16.3. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Das Kurvenintegral für Vektorfelder in der Sprache von orientierten (1-dim) Mfkt'en.:

16.23. Definition Sei (M, σ) 1-dim. orientierte C^1-Mfkt. im $\mathbb{R}^d$, sei $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : T_\alpha \subseteq \mathbb{R} \to V_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \sigma$ ein zugeh. orient. Atlas von M. Sei $F: M \to \mathbb{R}^d$ ein Borel-messbares Vektorfeld mit $|F| \in \mathcal{L}^1(M, \lambda_M)$. Setze

$$(*) \quad \int_M F(x) \cdot d\lambda_M^\sigma(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} F(\varphi_\alpha(t)) \cdot \varphi_\alpha'(t)\, d\lambda^1(t)$$

wobei $U_\alpha \subseteq V_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, die disjunkt gemachten V_α's sind;

$$M = \dot{\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}}} U_\alpha, \quad U_\alpha \text{ messbar.}$$

16.24. Bemerkung: Integral in $(*)$ ist wohldefiniert, denn

$$\left| \int_M F(x) \cdot d\lambda_M^\sigma(x) \right| \le \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} \underbrace{|F(\varphi_\alpha(t))|}_{|F|(\varphi_\alpha(t))} \cdot \underbrace{|\varphi_\alpha'(t)|}_{\sqrt{g_\alpha(t)}} \, d\lambda^1(t)$$

$\sqrt{g_\alpha(t)}$: Gram-Det.

$$= \int_M |F|(x)\, d\lambda_M(x) < \infty$$

da $|F| \in \mathcal{L}^1(M, \lambda_M)$.

16.25 Satz (Integralsatz von Stokes (in $\mathbb{R}^3$))

Sei (M,σ) eine kompakte, orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ mit C^1-Rand. Sei $\nu: M \to \mathbb{R}^3$ das bzgl. σ positiv orient. Einheitsnormalenfeld. Sei $\mathcal{U} \supseteq M$ offen im $\mathbb{R}^3$ und $F \in C^1(\mathcal{U};\mathbb{R}^3)$. Dann gilt:

$$\int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x)\, d\lambda_M(x) = \int_{\delta M} F(x) \cdot d\lambda_{\delta M}^{\sigma_\delta}(x)$$

Beweis: 1. Schritt: Reduktion auf eine Karte, mittels C^∞-Zerlegung der Eins (Def. 13.18 & Bsp. 13.19) (analog 2. Schritt des Beweises des Satzes von Gauß):

Sei A Indexmenge, $\mathcal{A} := \{\varphi_\alpha : T_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \sigma$ orient. Atlas von M. O.E.: sei jedes T_α (Kartengebiet) von der Form einer (u.U. angeschnittenen) Kugel,

(∇) $T_\alpha = B^{(2)}_{r_\alpha}(c_\alpha) \cap \mathbb{H}^2$, mit $r_\alpha > 0$ und $c_\alpha \in \mathbb{H}^2$

[denn: $\forall a \in M\ \exists$ Karte $\varphi: T \to V \ni a$ (mit belieb. orient.), also $\varphi^{-1}(a) \in T \subseteq \mathbb{H}^2$; T offen in $\mathbb{H}^2 \Rightarrow T$ lässt sich auf Form in (∇) verkleinern, mit Mittelpkt $c_\alpha = \varphi^{-1}(a)$; wähle $A := M$ und $\alpha = a$].

Sei $\lambda > 0$ Leb.-Zahl. der off. Überdeckung

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \quad (\text{nach Lemma 15.28; } M \text{ kompakt!})$$

$$\left(V_\alpha = \varphi_\alpha(B^{(2)}_{r_\alpha}(c_\alpha) \cap \mathbb{H}^2) \right)$$

Setze $\varepsilon := \frac{l}{2\sqrt{3}}$ und sei $\{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p\in\mathbb{Z}^3}$ C^∞-Teilung der Eins (13.18). Dann gilt:

- $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\gamma_{p,\varepsilon}) = l \quad \forall p \in \mathbb{Z}^3$
- $P := \{p\in\mathbb{Z}^3 : \operatorname{supp}\gamma_{p,\varepsilon} \cap M \neq \emptyset\}$ endlich, da M kpt.,
- $\forall p \in P \;\exists \alpha_p \in A : \underbrace{(\operatorname{supp}\gamma_{p,\varepsilon})\cap M}_{\text{kpt. in } M} \subset V_{\alpha_p}$ (nach 15.28)
- $1 = \sum_{p\in\mathbb{Z}^3} \gamma_{p,\varepsilon}(x) \quad \forall x$

$\Rightarrow$

- $$\int_M (\nabla\times F)(x)\cdot\nu(x)\,d\lambda_M(x) = \sum_{p\in P}\int_M (\nabla\times(\gamma_{p,\varepsilon}F))(x)\cdot\nu(x)\,d\lambda_M(x)$$
- $$\int_{\partial M} F(x)\cdot d\lambda_{\partial M}^{\sigma_{ind}} = \sum_{p\in P}\int_{\partial M}(\gamma_{p,\varepsilon}F)(x)\cdot d\lambda_{\partial M}^{\sigma_{ind}}$$

$\Rightarrow$ Es genügt Beh. zu zeigen für Vektorfelder F so dass:

(*) $\left[\begin{array}{l} \exists \text{ eine bzgl. } \sigma \text{ pos. orient. Karte } \varphi: T\to V \text{ von } M \\ \text{mit } \underbrace{(\operatorname{supp}|F|\cap M)}_{\text{kompakt in } M} \subset \underbrace{V}_{\text{offen in } M} \end{array}\right]$

2. Schritt: Übergang zur Karte: Sei F & φ wie in (*)

$$\Rightarrow \int_M (\nabla\times F)(x)\cdot\nu(x)\,d\lambda_M(x) = \int_V (\nabla\times F)(x)\cdot\nu(x)\,d\lambda_M(x)$$

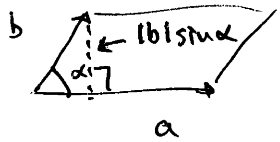
$$= \int_T (\nabla\times F)(\varphi(t))\cdot\nu(\varphi(t))\underbrace{\sqrt{g(t)}}_{\text{Gram-Det.}}\,d\lambda^2(t)$$

Es gilt:

- $$\nu(\varphi(t)) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)\right|}$$ (nach Lemma 16.18 & Def. 16.11(b))

- $$\sqrt{g(t)} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Flächeninhalt des von } \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \text{ \& } \frac{\partial\varphi}{\partial t_2} \\ \text{im } \mathbb{R}^3 \text{ aufgespannten Parallelogramm} \end{array} \right\}$$ (Üb.Auf. 14.1)

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)\right|$$



- $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}^3$:

$$(a\times b)\cdot(c\times d) = \sum_{1\le j<l\le 3} (a_j b_l - a_l b_j)(c_j d_l - c_l d_j)$$

$$\overset{\text{antisymm.}}{=} \sum_{1\le j,l\le 3} (a_j b_l - a_l b_j)\, c_j d_l$$

Daraus:

$$(\nabla\times F)(\varphi(t))\cdot\nu(\varphi(t))\sqrt{g(t)} = \sum_{1\le j,l\le 3} \left(\partial_{x_j}F_l - \partial_{x_l}F_j\right)(\varphi(t))\, \frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}(t)\, \frac{\partial\varphi_l}{\partial t_2}(t)$$

$$= \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial}{\partial t_1}\left[F_l(\varphi(t))\right] \frac{\partial\varphi_l}{\partial t_2}(t) - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial t_2}\left[F_j(\varphi(t))\right] \frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}(t)$$

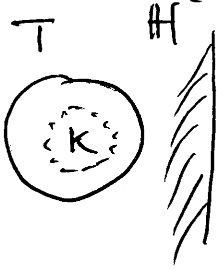
$$\overset{(!)\,(\ast)}{=} \frac{\partial}{\partial t_1}\Big(\underbrace{F(\varphi(t))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)}_{=:\,G_2(t)}\Big) - \frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\underbrace{F(\varphi(t))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t)}_{=:\,G_1(t)}\Big)$$

(Für $(\ast)$: es wird, streng genommen, hierfür $\varphi \in C^2(T)$ (!) gebraucht. – Entweder: man nimmt an, M is C^2-Mfkt – oder, man muss hier ein Glättungskern/Mollifier, wie auf dem Weihnachtsblatt, einsetzen – das sparen wir uns aber...)

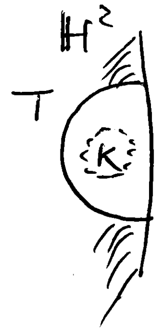
3. Schritt: Analyse der Integrale: Wende Satz von Green in Kartengebiet T an:

Da $\overline{T}$ Kompaktum mit stückweisen (!) C^1-Rand, folgt, mit Satz von Green (Kor. 15.31 – gilt auch (!) für stückweisen C^1-Rand):

1. Fall: Sei $K := \operatorname{supp}(|F| \circ \varphi)$ kpt in $\mathbb{H}^2$, mit
$$K \cap \partial\mathbb{H}^2 = \emptyset \quad [\Rightarrow \operatorname{dist}(K, \partial\mathbb{H}^2) > 0)] \quad (\alpha)$$



oder



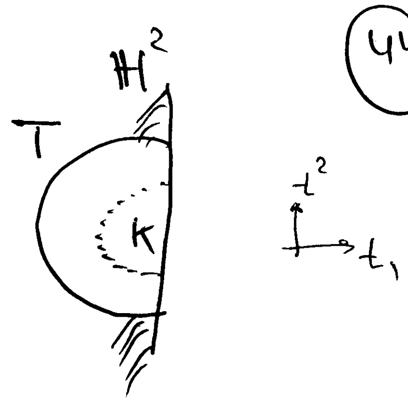
$$\Rightarrow \int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x)\, d\lambda_M(x)$$
$$= \int_T \left[\frac{\partial}{\partial t_1} G_2(t) - \frac{\partial}{\partial t_2} G_1(t)\right] d\lambda^2(t) \overset{\text{Tut. Aufg. 10.2}}{=} 0$$
$$\text{da } G_1|_{\partial T} = 0 = G_2|_{\partial T}$$

Andererseits $[t_2 \mapsto \varphi((0, t_2)) =: \varphi(0, t_2)$ ist pos. orient. Karte bzgl. σ_{ind} von $\delta M]$ $(\sigma_{ind} \equiv \sigma_\delta)$

$$\int_{\delta M} F(x) \cdot d\lambda_{\delta M}^{\sigma_{ind}}(x) = \int_{\delta M \cap V} F(x) \cdot d\lambda_{\delta M}^{\sigma_{ind}}(x)$$
$$= \int_{T \cap \partial\mathbb{H}^2} \underbrace{F(\varphi(0, t_2))}_{= 0 \text{ (wegen } (\alpha))} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(0, t_2)\, d\lambda^1(t_2) = 0$$

✓

2. Fall: $K \cap \partial \mathbb{H}^2 \neq \emptyset$



Wie im 1. Fall gilt:

$$\int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x) \, d\lambda_M(x)$$

$$= \int_T \left[\frac{\partial}{\partial t_1} G_2(t) - \frac{\partial}{\partial t_2} G_1(t)\right] d\lambda^2(t)$$

$$= \int_T \frac{\partial}{\partial t_1} G_2(t) \, dt \qquad \text{(Tut. Aufg. 10.2)}$$

$$\overset{(!)}{=} \int_{\partial T \cap \partial \mathbb{H}^2} \underbrace{G_2((0,t_2))}_{F(\varphi(0,t_2)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(0,t_2)} d\lambda^1(t_2) \qquad \text{(Kor. 15.31) (Satz von Green)}$$

$$= \int_{\partial M} F(x) \cdot d\lambda_{\partial M}^{\sigma_{ind}}(x) \qquad (\text{da } \partial T \cap \partial \mathbb{H}^2 = T \cap \partial \mathbb{H}^2)$$

$\boxtimes$

16.26. Bemerkung: (a) Der Satz von Stokes gilt auch noch, wenn M nur glatt bis auf 2-dim Nullmenge, und ∂M glatt bis auf 1-dim Nullmenge, z.B. M = Oberfläche von Würfel ohne "Deckel" in $\mathbb{R}^3$: