16.2. Orientierte Hyperflächen mit Rand

16.9. Definition Sei M n-dim. C^1-Mfkt. in $\mathbb{R}^d$

- Seien $\varphi, \tilde{\varphi}$ zwei überlappende Karten von M, d.h. $V := \varphi(T) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{T}) \neq \emptyset$. Sei $W := \varphi^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\psi : W \to \tilde{W}$ Diffeom., so dass $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$ (exist. nach Satz 15.6(b))

$$\varphi, \tilde{\varphi} \left\{ \begin{array}{c} \text{gleich} \\ \text{gegensätzlich} \end{array} \right\} \text{orientiert} :\Leftrightarrow \det(D\psi)(t) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0 \quad \forall t \in W$$

- $\mathcal{A}$ orientierter Atlas von M $:\Leftrightarrow$ je 2 überlappende Karten von $\mathcal{A}$ sind gleich orientiert

- zwei orientierte Atlanten $\mathcal{A}$ & $\mathcal{A}'$ von M sind gleichorientiert $:\Leftrightarrow$ $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}'$ ist orientiertes Atlas

- M ist orientierbar $:\Leftrightarrow \mathcal{O} := \{$Mengen der orientierten Atlanten von $M\} \neq \emptyset$

"Gleichorientierung" def. Äquiv. relation $\sim$ auf $\mathcal{O}$ (wenn M orientierbar)

$\sigma \in \mathcal{O}/_\sim$ heißt Orientierung von M

(M, σ) : orientierte Mfkt

16.10. Beispiel $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ orientierbare Mfkt. im $\mathbb{R}^2$

orientiertes Atlas $\mathcal{A} = \{\varphi, \tilde{\varphi}\}$,

$$\varphi : \begin{array}{l}]0, 2\pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \longmapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array}, \qquad \tilde{\varphi} : \begin{array}{l}]-\pi, \pi[\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \tilde{t} \longmapsto \begin{pmatrix} \cos \tilde{t} \\ \sin \tilde{t} \end{pmatrix} \end{array}$$

$\psi :]0, 2\pi[\to]-\pi, \pi[\,; \; t \mapsto \psi(t) := t - \pi \Rightarrow \psi'(t) = 1 > 0 \;\; \forall t$

Außerdem: $\tilde{\varphi}_- : \begin{array}{l}]-\pi, \pi[\to \mathbb{R}^2 \\ \tilde{t} \mapsto \begin{pmatrix} \cos \tilde{t} \\ -\sin \tilde{t} \end{pmatrix} \end{array}$ gegensätzlich orientiert zu $\tilde{\varphi}$, als auch φ

$(\psi(t) = -t$, bzw. $\psi(t) = \pi - t)$

Hier: $\operatorname{card}(\mathcal{O}/_\sim) = 2$ - es gibt 2 Orientierungen von S^1
(Falls > 2 Orientierungen existieren $\Rightarrow$ M nicht zusammenhängend).

$\boxed{\textbf{16.11. Definition}}$ (Orientierung von Tangentialräumen).

(a) $\left.\begin{array}{l} \text{Basis } \{v_1, .., v_n\} \text{ von } \mathbb{R}^n \\ \text{positiv (bzw. negativ) orientiert} \\ \text{(bzgl. kanon. Basis } \{e_1, .., e_n\} \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} > 0$ (bzw. < 0)

(b) Sei (M, σ) orient. Mfkt., $a \in M$, $\{\tau_1, .., \tau_n\}$ Basis von $T_a M$, und φ zu σ gleichorientierte Karte von M (d.h. für $\mathcal{A} \in \sigma$ gilt: $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ orient. Atlas von M), mit $a \in \varphi(T)$

$$\left.\begin{array}{l} \{\tau_1, .., \tau_n\} \text{ pos. orientiert} \\ \text{(bzgl. } \sigma) \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists \text{ pos. orient. Basis } \{v_1, .., v_n\} \\ \text{in } \mathbb{R}^n: \\ \tau_j = (D\varphi)(\varphi^{-1}(a))\, v_j \\ \text{für } j = 1, .., n \end{array}\right.$$

Insbesondere: $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\varphi^{-1}(a)), \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\varphi^{-1}(a)) \right\}$ ist

pos. orient. Basis von $T_a M$ (wähle $v_j = e_j$)

16.12. Lemma Def. 16.11 (b) ist unabh. von Wahl der gleichorientierten Karte φ mit $\varphi(T) \ni a$.

Beweis: Sei $\tilde{\varphi}$ eine weitere solche Karte mit $\tilde{\varphi}(\tilde{T}) \ni a$.

$\Rightarrow \varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$ mit $\det(D\psi)(t) > 0 \ \forall t \in W$

(siehe Def. 16.9). Setze $\tilde{v}_j := (D\psi)(\varphi^{-1}(a))\, v_j$, $j = 1, \ldots, n$

$$\Rightarrow \tau_j = (D(\underbrace{\tilde{\varphi} \circ \psi}_{\varphi}))(\varphi^{-1}(a))\, v_j = (D\tilde{\varphi})(\underbrace{\psi \circ \varphi^{-1}(a)}_{\tilde{\varphi}^{-1}(a)}) \underbrace{(D\psi)(\varphi^{-1}(a))\, v_j}_{\tilde{v}_j}$$

$$= (D\tilde{\varphi})(\tilde{\varphi}^{-1}(a))\, \tilde{v}_j$$

und
$$\underbrace{\det \begin{pmatrix} | & & | \\ \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{\underbrace{(D\psi)(\varphi^{-1}(a))}_{\det > 0} \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{\det > 0}} > 0$$

– also $\{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_n\}$ pos. orient. Basis von $\mathbb{R}^n$

$\blacksquare$

16.13. Definition Sei $\underline{d \geq 2}$.

(a) $M \subseteq \mathbb{R}^d$ Hyperfläche $:\Leftrightarrow$ M $(d-1)$-dim. C^1-Mfkt. in $\mathbb{R}^d$

[Nach Satz 15.8: M (lokal) beschrieben als Lösungsmenge <u>einer</u> Gleichung; es gilt

$\dim N_a M = 1$ (Satz 15.11 (b))]

(b) ν ist <u>Einheitsnormalenfeld</u> (von Hyperfläche M) $\Big\}$ $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \nu : M \to \mathbb{R}^d \\ M \ni a \mapsto \nu(a) \in \left\{ \dfrac{\pm (\nabla f)(a)}{|(\nabla f)(a)|} \right\} \\ \text{(lokal; mit } f \text{ eine Funktion,} \\ \text{deren Nullstellenmenge } M \text{ ist)} \end{cases}$

(c) Sei (M, σ) orientierte Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$ mit Einheitsnormalenfeld ν:

ν <u>positiv orientiert bzgl. σ</u> $\Big\}$ $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall a \in M \ \exists \text{ eine bzgl. } \sigma \text{ pos. orient.} \\ \text{Basis } \{\tau_1^{(a)}, \ldots, \tau_{d-1}^{(a)}\} \text{ von } T_a M, \\ \text{so dass } \{\nu(a), \tau_1^{(a)}, \ldots, \tau_{d-1}^{(a)}\} \\ \text{eine pos. orient. Basis in } \mathbb{R}^d \text{ ist.} \end{cases}$

16.14. Lemma Def. 16.13(c) ist unabh. von <u>Wahl</u> der bzgl. σ pos. orient. Basis $\{\tau_1^{(a)}, \ldots, \tau_{d-1}^{(a)}\}$ von $T_a M$

<u>Beweis</u>: Sei $\{\tilde{\tau}_1^{(a)}, \ldots, \tilde{\tau}_{d-1}^{(a)}\}$ eine weitere solche Basis (bzgl. σ pos. orient. Basis von $T_a M$)

$\Rightarrow (*)$ $\tau_j^{(a)} = (D\varphi)(\varphi^{-1}(a))\, v_j \ , \ \tilde{\tau}_j^{(a)} = (D\varphi)(\varphi^{-1}a)\, \tilde{v}_j \ , \ j = 1, \ldots, d-1,$

mit $\{v_1, \ldots, v_{d-1}\}, \{\tilde{v}_1, \ldots, \tilde{v}_{d-1}\}$ je eine pos. orient. Basis $\mathbb{R}^{d-1}$

$\Rightarrow \exists\, A \in \mathrm{Mat}((d-1)\times(d-1); \mathbb{R}) : \ \tilde{v}_j = A v_j, \ j = 1, \ldots, d-1$ (Basiswechsel)

Da $$0 < \det \begin{pmatrix} | & & | \\ \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix} = \det(A) \underbrace{\det \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix}}_{>0}$$

$\Rightarrow \quad \det(A) > 0.$

In basis $\{\nu(a), \tau_1^{(a)}, \dots, \tau_{d-1}^{(a)}\}$ von $\mathbb{R}^d$ $(= N_a M \oplus T_a M,$ $N_a M \perp T_a M)$
hat $(D\varphi)(\varphi^{-1}(a))$ Matrixdarstellung:

$$(**) \quad (D\varphi)(\varphi^{-1}(a)) = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ \hline F \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(d \times (d-1), \mathbb{R})$$

mit $F \in \mathrm{Mat}((d-1)\times(d-1); \mathbb{R})$. In gleicher Basis:

$$\det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \nu(a) & \tilde{\tau}_1^{(a)} & \cdots & \tilde{\tau}_{d-1}^{(a)} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{wegen } (*) \\ \& (**)}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & F\begin{pmatrix} | & & | \\ \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$= \det \left(F A \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix} \right) = \underbrace{\det\left(F \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix}\right)}_{\det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \nu(a) & \tau_1^{(a)} & \cdots & \tau_{d-1}^{(a)} \\ | & | & & | \end{pmatrix} > 0} \cdot \underbrace{\det A}_{>0} > 0$$

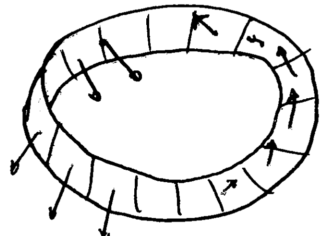
$\boxtimes$

16.15. Satz Sei $d \geq 2$ und (M, σ) eine orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^d$. Dann $\exists!$ Einheits-Normalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^d$ mit <u>pos.</u> Orient. bzgl. σ. Zudem ist ν stetig

---

<u>16.16. Bemerkung</u>: Es gilt auch die Umkehrung von Satz 16.15: $\exists$ stetiges Einheitsnormalenfeld für Hyperfläche $M \Rightarrow M$ orientierbar.
Man kann also dies als <u>Def.</u> der Orientierbarkeit von <u>Hyperflächen</u> verwenden!

16.17. Beispiel: Möbius-Band M



M

ist Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$, aber nicht orientierbar, da $\nexists$ stetiges Einheitsnormalenfeld (siehe Forster Bsp. 20.6 p. 274 (8. Auflage))

Beweis Satz 16.15: • Existenz: aus Def. 16.13 klar.

• Eindeutigkeit: Sei $a \in M$ und $\{\tau_1, .., \tau_{d-1}\}$ pos. orient. Basis von $T_a M$ bzgl. σ.

Sei $\xi \in \{\pm 1\} \Rightarrow \det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \xi(\nabla f)(a) & \tau_1 & \cdots & \tau_{d-1} \\ | & | & & | \end{pmatrix} > 0$

für entweder $\xi = +1$ oder $\xi = -1$

• Stetigkeit: Sei $a \in M$, $\mathcal{U} \ni a$ offene Umgebung im $\mathbb{R}^d$ und $f \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ mit $V := M \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : f(x) = 0\}$ (NB: ex. nach Satz 15.8); zudem $(\nabla f)(a) \neq 0$

$\Rightarrow (\nabla f)(x) \neq 0 \ \forall x \in V$, falls $\mathcal{U}$ hinreichend klein, da $f \in C^1$.

Setze $\tilde{\nu}(x) := \dfrac{(\nabla f)(x)}{|(\nabla f)(x)|}$, $x \in V \Rightarrow V \ni x \mapsto \tilde{\nu}(x)$ stetig!

Sei $\nu : M \to \mathbb{R}^d$ das eindeutige Einheitsnormalenfeld (mit pos. Orient. bzgl. σ)

o.E. gelte $\tilde{\nu}(a) = \nu(a)$ [sonst $f \to -f$]

Sei $\varphi : T \to V$ Karte von M

$$\Rightarrow T \ni t \mapsto h(t) := \det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \tilde{\nu}(\varphi(t)) & \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) & \cdots & \frac{\partial \varphi}{\partial t_{d-1}}(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

ist stetig, und $h(\varphi^{-1}(a)) > 0$

$\tilde{\nu}(a) = \nu(a)$ & ν pos. orient. bzgl. σ

$\overset{h \text{ stetig}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, \varepsilon > 0 : h(t) > 0 \quad \forall t \in B_\varepsilon^{(d-1)}(\varphi^{-1}(a)) =: T_0$

$\Rightarrow$ $\tilde{\nu}(x) = \nu(x) \quad \forall x \in \underbrace{\varphi(T_0)}_{} \subseteq V$

↑ offene Umgeb. (in M) von a

$\overset{\tilde{\nu} \text{ stetig in } a}{\Longrightarrow}$ ν stetig in a ∎

16.18 Lemma Sei (M, σ) orient. Hyperfläche in $\underline{\underline{d=3}}$ (d.h. $\dim \underline{\underline{M=2}}$), sei $a \in M$, und $\nu(a)$ der bzgl. σ pos. orient. Einheitsnormalenvektor in a.

Dann gilt, für eine Basis $\{\tau_1, \tau_2\}$ von $T_a M$:

$$\left.\begin{array}{l}\{\tau_1, \tau_2\} \text{ pos. orient.} \\ \text{Basis bzgl. } \sigma\end{array}\right\} \Leftrightarrow \nu(a) = \frac{\tau_1 \times \tau_2}{|\tau_1 \times \tau_2|}$$

(für "$\times$", siehe 8.4)

__Beweis__: Da $0 \neq \tau_1 \times \tau_2 \perp \operatorname{span}(\tau_1, \tau_2) = T_a M$ und $\dim N_a M = 1$ $\Rightarrow$ $\nu(a) = \pm \dfrac{\tau_1 \times \tau_2}{|\tau_1 \times \tau_2|}$

pos. orient. $\Leftrightarrow$ $\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \nu(a) & \tau_1 & \tau_2 \\ | & | & | \end{pmatrix} > 0$

$\Rightarrow$ es muss "$+$" gelten, da

$$\det(\tau_1 \times \tau_2 | \tau_1 | \tau_2) = \underset{\substack{\uparrow \\ SO(3)}}{(\det R)} \cdot \det(\tau_1 \times \tau_2 | \tau_1 | \tau_2) \quad (\forall R \in SO(3))$$

$$= \det(\underbrace{R\tau_1}_{=:\hat{\tau}_1} \times \underbrace{R\tau_2}_{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|\tau_2|} \,|\, \underbrace{R\tau_1}_{\hat{\tau}_1} \,|\, \underbrace{R\tau_2}_{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|\tau_2|})$$

$\boxed{\text{wähle } R \in SO(3), \text{ so dass } R\tau_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|\tau_2|}$

$$= |\tau_2|^2 \det\begin{pmatrix} \hat{\tau}_{1,2} & \hat{\tau}_{1,1} & 0 \\ -\hat{\tau}_{1,1} & \hat{\tau}_{1,2} & 0 \\ 0 & \hat{\tau}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \hat{\tau}_{1,2} & \hat{\tau}_{1,1} \\ -\hat{\tau}_{1,1} & \hat{\tau}_{1,2} \end{pmatrix} \times |\tau_2|^2$$

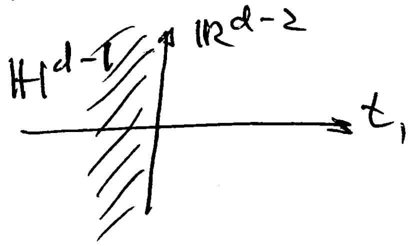
$$= |\tau_2|^2 (\hat{\tau}_{1,2}^2 + \hat{\tau}_{1,1}^2) > 0$$

∎

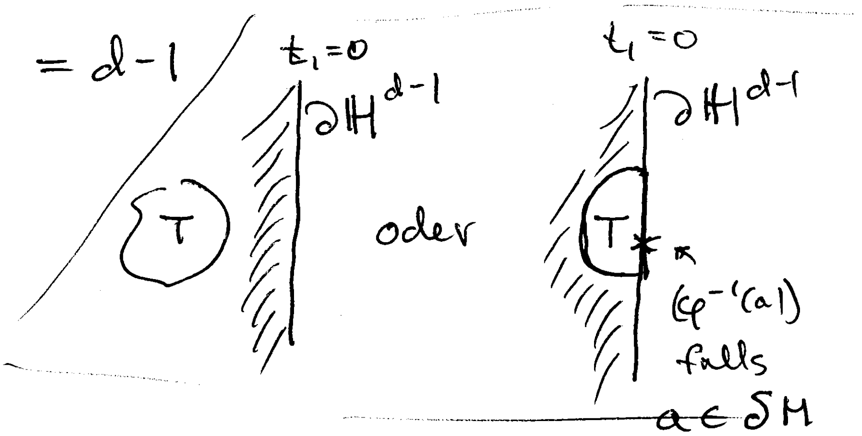
16.19. Definition Sei $d \geq 2$

(a) M Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$ mit C^1-Rand $:\Longleftrightarrow$

$\forall a \in M \ \exists V \subseteq M$ offen in Relativtop. auf M mit $a \in V$ und lokale Karte $\varphi : T \to V$ mit



- T offen in $\mathbb{H}^{d-1} := \{t \in \mathbb{R}^{d-1} : t_1 \leq 0\}$ (in Rel.top.).
- φ Homöomorphismus.
- φ stetig diff.bar (falls $t_1 = 0$ nur linksseitige $\frac{\partial}{\partial t_1}$)
- $\operatorname{Rang}\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t)\right)_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 1 \leq k \leq d-1}} = d-1$



(b) $a \in M$ Randpkt. von M

$:\Longleftrightarrow \exists$ Karte $\varphi : T \to V \ni a$ mit $(\varphi^{-1}(a))_1 = 0$

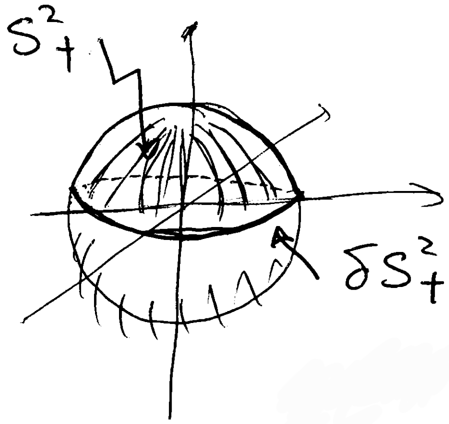
$\delta M := \{a \in M : a \text{ ist Randpkt. von } M\}$

Rand von M

Achtung: $\delta M \neq \partial M = M$

$\uparrow$ topol. Rand in $\mathbb{R}^d$

16.20. Beispiel: Halbsphäre im $\mathbb{R}^3$



$S^2_+ := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1 \text{ und } x_3 \geq 0\}$

$\delta S^2_+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1 \text{ und } x_3 = 0\}$

(δS^2_+ 1-dim C^1-Mfkt. im $\mathbb{R}^3$)

16.21. Satz Sei $d \geq 3$ und M Hyperfläche im $\mathbb{R}^d$ mit C^1-Rand. Dann ist δM eine $(d-2)$ dim. C^1-Mfkt im $\mathbb{R}^d$

Beweis: Sei φ Karte von M mit $T \cap \partial \mathbb{H}^{d-1} \neq \emptyset$
(d.h. $\varphi(T)$ überdeckt Teile von δM)
$\beta := \varphi\big|_{T \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}}$ ist Karte von δM ☒

16.22. Lemma Sei $d \geq 3$ und (M, σ) orient. Hyperfläche mit C^1-Rand im $\mathbb{R}^d$. Sei $\mathcal{A} := \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \sigma$ orient. Atlas und $\beta_\alpha := \varphi_\alpha\big|_{T_\alpha \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}}$ wie im Bew. von Satz 16.21.
Dann ist $\mathcal{A}_\delta := \{\beta_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}: T_\alpha \cap \partial \mathbb{H}^{d-1} \neq \emptyset}$
ein orient. Atlas von δM und (seine Äquiv. klas. von Atlanten) def. die induzierte Orientierung σ_δ von δM

Beweis: Sei $\varphi, \tilde{\varphi}$ zwei (auf δM überlappende) Karten von M,
sei $W := \varphi^{-1}(\varphi(T) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{T}))$, $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(T) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{T}))$
und $\psi := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : W \to \tilde{W}$ Diffeom. (siehe Satz 15.6(b)).

$\psi(W \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}) \subseteq \tilde{T} \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}$

$\Rightarrow \psi_\delta := \tilde{\beta}^{-1} \circ \beta : W \cap \partial \mathbb{H}^{d-1} \to \tilde{W} \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}$ ist Diffeom

und, $\forall t = (0, \underset{\uparrow \mathbb{R}^{d-2}}{\hat{t}}) \in W \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}$:

$$(D\psi)(0, \hat{t}) = \left(\begin{array}{c|ccc} \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & (D\psi_\delta)(\hat{t}) & \end{array}\right)$$

wobei $\gamma > 0$. Es folgt
$\varphi, \tilde{\varphi}$ gleichorient.
$\Leftrightarrow \beta, \tilde{\beta}$ gleichorient. ☒