16. Kurvenintegrale und der Satz von Stokes

16.1. Kurvenintegrale

Generalvoraussetzung: $I \subseteq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall
$\kappa : I \to \mathbb{R}^d$ C^1-Kurve mit
C^1-Kurvenbogen $\Gamma_\kappa =: \Gamma$

16.1. Definition

- Sei $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}^d \cap \Gamma$-messbares Skalarfeld mit $(f \circ \kappa)|\kappa'| \in L^1(I)$

  Kurvenintegral (für Skalarfeld)

$$\int_\kappa f(x)\, dx := \int_I f(\kappa(t))\,|\kappa'(t)|\, dt$$

- Sei $A : \Gamma \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{B}^d \cap \Gamma$ messbares Vektorfeld mit $(A \circ \kappa) \cdot \kappa' \in L^1(I)$

  Kurvenintegral (für Vektorfelder)

$$\int_\kappa A(x) \cdot dx := \int_I A(\kappa(t)) \cdot \kappa'(t)\, dt$$

- C^1-Kurve κ geschlossen $:\Leftrightarrow$ $\kappa(\min I) = \kappa(\max I)$

  In diesem Fall auch übliche Notation:

$$\oint_\kappa f(x)\, dx \quad , \quad \oint_\kappa A(x) \cdot dx$$

16.2. Bemerkung: (a) κ nicht injektiv $\Rightarrow$ (Teile von) Γ u.U. mehrfach durchlaufen:

("hin und her")

(b) Falls $\kappa(I) = \Gamma$ 1-dim C^1-Mfkt und $\exists$ Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}$ mit $\kappa : I \setminus N \to \Gamma$ Karte

$$\Rightarrow \int_\kappa f(x) dx = \int_\Gamma f(x) dx \quad (\text{nach } 15.22)$$

[Bsp.: $\Gamma = S^1$, $\kappa: [0, 2\pi] \to S^1$
$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$]

$\boxed{\text{Von nun an gelte}}$: Alle Kurven, bis auf eine Nullmenge, injektiv!

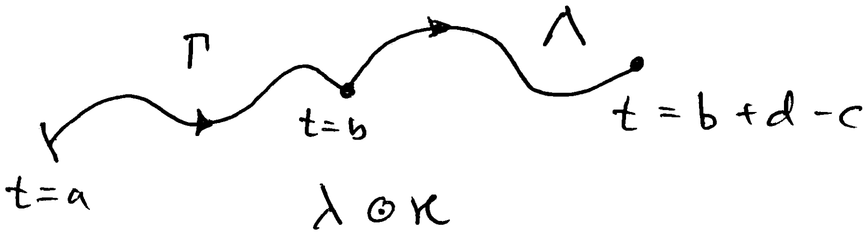
$\boxed{\text{16.3. Definition}}$ • für $\kappa: [a,b] \to \Gamma$ C^1-Kurve

sei $\kappa^-: [a,b] \to \Gamma$ (C^1-Kurve)
$t \mapsto \kappa(b+a-t)$ (κ rückwärts durchlaufen)

• Sei $\lambda: [c,d] \to \mathbb{R}^d$ C^1-Kurve mit C^1-Kurvenbogen Λ
mit $\kappa(b) = \lambda(c)$

$$\lambda \odot \kappa: [a, b+(d-c)] \to \Gamma \cup \Lambda$$
$$t \mapsto \begin{cases} \kappa(t), & t \in [a,b] \\ \lambda(t-b+c), & t \in]b, b+d-c] \end{cases}$$

Aneinander-Kettung von κ und λ



$\lambda \odot \kappa$

• κ stückweise C^1-Kurve $:\Leftrightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N}$ und $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ C^1-Kurven mit
$$\kappa = \kappa_n \odot \dots \odot \kappa_1$$

• seien κ, λ C^1-Kurven wie oben und $f: \Gamma \cup \Lambda \to \mathbb{R}$ messbar

Setze
$$\int_{\lambda \odot \kappa} f(x)\,dx := \int_\lambda f(x)\,dx + \int_\kappa f(x)\,dx$$

falls beide Integrale auf rechter Seite existieren

– analog für Vektorfelder (siehe 16.1)

– falls $\lambda \odot \kappa$ sogar C^1-Kurve, dann im Einklang mit Def. 16.1.

16.4 Lemma Sei $\kappa : I \to \Gamma$ eine stückweise C^1-Kurve.
Sei $\tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$ kpt.'es Intervall, sei $\varphi : I \to \tilde{I}$ ein Homöomorphis., der auf $\mathring{I}$ & $\mathring{\tilde{I}}$ (Innern) ein Diffeom. ist.
Dann ist $\tilde{\kappa} := \kappa \circ \varphi^{-1}$ stückweise C^1-Kurve mit $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ und für alle messbaren Skalarfelder $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ und alle messbaren Vektorfelder $A : \Gamma \to \mathbb{R}^d$ gilt

$$\int_\kappa f(x)\,dx = \int_{\tilde{\kappa}} f(x)\,dx \quad \text{(falls eine Seite exist.)}$$

$$\int_\kappa A(x)\cdot dx = \sigma \int_{\tilde{\kappa}} A(x)\cdot dx \quad \text{(falls eine Seite exist.)}$$

wobei $\sigma := \operatorname{sgn} \varphi'(t)$ (unabh. von $t \in \mathring{I}$)

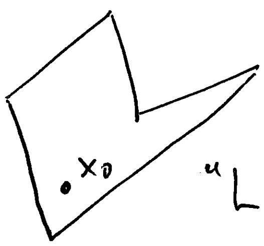
Insbesondere:
$$\int_\kappa A(x)\cdot dx = -\int_{\kappa^-} A(x)\cdot dx$$

(abhängig von Richtung, in der Γ durchlaufen)

Beweis: • benutze $\kappa'(t) = \tilde{\kappa}'(\varphi(t))\,\varphi'(t) \quad \forall t \in \mathring{I}$
& Substitutionsformel, falls κ C^1-Kurve
• im allg. Fall, zerlege zuerst in C^1-Kurven κ_ν, $\nu = 1, \dots, n$ ■

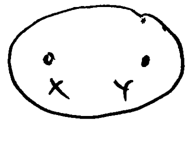
16.5. Definition Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$

B sternförmig (bzgl. $x_0 \in \mathbb{R}^d$) $:\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in B : \forall x \in B \text{ gilt} \\ \underbrace{\{x_0 + \tau(x - x_0) : \tau \in [0,1]\}}_{\text{Geradenstück von } x_0 \text{ nach } x} \subseteq B \end{cases}$



"Lehrer sieht alle"

($\Leftarrow$ "jeder sieht jeden": Konvex



)

16.6. Satz (über Gradientenfelder)

Für $B \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $A \in C^1(B;\mathbb{R}^d)$ Vektorfeld betrachte die Aussagen:

(i) $\forall$ geschlossenen stückweisen C^1-Kurve κ mit $\Gamma \subseteq B$ gilt

$$\oint_\kappa A(x)\cdot dx = 0$$

(ii) $\forall$ stückweisen C^1-Kurven κ und $\tilde{\kappa}$ mit $\Gamma \subseteq B$, $\tilde{\Gamma} \subseteq B$ und $\kappa\left(\begin{smallmatrix}\max\\ \min\end{smallmatrix} I\right) = \tilde{\kappa}\left(\begin{smallmatrix}\max\\ \min\end{smallmatrix} \tilde{I}\right)$ (gleiche Anfangs- und Endpunkt) gilt

$$\int_\kappa A(x)\cdot dx = \int_{\tilde{\kappa}} A(x)\cdot dx \qquad \text{Wegunabhängigkeit}$$

(iii) A ist ein Gradientenfeld (oder: konservativ), d.h. $\exists f \in C^2(B;\mathbb{R})$ mit $A = \nabla f$ (A besitzt Potential f)

(iv) Es gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad \forall j,k \in \{1,\dots,d\}$$

Dann gilt: $\quad$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv)

Falls B zusätzlich sternförmig, so gilt auch

(iv) $\Rightarrow$ (iii) [Lemma von Poincaré]

16.7. Bemerkung

(a) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) gilt auch, falls A nur $\in C(B;\mathbb{R}^d)$
In dem Fall ist dann $f \in C^1(B;\mathbb{R})$.

(b) (iv) bedeutet in $d=3$: $\nabla \times A = 0$, d.h. A wirbelfrei (s. 8.4)

(c) Die Vorauss. "B sternförmig" für (iv) $\Rightarrow$ (iii) kann abgeschwächt, aber nicht weggelassen werden!

Beweis von Satz 16.6: (i) $\Rightarrow$ (ii): da $\tilde{\kappa} - \oplus \kappa$ geschlossene stückweise C^1-Kurve (verwende Lem. 16.4). ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Definiere Äquiv.rel. $\sim$ auf B: $\forall x,y \in B$ sei

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists \kappa : I \to B \text{ stückweise } C^1\text{-Kurve mit } \kappa(\min I) = x \ \& \ \kappa(\max I) = y$$

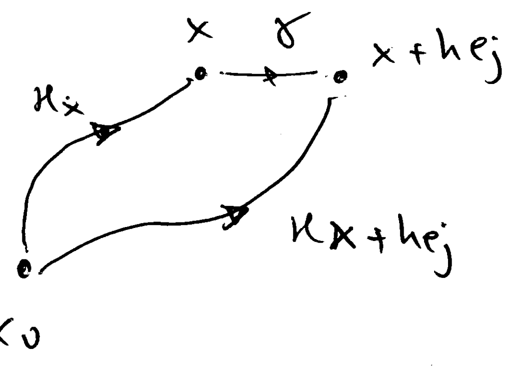
Äquiv.klassen $[x] := \{y \in B : y \sim x\}$ heißt die Wegzusammenhangskomponente von $x \in B$ (siehe dazu später) - es gilt $B = \dot{\bigcup}_{[x] \in B/\sim} [x]$

1. Schritt: B sei wegzusammenhängend, d.h. $\exists y \in B : B = [y]$ (d.h. $\forall x,y \in B$: $x \sim y$). (*)

Fixiere $x_0 \in B$, sei $x \in B$ bel. fest, und $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ klein, so $B_{|h|}(x) \subseteq B$ (B offen!).

Wähle κ_x, bzw. κ_{x+he_j} C^1-Kurve von x_0 nach x, bzw. $x+he_j$, $j \in \{1,..,d\}$
$\uparrow$ j'ter Einheitsvektor

(möglich wegen (*))



Sei $\gamma : \begin{array}{l} [0,1] \to B \\ t \mapsto x + the_j \end{array}$

Setze $\quad f(x) := \int_{\mathcal{K}_x} A(y)\cdot dy \quad (x \in B)$

(wohldef: nur von x abh. (und fixe x_0), nicht aber von Wahl von $\mathcal{K}_x$ – per Annahme (ii)!).

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\left[f(x+he_j) - f(x)\right] = \frac{1}{h}\Big[\underbrace{\underbrace{\int_{\mathcal{K}_{x+he_j}} A(y)\cdot dy - \int_{\mathcal{K}_x} A(y)\cdot dy}_{\int_{\mathcal{K}_{x+he_j} \odot \mathcal{K}_x^-} A(y)\cdot dy}}_{\int_\gamma A(y)\cdot dy \text{ u. V. (ii) (siehe Bild)}}\Big]$$

$$\overset{\text{Def } \gamma \text{ \& Def 16.1}}{=} \int_0^1 \underbrace{A(x+the_j)\cdot e_j}_{A_j(x+the_j)}\, dt \overset{\text{Mittelwertsatz}}{=} A_j(x+\Theta_h e_j)$$

mit $\Theta_h \in [0,h]$

$$\xrightarrow{h\to 0} A_j(x), \text{ also } \nabla f = A.$$

Da $A \in C^1(B;\mathbb{R}^d)$ ist $f \in C^2(B;\mathbb{R})$.

2. Schritt: Falls B nicht wegzusammenhängend, zerlege in Wegzusammenhangskomponenten $B = \dot{\bigcup}_{[x]\in B/\sim} [x]$ und definiere f separat auf allen $[x] := \{y \in B : y \sim x\} \in B/\sim$ wie in 1. Schritt (NB.: $[x]$ offen in $\mathbb{R}^d$, da $B_\varepsilon(y) \subseteq [x]$ $\forall y \in [x]$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(y) \subseteq B$). ✓

„(iii) ⇒ (i)" Sei $\kappa = \kappa_n \oplus \dots \oplus \kappa_1 : I \to B$

geschlossene stückweise C^1-Kurve, wobei
$\kappa_\nu : I_\nu \to B$, $\nu = 1, \dots, n$, C^1-Kurven mit
$\kappa_\nu(\max I_\nu) = \kappa_{\nu+1}(\min I_{\nu+1})$ für $\nu = 1, \dots, n-1$
und $\kappa_n(\max I_n) = \kappa_1(\min I_1)$

$$\Rightarrow \oint_\kappa (\nabla f)(x) \cdot dx \underset{\text{per Def.}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\kappa_\nu} (\nabla f)(x) \cdot dx$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \int_{I_\nu} \underbrace{(\nabla f)(\kappa_\nu(t)) \cdot \kappa_\nu'(t)}_{\frac{d}{dt} f(\kappa_\nu(t))} dt = \sum_{\nu=1}^{n} \Big[f(\kappa_\nu(\max I_\nu)) - f(\kappa_\nu(\min I_\nu)) \Big]$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

„(iii) ⇒ (iv)": Satz von Schwarz (Satz 8.8) über Vertauschbarkeit 2. partieller Ableitungen.

„(iv) ⇒ (iii)": Sei B auch sternförmig; o.E. sei $x_0 = 0$ der zugeh. Punkt für die Verbindungsstrecken.

Für $x \in B$ setze

$$f(x) := \sum_{k=1}^{d} x_k \int_0^1 A_k(\underset{\substack{\uparrow\ \forall t \in [0,1] \\ B \ \text{da sternf.}}}{tx}) \, dt \Rightarrow \text{wohldef.!}$$

$A \in C^1(B; \mathbb{R}^d) \Rightarrow f \in C^1(B; \mathbb{R})$ mit Satz 12.48 (b)
(„Diff.barkeit von Param.-Int")

(exist. Majorante aus Beschränktheit 1. part. Abl. von A auf Kompakta (da stetig))

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 A_j(tx)\,dt + \sum_{k=1}^{d} x_k \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 A_k(tx)\,dt \, ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 A_k(tx)\,dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j}\big[A_k(tx)\big]\,dt = \int_0^1 t \frac{\partial A_k}{\partial x_j}(tx)\,dt$$

Da $\frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_k}$ $\forall j,k \in \{1,\dots,d\}$ n. V., folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 \underbrace{\Big[A_j(tx) + t \underbrace{\sum_{k=1}^{d} x_k \frac{\partial A_j}{\partial x_k}(tx)}_{\frac{d}{dt}[A_j(tx)]}\Big]}_{\frac{d}{dt}(tA_j(tx))} dt = tA_j(tx)\Big|_0^1$$

$$= A_j(x) \checkmark$$

Da $A \in C^1(B;\mathbb{R}^d) \Rightarrow f \in C^2(B;\mathbb{R})$ ✓ $\blacksquare$

16.8 Bemerkung: Zur "Wegzusammenhangskomponente (von $x \in B$)":

Man kann zeigen (!): Für $B \subseteq \mathbb{R}^d$ offen gilt:

$x \sim y :\Leftrightarrow \exists$ stückweise C^1-Kurve von x nach y

$\overset{!}{\Leftrightarrow} \exists$ C^0-Kurve von x nach y

("$\Rightarrow$" trivial). "Weg"
