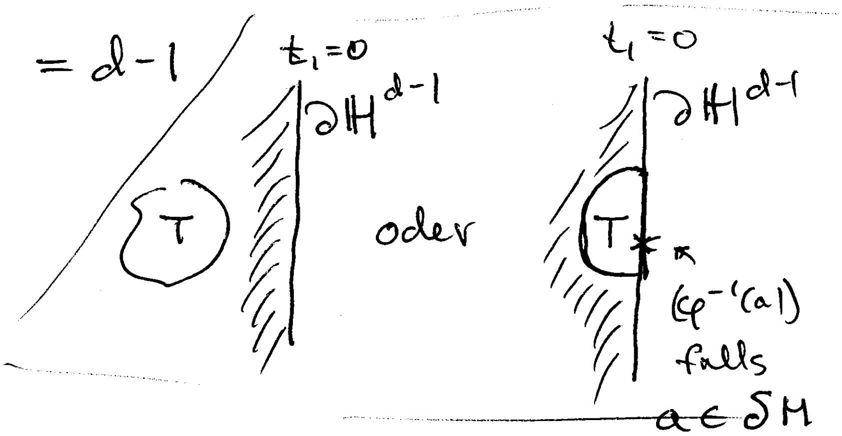
16.19. Definition Sei $d \geq 2$

(a) M Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$ mit C^1-Rand $:\Longleftrightarrow$

$\forall a \in M \; \exists V \subseteq M$ offen in Relativtop. auf M mit $a \in V$ und lokale Karte $\varphi : T \to V$ mit



- T offen in $\mathbb{H}^{d-1} := \{t \in \mathbb{R}^{d-1} : t_1 \leq 0\}$ (in Rel.top.).
- φ Homöomorphismus.
- φ stetig diff.bar (falls $t_1 = 0$ nur linksseitige $\frac{\partial}{\partial t_1}$)
- $\text{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t)\right)_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 1 \leq k \leq d-1}} = d-1$



(b) $a \in M$ Randpkt. von M

$:\Longleftrightarrow \exists$ Karte $\varphi : T \to V \ni a$ mit $(\varphi^{-1}(a))_1 = 0$

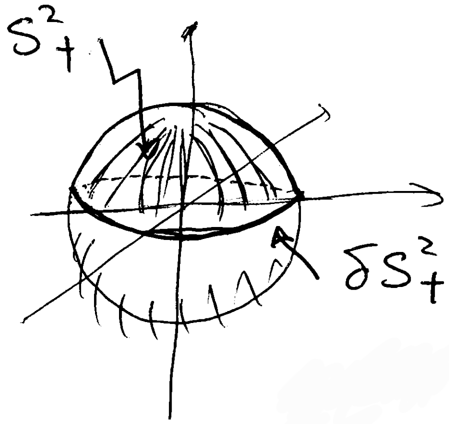
$\delta M := \{a \in M : a \text{ ist Randpkt. von } M\}$

Rand von M

Achtung: $\delta M \neq \partial M = M$

topol. Rand in $\mathbb{R}^d$

16.20. Beispiel: Halbsphäre im $\mathbb{R}^3$



$S^2_+ := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1 \text{ und } x_3 \geq 0\}$

$\delta S^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1 \text{ und } x_3 = 0\}$

(δS^2_+ 1-dim C^1-Mfkt. im $\mathbb{R}^3$)

16.21. Satz Sei $d \geq 3$ und M Hyperfläche im $\mathbb{R}^d$ mit C^1-Rand. Dann ist δM eine $(d-2)$ dim. C^1-Mfkt im $\mathbb{R}^d$

Beweis: Sei φ Karte von M mit $T \cap \partial \mathbb{H}^{d-1} \neq \phi$
(d.h. $\varphi(T)$ überdeckt Teile von δM)
$\beta := \varphi|_{T \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}}$ ist Karte von δM ☒

16.22. Lemma Sei $d \geq 3$ und (M, σ) orient. Hyperfläche mit C^1-Rand im $\mathbb{R}^d$. Sei $\mathcal{A} := \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \sigma$ orient. Atlas und $\beta_\alpha := \varphi_\alpha|_{T_\alpha \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}}$ wie im Bew. von Satz 16.21.
Dann ist $\mathcal{A}_\delta := \{\beta_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N} : T_\alpha \cap \partial \mathbb{H}^{d-1} \neq \phi}$
ein orient. Atlas von δM und (seine Äquiv. klas. von Atlanten) def. die <u>induzierte Orientierung</u> σ_δ von δM

<u>Beweis</u>: Sei $\varphi, \tilde{\varphi}$ zwei (auf δM überlappende) Karten von M, sei $W := \varphi^{-1}(\varphi(T) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{T}))$, $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(T) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{T}))$ und $\psi := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : W \to \tilde{W}$ Diffeom. (siehe Satz 15.6(b)).

$\psi(W \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}) \subseteq \tilde{T} \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}$

$\Rightarrow \psi_\delta := \tilde{\beta}^{-1} \circ \beta : W \cap \partial \mathbb{H}^{d-1} \to \tilde{W} \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}$ ist <u>Diffeom</u>

und, $\forall t = (0, \underset{\uparrow \mathbb{R}^{d-2}}{\hat{t}}) \in W \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}$:

$$(D\psi)(0,\hat{t}) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & 0 \cdots 0 \\ \hline * & (D\psi_\delta)(\hat{t}) \end{array}\right)$$

wobei $\gamma > 0$. Es folgt
$\varphi, \tilde{\varphi}$ gleichorient.
$\Leftrightarrow \beta, \tilde{\beta}$ gleichorient. ☒

16.3. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Das Kurvenintegral für Vektorfelder in der Sprache von orientierten (1-dim) Mfkt'en.:

16.23. Definition Sei (M, σ) 1-dim. orientierte C^1-Mfkt. im $\mathbb{R}^d$, sei $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : T_\alpha \subseteq \mathbb{R} \to V_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \sigma$ ein zugeh. orient. Atlas von M. Sei $F : M \to \mathbb{R}^d$ ein Borel-messbares Vektorfeld mit $|F| \in \mathcal{L}^1(M, \lambda_M)$. Setze

$$(*) \quad \int_M F(x) \cdot d\lambda_M^\sigma(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} F(\varphi_\alpha(t)) \cdot \varphi_\alpha'(t) \, d\lambda^1(t)$$

wobei $U_\alpha \subseteq V_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, die disjunkt gemachten V_α's sind;

$$M = \dot{\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}}} U_\alpha, \quad U_\alpha \text{ messbar.}$$

16.24. Bemerkung: Integral in $(*)$ ist wohldefiniert, denn

$$\left| \int_M F(x) \cdot d\lambda_M^\sigma(x) \right| \leq \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} \underbrace{|F(\varphi_\alpha(t))|}_{|F|(\varphi_\alpha(t))} \cdot \underbrace{|\varphi_\alpha'(t)|}_{\sqrt{g_\alpha(t)}} \, d\lambda^1(t)$$

Gram-Det.

$$= \int_M |F|(x) \, d\lambda_M(x) < \infty$$

da $|F| \in \mathcal{L}^1(M, \lambda_M)$.

16.25 Satz (Integralsatz von Stokes (in $\mathbb{R}^3$))

Sei (M,σ) eine kompakte, orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ mit C^1-Rand. Sei $\nu: M \to \mathbb{R}^3$ das bzgl. σ positiv orient. Einheitsnormalenfeld. Sei $\mathcal{U} \supseteq M$ offen im $\mathbb{R}^3$ und $F \in C^1(\mathcal{U};\mathbb{R}^3)$. Dann gilt:

$$\int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x)\, d\lambda_M(x) = \int_{\delta M} F(x) \cdot d\lambda_{\delta M}^{\sigma_\delta}(x)$$

Beweis: 1. Schritt: Reduktion auf eine Karte, mittels C^∞-Zerlegung der Eins (Def. 13.18 & Bsp. 13.19) (analog 2. Schritt des Beweises des Satzes von Gauß):

Sei A Indexmenge, $\mathcal{A} := \{\varphi_\alpha : T_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \sigma$ orient. Atlas von M. O.E.: sei jedes T_α (Kartengebiet) von der Form einer (u.U. angeschnittenen) Kugel,

(∇) $T_\alpha = B_{r_\alpha}^{(2)}(c_\alpha) \cap \mathbb{H}^2$, mit $r_\alpha > 0$ und $c_\alpha \in \mathbb{H}^2$

[denn: $\forall a \in M\ \exists$ Karte $\varphi: T \to V \ni a$ (mit belieb. orient.), also $\varphi^{-1}(a) \in T \subseteq \mathbb{H}^2$; T offen in $\mathbb{H}^2 \Rightarrow T$ lässt sich auf Form in (∇) verkleinern, mit Mittelpkt $c_\alpha = \varphi^{-1}(a)$; wähle $A := M$ und $\alpha = a$].

Sei $\lambda > 0$ Leb.-Zahl. der off. Überdeckung

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \quad \text{(nach Lemma 15.28; } M \text{ kompakt!)}$$

$$\left(V_\alpha = \varphi_\alpha\left(B_{r_\alpha}^{(2)}(c_\alpha) \cap \mathbb{H}^2\right) \right)$$

Setze $\varepsilon := \frac{l}{2\sqrt{3}}$ und sei $\{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p\in\mathbb{Z}^3}$ C^∞-Teilung der Eins (13.18). Dann gilt:

- $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\gamma_{p,\varepsilon}) = l \quad \forall p \in \mathbb{Z}^3$
- $P := \{p \in \mathbb{Z}^3 : \operatorname{supp}\gamma_{p,\varepsilon} \cap M \neq \emptyset\}$ endlich, da M kpt.,
- $\forall p \in P\ \exists \alpha_p \in A : \underbrace{(\operatorname{supp}\gamma_{p,\varepsilon}) \cap M}_{\text{kpt. in } M} \subset V_{\alpha_p}$ (nach 15.28)
- $1 = \sum_{p\in\mathbb{Z}^3} \gamma_{p,\varepsilon}(x) \quad \forall x$

$\Rightarrow$

- $\int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x)\, d\lambda_M(x) = \sum_{p\in P} \int_M (\nabla \times (\gamma_{p,\varepsilon} F))(x) \cdot \nu(x)\, d\lambda_M(x)$
- $\int_{\delta M} F(x) \cdot d\lambda_{\delta M}^{\sigma_{ind}} = \sum_{p\in P} \int_{\delta M} (\gamma_{p,\varepsilon} F)(x) \cdot d\lambda_{\delta M}^{\sigma_{ind}}$

$\Rightarrow$ Es genügt Beh. zu zeigen für Vektorfelder F so dass:

$$(*)\ \left[\begin{array}{l} \exists \text{ eine bzgl. } \sigma \text{ pos. orient. Karte } \varphi : T \to V \text{ von } M \\ \text{mit } \quad \underbrace{(\operatorname{supp}|F| \cap M)}_{\text{kompakt in } M} \subset \underbrace{V}_{\text{offen in } M} \end{array}\right]$$

2. Schritt: Übergang zur Karte: Sei F & φ wie in (*)

$$\Rightarrow \int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x)\, d\lambda_M(x) = \int_V (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x)\, d\lambda_M(x)$$

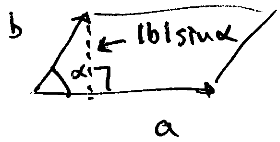
$$= \int_T (\nabla \times F)(\varphi(t)) \cdot \nu(\varphi(t)) \underbrace{\sqrt{g(t)}}_{\text{Gram-Det.}}\, d\lambda^2(t)$$

Es gilt:

• $\nu(\varphi(t)) = \dfrac{\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t)\times\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t)\times\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)\right|}$ (nach Lemma 16.18 & Def. 16.11(b))

• $\sqrt{g(t)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Flächeninhalt des von } \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \;\&\; \frac{\partial\varphi}{\partial t_2} \\ \text{im } \mathbb{R}^3 \text{ aufgespannten Parallelogramm} \end{array} \right\}$ (Üb.Auf. 14.1)

$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t)\times\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)\right|$



• $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}^3$:

$$(a\times b)\cdot(c\times d) = \sum_{1\le j<l\le 3} (a_j b_l - a_l b_j)(c_j d_l - c_l d_j)$$

antisymm.

$$= \sum_{1\le j,l\le 3} (a_j b_l - a_l b_j)\, c_j d_l$$

Daraus:

$$(\nabla\times F)(\varphi(t))\cdot\nu(\varphi(t))\sqrt{g(t)} = \sum_{1\le j,l\le 3}\left(\partial_{x_j}F_l - \partial_{x_l}F_j\right)(\varphi(t))\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}(t)\,\frac{\partial\varphi_l}{\partial t_2}(t)$$

$$= \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial t_1}\left[F_l(\varphi(t))\right]\frac{\partial\varphi_l}{\partial t_2}(t) - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial t_2}\left[F_j(\varphi(t))\right]\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}(t)$$

$$\overset{(!)(*)}{=} \frac{\partial}{\partial t_1}\Big(\underbrace{F(\varphi(t))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)}_{=:G_2(t)}\Big) - \frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\underbrace{F(\varphi(t))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t)}_{=:G_1(t)}\Big)$$

(!)

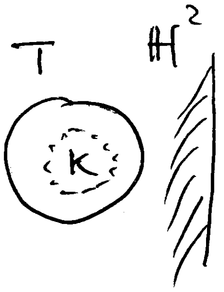
(Für (*): es wird, streng genommen, hierfür $\varphi\in C^2(T)$ gebraucht. – Entweder: man nimmt an, M is C^2-Mfkt – oder, man muss hier ein Glättungskern/Mollifier, wie auf dem Weihnachtsblatt, einsetzen – das sparen wir uns aber...)

3. Schritt: Analyse der Integrale: Wende Satz von Green in Kartengebiet T an:

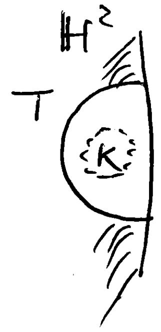
Da $\overline{T}$ Kompaktum mit stückweisen (!) C^1-Rand, folgt, mit Satz von Green (Kor. 15.31 - gilt auch (!) für stückweisen C^1-Rand):

1. Fall: Sei $K := \operatorname{supp}(|F|\circ\varphi)$ kpt in $\mathbb{H}^2$, mit

$$K \cap \partial\mathbb{H}^2 = \emptyset \quad [\Rightarrow \operatorname{dist}(K, \partial\mathbb{H}^2) > 0)] \quad (*)$$



oder



$$\Rightarrow \int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x)\, d\lambda_M(x) = \int_T \left[\frac{\partial}{\partial t_1} G_2(t) - \frac{\partial}{\partial t_2} G_1(t)\right] d\lambda^2(t) \overset{\text{Tut.Aufg. 10.2}}{=} 0$$

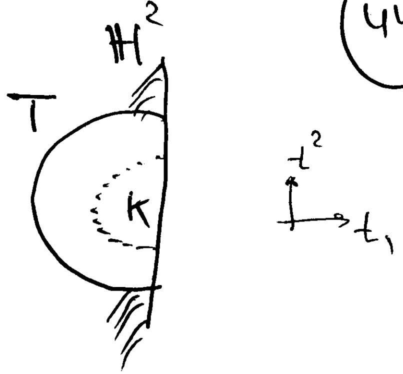
$$\text{da } G_1|_{\partial T} = 0 = G_2|_{\partial T}$$

Andererseits $[t_2 \mapsto \varphi((0,t_2)) =: \varphi(0,t_2)$ ist pos. orient. Karte bzgl. σ_{ind} von $\delta M]$ $(\sigma_{ind} \equiv \sigma_\delta)$

$$\int_{\delta M} F(x) \cdot d\lambda_{\delta M}^{\sigma_{ind}}(x) = \int_{\delta M \cap V} F(x) \cdot d\lambda_{\delta M}^{\sigma_{ind}}(x)$$

$$= \int_{T \cap \partial\mathbb{H}^2} \underbrace{F(\varphi(0,t_2))}_{= 0 \text{ (wegen } (*))} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(0,t_2)\, d\lambda^1(t_2) = 0$$

✓



2. Fall: $K \cap \partial\mathbb{H}^2 \neq \emptyset$

Wie im 1. Fall gilt:

$$\int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x)\, d\lambda_M(x)$$

$$= \int_T \left[\frac{\partial}{\partial t_1} G_2(t) - \frac{\partial}{\partial t_2} G_1(t)\right] d\lambda^2(t)$$

$$= \int_T \frac{\partial}{\partial t_1} G_2(t)\, dt \qquad \text{(Tut. Aufg. 10.2)}$$

$$\overset{(!)}{=} \int_{\partial T \cap \partial\mathbb{H}^2} \underbrace{G_2((0,t_2))}_{F(\varphi(0,t_2)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(0,t_2)} d\lambda^1(t_2) \qquad \text{(Kor. 15.31) (Satz von Green)}$$

$$= \int_{\partial M} F(x) \cdot d\lambda_{\partial M}^{\sigma_{ind}}(x) \qquad (\text{da } \partial T \cap \partial\mathbb{H}^2 = T \cap \partial\mathbb{H}^2)$$

$\boxtimes$

16.26. Bemerkung: (a) Der Satz von Stokes gilt auch noch, wenn M nur glatt bis auf 2-dim Nullmenge, und ∂M glatt bis auf 1-dim Nullmenge, z.B. M = Oberfläche von Würfel ohne "Deckel" in $\mathbb{R}^3$: