15. Untermannigfaltigkeiten und der Satz von Gauß

15.1. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$

15.1. Definition Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ versehen mit Relativtop. des $\mathbb{R}^d$ (mit der Eukl. Top.), sei $n \in \mathbb{N}$, $n \leq d$.

(a) M n-dimensionaler C^1-(Unter-)Mannigfaltigkeit (des $\mathbb{R}^d$)

$:\Leftrightarrow$ $\forall a \in M \; \exists V \subseteq M$ offen in Relativtop. auf M mit $a \in V$, $\exists$ Kartengebiet $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\exists$ (lokale) Karte

$\varphi: T \to V$ mit
$\varphi = (\varphi_1, .., \varphi_d)$

(i) φ bijektiv
(ii) φ, φ^{-1} stetig } Homöomorphismus
(iii) φ stetig diff.bar
(iv) $$\operatorname{Rang} \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t)\right)_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 1 \leq k \leq n}}}_{\frac{\partial(\varphi_1, .., \varphi_d)}{\partial(t_1, .., t_n)}(t)} = n \quad \forall t \in T$$

(b) Sei A eine Indexmenge

Atlas von M $:\Leftrightarrow$ Familie von Karten $\{\varphi_\alpha : T_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha \in A}$ mit $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = M$

15.2. Bemerkung (a) (iii) heisst: $\varphi : T \to \mathbb{R}^d$ (T offen) diff.bar ($\varphi(T) = V \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^d$ nicht i.A. in $\mathbb{R}^d$ offen).
(iv) heisst, Matrix hat voller Rang $\forall t$

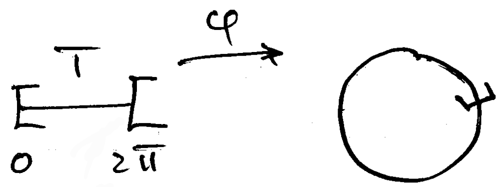
(b) Vorsicht: häufige Konvention anderswo:

Die Abbildung $V \to T$ heisst "Karte" (unsere dann „Parameterdarst.")

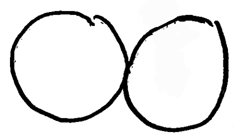
(c) Falls statt (iii): φ l-mal stetig diff. bar, $l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$
$\rightsquigarrow$ C^l - Mfkt.

(d) Konvention: j kartesischer Index für $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$; α Familienindex von φ in einem Atlas ($\varphi_\alpha : T_\alpha \to V_\alpha$).

15.3. Beispiel (a) Die Einheitsphäre in $\mathbb{R}^2$:
$S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ (Kreis!) ist 1-dim C^∞ - Mfkt.
Nur 2 Karten nötig für Atlas, z. B. Einschränkungen auf $]0, 2\pi[$ und $]-\pi, \pi[$ der Abb. $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

NB: 

keine zulässige Wahl, da T nicht offen in $\mathbb{R}$.

(b)  ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$ (Begr.: "Behaupt." am Ende Bew. Lemma 15.5)

15.4. Lemma Sei M C^1-Mfkt. Dann hat M abzählbaren Atlas.

Beweis: Aus Satz von Lindelöf (10.24), denn: Eukl. Top. $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^d$ erfüllt 2. AA. (Bsp. 10.14) $\Rightarrow$ $(M, \mathcal{T}_M)$ ← Relativtop. erfüllt 2. AA - denn: Sei $V \in \mathcal{T}_M \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T} : V = U \cap M$ u. V. gilt $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{n_j}$ ($\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ abz. Basis $\mathcal{T}$ - 2. AA)

$\Rightarrow V = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (B_{n_j} \cap M)$; d. h. $\{\underbrace{B_k \cap M}_{=: C_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist Basis von $\mathcal{T}_M$. $\boxtimes$

$\varphi^{-1}: V \to T$ macht M lokal flach und ist im folgenden Sinn diff-bar (NB: V i.A. nicht offen in $\mathbb{R}^d$!)

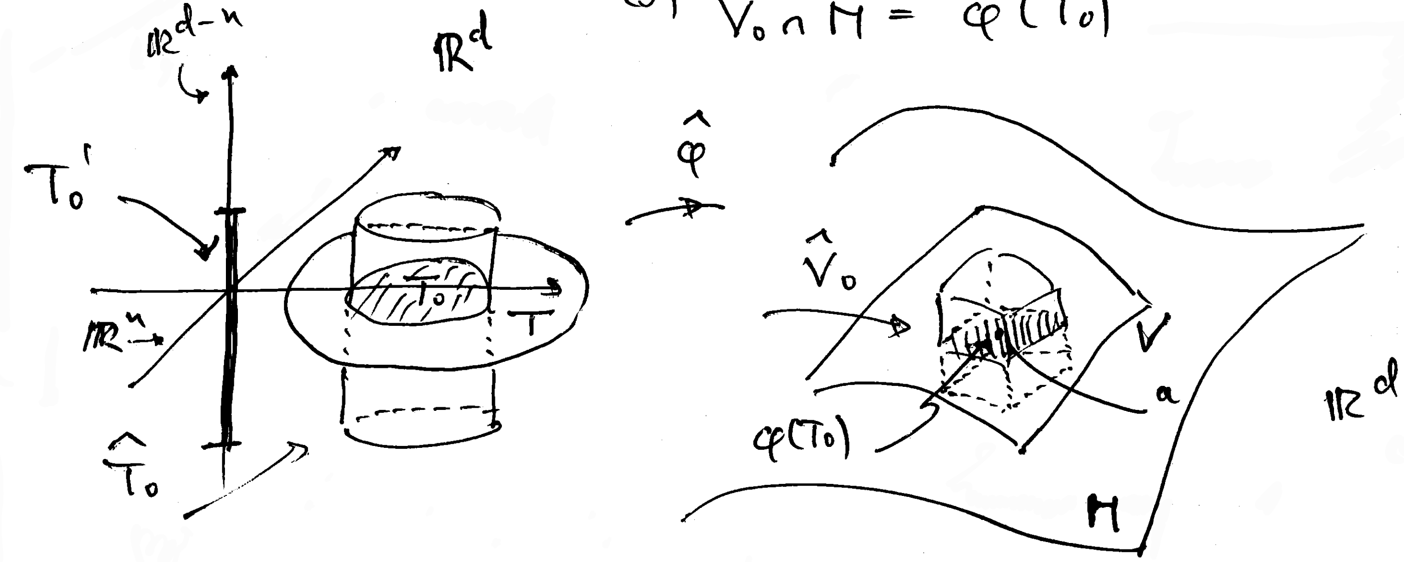
15.5. Lemma Sei $\varphi: T \to V$ Karte der C^1-Mfkt. M, sei $a \in V$.
Dann $\exists\, T_0 \subseteq T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $a \in \varphi(T_0)$, $T_0' \subseteq \mathbb{R}^{d-n}$ offene Umgebung der $0 \in \mathbb{R}^{d-n}$, und $\hat{V}_0 \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, sowie

$$\hat{\varphi}: \underbrace{T_0 \times T_0'}_{=: \hat{T}_0 \subseteq \mathbb{R}^d} \to \hat{V}_0 \quad (\text{„Flachmacher" bzgl. } a) \text{ mit}$$

(1) $\hat{\varphi}$ ist Diffeomorphismus

(2) $\hat{\varphi}\big|_{T_0 \times \{0\}} = \varphi\big|_{T_0}$

(3) $\hat{V}_0 \cap M = \varphi(T_0)$



Beweis: Def. 15.1. (iv) $\Rightarrow \exists\, 1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_n \le d$ mit

$$\text{Rang } \frac{\partial(\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_n})}{\partial(t_1, \dots, t_n)}(\tau) =: \text{Rang } J(\tau) = n, \quad \text{wobei } \tau := \varphi^{-1}(a)$$

O.E. sei $j_k = k \quad \forall k = 1, \dots, n$ (sonst nummeriere Koord. in $\mathbb{R}^d$ um; wenn Beh wahr für $\Pi \circ \varphi$ und $\Pi M \Rightarrow$ Beh. wahr für φ und M).
Π Perm.-Abb.

Sei $\delta > 0$, $\hat{t} := (t, t') \in T \times]-\delta, \delta[^{d-n} =: \hat{T}$; $\hat{\tau} := (\tau, 0)$

und $\hat{\varphi}_j(\hat{t}) := \varphi_j(t)$, $j = 1, .., n$

$\hat{\varphi}_j(\hat{t}) := \varphi_j(t) + t'_{j-n}$, $j = n+1, .., d$

$\Rightarrow$ $\hat{\varphi}$ stetig diff'bar. auf $\hat{T}$ mit

$$(D\hat{\varphi})(\hat{\tau}) = \frac{\partial(\hat{\varphi}_1, .., \hat{\varphi}_d)}{\partial(\hat{t}_1, .., \hat{t}_d)}(\hat{\tau}) = \begin{array}{c|cc} & t & t' \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ d \end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{c|ccc} J(\tau) & & 0 & \\ \hline & 1 & & \\ * & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right)} \end{array}$$

hat Rang d $\Rightarrow$ invertierbar

$\overset{\text{Kor. 2.6}}{\Longrightarrow}$ (Satz über Umkehrfkt.)

$\exists$ Umgebung $\hat{T}_0$ von $\hat{\tau}$ in $\mathbb{R}^d$ mit

$\hat{\varphi} : \hat{T}_0 \to \hat{\varphi}(\hat{T}_0) =: \hat{V}_0$ ist Diffeomorphismus

Durch weiteres <u>Verkleinern</u> kann man $\hat{T}_0$ von der Form $T_0 \times T_0'$ wählen (Dreiecksungleichung !) $\Rightarrow$ (1)

Da $\hat{\varphi}|_{T \times \{0\}} = \varphi|_T$ $\Rightarrow$ (2)

Zu (3): Kann durch weiteres Verkleinern von T_0 und δ erreicht werden, denn es gilt:

<u>Behauptung</u>: $\exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon^{(d)}(a) \cap M \subseteq \varphi(T_0)$

Bew. <u>Beh</u>: $\varphi(T_0)$ offen in Rel-top (d.h. $\varphi(T_0) \in \mathcal{J}_M$) & $a \in \varphi(T_0)$

$\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebung U_M von a in $\varphi(T_0)$

$\Rightarrow$ $U_M = U \cap M$, wobei U offen in $\mathbb{R}^d$ und

$a \in U$, also $U \cap M \subseteq \varphi(T_0)$ $\blacksquare$

15.6. Satz (Kartenwechsel)

Sei M n-dim. C^1-Mfkt. Dann gilt

(a) $n =: \dim M$ ist eindeutig bestimmt, d.h. falls

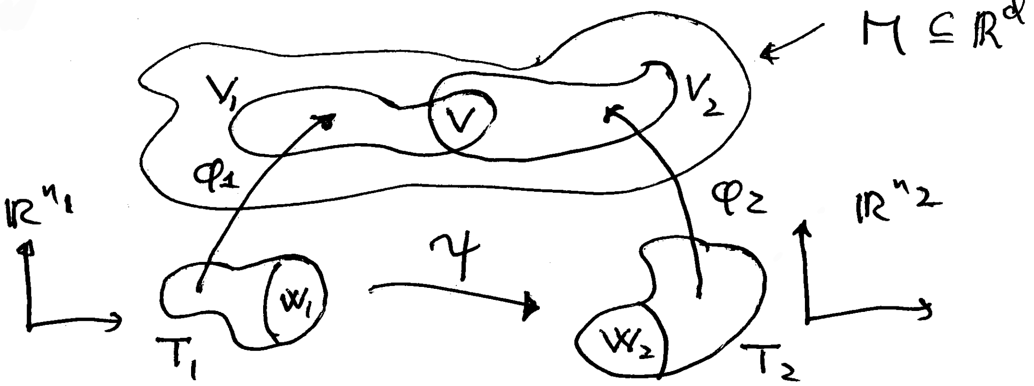
φ Karte von M mit Kartengebiet $\subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow m = n$.

(b) Für $\gamma = 1, 2$ sei $\varphi_\gamma : T_\gamma \to V_\gamma$ Karte von M (siehe 15.2(d))

mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ (V offen in M u. V.).

Sei $W_\gamma := \varphi_\gamma^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen in $\mathbb{R}^n$!).

Dann ist $\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W_1 \to W_2$ ein Diffeomorphismus



15.7. Bemerkung: (a) $\exists\, \psi : [0,1] \to [0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$

stetig & surjektiv (Peano-Kurve)! – aber:

ψ nicht injektiv.

(b) $\nexists$ Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen

von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ (siehe Übung)

(Nicht einmal ein Homöomorphismus!)

Beweis von Satz 15.6: Für $\gamma = 1,2$ seien $T_\gamma \subseteq \mathbb{R}^{n_\gamma}$ offen, $n_\gamma \in \mathbb{N}$, und $\varphi_\gamma : T_\gamma \to V_\gamma$ Karten mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

(i) ψ ist Homöom., da φ_1, φ_2 Homöom.'en.

(ii) Zur Diff.-barkeit: sei $a \in V$ beliebig fest,

sei $\tau_\gamma := \varphi_\gamma^{-1}(a) \in W_\gamma \subseteq T_\gamma$. Sei $\hat{\varphi}_\gamma : \hat{T}_{0,\gamma} \to \hat{V}_{0,\gamma}$ Flachmacher zu φ_γ bzgl. a (Notation wie in Lemma 15.5, mit angehängtem γ), d.h. $\hat{T}_{\gamma,0}$ ist offene Umgebung von $(\tau_\gamma, \underset{\in \mathbb{R}^{d-n_\gamma}}{0}) \in \mathbb{R}^d$, $\hat{V}_{\gamma,0}$ off. Umgeb. von a in $\mathbb{R}^d$

Sei $\hat{Y} := \hat{V}_{0,1} \cap \hat{V}_{0,2}$ ($\neq \emptyset$, da $\ni a$), offen in $\mathbb{R}^d$,

$\hat{X}_\gamma := \hat{\varphi}_\gamma^{-1}(\hat{Y})$ (offen in $\mathbb{R}^d$), $\hat{\psi} := \hat{\varphi}_2^{-1} \circ \hat{\varphi}_1 : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$

- Da $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ Diffeom.'en $\Rightarrow$ $\hat{\psi}$ Diffeom mit Umkehrung
$$\hat{\psi}^{-1} = \hat{\varphi}_1^{-1} \circ \hat{\varphi}_2$$
- Setze $X_\gamma := \hat{X}_\gamma \cap W_\gamma$ (offene Umgeb. von τ_γ in $\mathbb{R}^{n_\gamma}$)

(2) in Lem. 15.5 $\Rightarrow$ & $\hat{\varphi}_\gamma$ bijektiv
$$\hat{\psi}\left(\underset{\in \mathbb{R}^{d-n_1}}{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}}\right) = \underset{\in \mathbb{R}^{d-n_2}}{\begin{pmatrix} \psi(t) \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \forall t \in X_1 \quad (*)$$

(von rechts nach links lesen) $\Rightarrow$ ψ stetig diff.-bar in $\tau_1 \in W_1$

(aus $(*)$ $\Rightarrow$ $\psi_k(t) = \hat{\psi}_k\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ $\forall k = 1, \dots, n_2$

$\Rightarrow$ $\forall j = 1, \dots, n_1$, $\forall k = 1, \dots, n_2$: $(\partial_j \psi_k)(t) = (\partial_j \hat{\psi}_k)\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ existiert & ist stetig $\forall t \in X_1$)

Da $I_1 \in W_1$ bel. (da $a \in V$ bel.) $\Rightarrow \psi$ stetig diff.bar auf W_1

Analog: ψ^{-1} stetig diff.bar auf W_2 (vertausche $1 \leftrightarrow 2$)

$\overset{(i)}{\Rightarrow}$ ψ Diffeom. $\Rightarrow$ (b) ✓

(i) & (ii) $\Rightarrow$ ψ ist Diffeom. zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{n_1}$ & $\mathbb{R}^{n_2}$ $\overset{\text{Bem. 15.7(b)}}{\Rightarrow}$ $n_1 = n_2$ $\Rightarrow$ (a) ✓

Mfkt. als Lösungsmenge lokaler Gleichungssysteme (vgl. lin. Unterräume von $\mathbb{R}^d$ als Lösungsmenge eines lin. Glg.systems):

$\boxed{\text{15.8. Satz}}$ Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \leq d$.

Dann sind äquivalent:

(i) M ist n-dim. C^1-Mfkt.

(ii) $\forall a \in M$ $\exists$ offene Umgebung $\mathcal{U} \ni a$ in $\mathbb{R}^d$ und $\exists f_1, \dots, f_{d-n} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar mit

(1) $M \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : f_1(x) = \dots = f_{d-n}(x) = 0\}$

(2) $$\text{Rang } \frac{\partial(f_1, \dots, f_{d-n})}{\partial(x_1, \dots, x_d)}(a) = d-n$$

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)":

Benutze Flachmacher $\hat{\varphi}$ von Karte φ bzgl. a aus Beweis von Lem. 15.5 mit $U := \hat{V}_0$

und $f_j := (\hat{\varphi}^{-1})_{n+j}$ für $j = 1, \dots, d-n$.

(1) Folgt aus Eig.schaft (3) Lem. 15.5 & Def. von $\hat{\varphi}$

(2) Für (tot.) Differential von Umkehrfkt des Flachmachers gilt:

$$(D\hat{\varphi}^{-1})(a) = \left[(D\hat{\varphi})(\varphi^{-1}(a))\right]^{-1} = \begin{array}{c|cc} & 1 \cdots n & n+1 \cdots d \\ \hline \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ d \end{array} & \begin{array}{c} A \\ \\ -BA \end{array} & \begin{array}{c} 0 \\ \\ \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array} \end{array}$$

(durch Invert. der Matrix $(D\hat{\varphi})(\hat{t})$ im Bew. Lem. 15.5, wobei $A := \left[J(\varphi^{-1}(a))\right]^{-1}$ & B den $(d-n)\times n$ - Block dort mit "$*$" bezeichnet).

Die $(d-n)\times d$ - Matrix $\left(-BA \,\middle|\, \begin{smallmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{smallmatrix}\right)$ ist gerade $\frac{\partial(f_1,\dots,f_{d-n})}{\partial(x_1,\dots,x_d)}(a)$, und hat Rang $d-n$. ✓

„(i) ⇐ (ii)": Ziel: Konstruiere eine Karte φ!

(2) $\Rightarrow \exists\, 1 \le j_1 < \dots < j_{d-n} \le d$ mit

$$(*) \qquad \text{Rang}\, \frac{\partial(f_1,\dots,f_{d-n})}{\partial(x_{j_1},\dots,x_{j_{d-n}})}(a) = d-n \quad (\Rightarrow \text{invertierbar})$$

- o.E. sei $j_k = n+k$. $\forall k = 1,\dots,d-n$ (sonst umnummerieren)

Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von $(a_1,\dots,a_n) =: a'$

sei $U'' \subseteq \mathbb{R}^{d-n}$ " " " $(a_{n+1},\dots,a_d) =: a''$

so dass $U' \times U'' \subseteq U$ (geht wegen Dreiecks-Ungl.!)

$(U \ni a = (a', a''))$

Sei $F: \begin{array}{ccc} \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' & \longrightarrow & \mathbb{R}^{d-n} \\ (x', x'') & \longmapsto & \begin{pmatrix} f_1(x', x'') \\ \vdots \\ f_{d-n}(x', x'') \end{pmatrix} \end{array} \Rightarrow$ stetig diff-bar (n.V.)

und (n.V.) $M \cap (\mathcal{U}' \times \mathcal{U}'') = \{ (x', x'') \in \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' : F(x', x'') = 0 \}$

$(*) \Rightarrow$ Satz 9.4 (Impl. Fkt'en)

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}_0' \subseteq \mathcal{U}'$ offene Umg. von a',
$\exists\, \mathcal{U}_0'' \subseteq \mathcal{U}''$ " " " a'',

$\exists\, g : \mathcal{U}_0' \to \mathcal{U}_0''$ stetig diff-bar mit

$$(**) \quad M \cap (\mathcal{U}_0' \times \mathcal{U}_0'') = \{ (x', x'') \in \mathcal{U}_0' \times \mathcal{U}_0'' : x'' = g(x') \}$$

$$\Rightarrow \quad \varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_0' & \longrightarrow & M \cap (\mathcal{U}_0' \times \mathcal{U}_0'') \ (\subseteq \mathbb{R}^d) \\ \mathbb{R}^n \ni t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \end{array} \quad \text{stetig diff-bar}$$

mit $(D\varphi)(t) = \begin{array}{c} n \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & * & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} n \\ d-n \end{array}$ $\quad d \geq n \Rightarrow$ Rang n $\forall t \in \mathcal{U}_0'$

zudem

- φ injektiv per def.
- φ bijektiv wegen $(**)$
- φ^{-1} stetig, denn sei $x^1 := \varphi(t^1), x^2 := \varphi(t^2)$

$$\Rightarrow |\varphi^{-1}(x^2) - \varphi^{-1}(x^1)|_{\mathbb{R}^n} = |t^2 - t^1|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \left| \begin{pmatrix} t^2 \\ g(t^2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^1 \\ g(t^1) \end{pmatrix} \right|_{\mathbb{R}^d} = |x^2 - x^1|_{\mathbb{R}^d} \qquad \blacksquare$$

15.2. Tangential- und Normalenvektoren

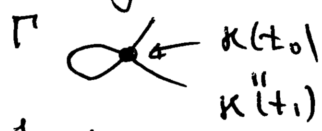
15.9. Definition (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall (auch uneigentliches), sei $t_0 \in I$.

$\kappa : I \to \mathbb{R}^d$ stetig diff-bar. $\quad$: $\quad$ C^1-Kurve (in $\mathbb{R}^d$)

mit C^1-Kurvenbogen $\Gamma := \kappa(I) \subseteq \mathbb{R}^d$

$v := \kappa'(t_0) \in \mathbb{R}^d$ Tangentialvektor von κ in $\kappa(t_0)$

- kann mehrere geben, falls κ nicht injektiv:



(b) Sei M C^1-Mfkt, $a \in M$ in $\mathbb{R}^d$.

$$\left.\begin{array}{l} v \in \mathbb{R}^d \text{ Tangentialvektor von } M \\ \text{in } a \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\, \varepsilon > 0 \text{ und } C^1\text{-Kurve} \\ \kappa :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subseteq \mathbb{R}^d : \\ \kappa(0) = a \quad \text{und } v = \kappa'(0) \end{array}\right.$$

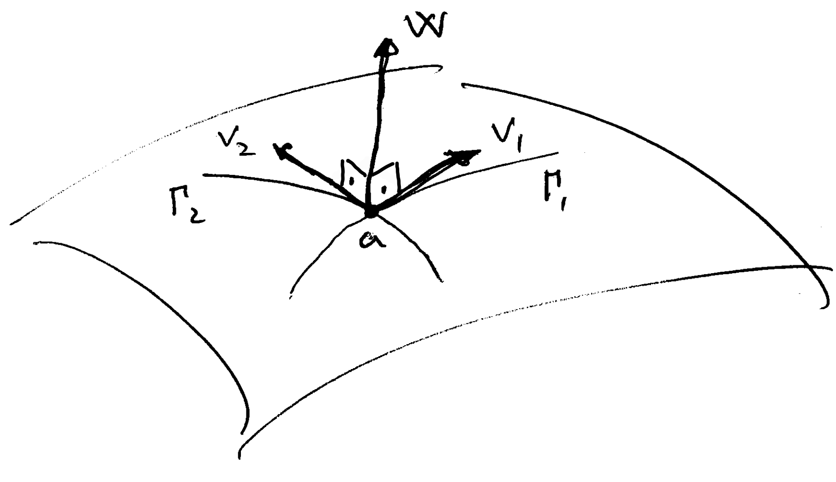
Tangentialraum von M in a:

$$T_a M := \{ v \in \mathbb{R}^d : v \text{ ist Tang. vektor von } M \text{ in } a \}$$

$$\left.\begin{array}{l} w \in \mathbb{R}^d \text{ Normalenvektor von } M \\ \text{in } a \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \quad w \perp T_a M$$

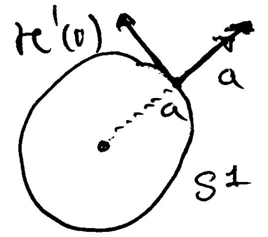
Normalenraum von M in a:

$$N_a M := \{ w \in \mathbb{R}^d : w \text{ ist Normalenvekt. von } M \text{ in } a \}$$



$M \subseteq \mathbb{R}^d$

15.10. Beispiel $M = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$



Sei $a = \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} \in S^1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

C^1-Kurve $\kappa : \begin{array}{l}]-\varepsilon, \varepsilon[\to S^1 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\lambda t + t_0) \\ \sin(\lambda t + t_0) \end{pmatrix} \end{array}$; $\kappa(0) = a$

$\kappa'(0) = \lambda \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix} \in T_a S^1 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Nächster Satz zeigt:

$T_a S^1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix} \right\}$ - und damit $N_a S^1 = \operatorname{span}\{a\}$

15.11. Satz Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ n-dim. C^1-Mfkt, sei $a \in M$. Dann gilt:

(a) $T_a M = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\varphi^{-1}(a)), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\varphi^{-1}(a)) \right\}$ lin. unab. per def.

ist Unabh. von Wahl der Karte $\varphi : T \to M$ mit $a \in \varphi(T)$.

Insbes.: $T_a M$ lin. Unterraum von $\mathbb{R}^d$, $\dim(T_a M) = n$

(b) Sei U offene Umgebung von a in $\mathbb{R}^d$ und $\exists f_1, \dots, f_{d-n} \in C^1(U)$ mit $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{d-n}(x) = 0\}$

und $\quad \operatorname{Rang} \frac{\partial(f_1, \dots, f_{d-n})}{\partial(x_1, \dots, x_d)} = d - n \quad$ (exist. nach Satz 15.8).

Dann ist

$$N_a M = \operatorname{span}\{(\nabla f_1)(a), \dots, (\nabla f_{d-n})(a)\}$$ lin. unab.

unabh. von Wahl der $f_1, \dots, f_{d-n}$.

Insbes.: $\dim(N_a M) = d - n$, und für alle $v \in T_a M$ und alle $j = 1, \dots, d-n$ gilt

$$v \cdot (\nabla f_j)(a) = 0$$

<u>Beweis</u>: Sei $X := \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(\varphi^{-1}(a)), \dots, \frac{\partial\varphi}{\partial t_n}(\varphi^{-1}(a)) \right\}$

$Y := \operatorname{span}\left\{ (\nabla f_1)(a), \dots, (\nabla f_{d-n})(a) \right\}$

<u>Also</u>: $X, Y^\perp$ sind je n-dim lin. Unterräume von $\mathbb{R}^d$ $(*)$

Wir zeigen: $X \subseteq T_a M \subseteq Y^\perp$ $\left(\overset{(*)}{\Rightarrow} X = T_a M = Y^\perp \to \text{alle Beh.}\right)$

„<u>$X \subseteq T_a M$</u>": Sei $v := \sum_{j=1}^{n} \underset{\mathbb{R}}{\underset{\cap}{\lambda_j}} \frac{\partial\varphi}{\partial t_j}(\underbrace{\varphi^{-1}(a)}_{=: t_0 \in \mathbb{R}^n}) \in X$ bel.

$\exists\, \varepsilon > 0 : B_{\tilde\varepsilon}(t_0) \subseteq T$ mit $\tilde\varepsilon := (\sqrt{n} \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j|)\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\kappa : \;]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$, $\tau \mapsto \varphi(t_{0,1} + \lambda_1\tau, \dots, t_{0,n} + \lambda_n \tau)$

ist wohldef C^1-Kurve mit $\kappa(0) = \varphi(t_0) = a$, $\kappa'(0) = v$
(Kettenregel!)

$\Rightarrow v \in T_a M$ ✓

„<u>$T_a M \subseteq Y$</u>": Sei $\kappa :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ bel. C^1-Kurve mit $\kappa(0) = a$, $\kappa'(0) = v$ (d.h. $v \in T_a M$). Da $\kappa(\tau) \in M$ $\forall |\tau| < \varepsilon$

$\Rightarrow f_j(\kappa(\tau)) = 0 \quad \forall |t| < \varepsilon, \quad \forall j = 1, \dots, d-n$

$\left(\frac{d}{d\tau} = 0\right) \Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{d\tau} f_j(\kappa(\tau))\Big|_{\tau=0} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)\, \kappa_k'(0)$

$= (\nabla f_j)(a) \cdot \underbrace{\kappa'(0)}_{v} \Rightarrow v \in Y^\perp$ ✓

☒

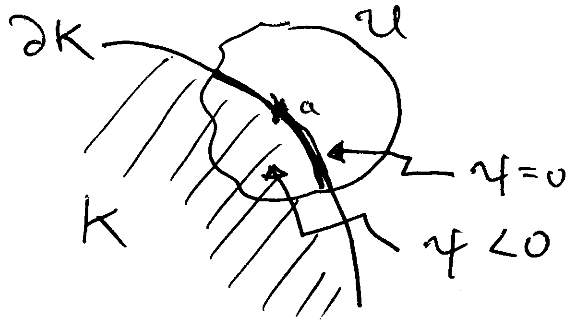
15.12. Definition Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$

K ist *d-dim. Teilmenge mit C^1-Rand* $:\Leftrightarrow$ $\forall a \in \partial K \; \exists$ offene Umgebung $\mathcal{U} \ni a$ in $\mathbb{R}^d$ sowie $\varphi \in C^1(\mathcal{U};\mathbb{R})$ mit

(1) $K \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : \varphi(x) \leq 0\}$

(2) $(\nabla\varphi)(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$

(3) $\partial K \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : \varphi(x) = 0\}$



15.13. Bemerkung

- (3) ist keine eigenständige Forderung, sondern folgt bereits aus (1) & (2) (siehe Forster 3, §15, p. 179–180) (8. Aufl.).
- Es genügt (2) für $x = a$ zu fordern, da $\varphi \in C^1$.
- Falls K zudem kompakt, nennen wir K *d-dim Kompaktum mit C^1-Rand*

15.14. Beispiel: $\overline{B_1(0)} := \overline{B_1^d(0)} := \{x \in \mathbb{R}^d : \underbrace{|x|^2 - 1}_{=:\varphi(x)} \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^d$

ist d-dim. Komp. mit C^1-Rand

$\Rightarrow \quad S^{d-1} := \partial\overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) = 0\}$ und

$N_a S^{d-1} = \operatorname{span}\{a\} \quad \forall a \in S^{d-1}$ (vgl. Bsp. 15.10.)

15.15. Satz Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine d-dim Teilmenge mit C^1-Rand. Dann ist ∂K eine $(d-1)$-dim C^1-Mfkt in $\mathbb{R}^d$

Beweis: Satz 15.8, (ii) $\Rightarrow$ (i), mit $n = d-1$ und $f_1 = \varphi$ $\blacksquare$

15.16. Satz u. Def. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine d-dim. Teilmenge mit C^1-Rand. Dann gilt

(a) $\forall a \in \partial K\ \exists!$ äußerer Normalen-Einheitsvektor

$$\nu(a) := \frac{(\nabla \psi)(a)}{|(\nabla \psi)(a)|} \in \mathbb{R}^d \quad (\psi \text{ wie in Def. 15.12})$$

von K in a, mit

(1) $\nu(a) \perp T_a(\partial K)$

(2) $|\nu(a)| = 1$

(3) $\exists \varepsilon_0 > 0 : a + \varepsilon \nu(a) \notin K \ \forall \varepsilon \in \,]0, \varepsilon_0[$

(b) Das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld

$$\nu : \begin{array}{l} \partial K \to \mathbb{R}^d \\ a \mapsto \nu(a) \end{array}$$

ist stetig.

Beweis: Sei $a \in \partial K$, ψ wie in Def. 15.12 $\Rightarrow \nu(a)$ wohldef. & erfüllt (2); Stetigkeit klar ($\psi \in C^1$); (1) folgt wie Bew. 15.11(b) & 15.15.

zu (3): $$\psi(a + \varepsilon \nu(a)) \overset{\text{diff-bar}}{=} \underbrace{\psi(a)}_{0} + \underbrace{(\nabla\psi)(a) \cdot \varepsilon \nu(a)}_{|(\nabla\psi)(a)| \cdot \varepsilon} + o(\varepsilon) \quad (\varepsilon \to 0)$$

$\Rightarrow \psi(a + \varepsilon \nu(a)) > 0 \ \forall \varepsilon > 0$ hinreichend klein

$\Rightarrow a + \varepsilon \nu(a) \notin K$.

Bleibt noch Eindeutigkeit: Satz 15.11(b) & (1)

$\Rightarrow$: $\tilde{\nu} \in N_a(\partial K) = \operatorname{span}\{(\nabla\psi)(a)\}$, $|\tilde{\nu}| = 1$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \tilde{\nu} = \pm \nu(a) \overset{(3)}{\Rightarrow} \tilde{\nu} = + \nu(a)$ ∎

15.17 Beispiel: Für S^{d-1} (siehe Bsp. 15.14) ist $\nu(a) = a \ \forall a \in S^{d-1}$.

15.3. Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Faktum: (!) Für $n < d$ ist die n-dim Mfkt. M eine Nullmenge bzgl. λ^d.

Idee: Lebesgue-Maß auf $M \cap \underset{\uparrow \text{Karte}}{\varphi(T)}$ = Bildmaß unter φ von geeignetem Maß auf Kartengeb. $T \subseteq \mathbb{R}^n$, so, daß Ergebnis unabh. von Wahl der Karte.

Zentrale Rolle dabei:

15.18. Definition $M \subseteq \mathbb{R}^d$ n-dim C^1-Mfkt., $\varphi: T \to M$ Karte, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$: Sei

$$G_{\alpha\beta}: \begin{array}{l} T \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial t_\alpha}(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_\beta}(t) \end{array},$$

(Skalarprod. in $\mathbb{R}^d$)

Dann heißt

$$G := G_\varphi: \begin{array}{l} T \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \\ t \mapsto (G_{\alpha\beta}(t))_{1 \le \alpha, \beta \le n} \end{array} = [(D\varphi)(t)]^T (D\varphi)(t)$$

(T: transponierte)

Gram-Matrix / metrischer Tensor, und

$$g := g_\varphi: \begin{array}{l} T \to [0, \infty[\\ t \mapsto \det G(t) = \det [(D\varphi)(t)]^T (D\varphi)(t) \end{array}$$

die Gram-Determinante / Gramsche Determinante.

15.19. Bemerkung:

$$G(t) = [(D\varphi)(t)]^T (D\varphi)(t) \quad \forall t \in T$$

$\Rightarrow$ $G(t) \geq 0$ (siehe 8.35 & 8.37) (denn $v \cdot A^T A v = (Av) \cdot (Av) \geq 0$)

$\Rightarrow$ $G(t)$ diagonalisierbar; nicht-neg Eigenwerten; $g(t)$ Produkt Eigenwerte.

Trafo-Verhalten von g unter Kartenwechsel:

15.20. Lemma Sei M n-dim. C^1-Mfkt., seien $\varphi: T \to V \subseteq M$, $\tilde{\varphi}: \tilde{T} \to \tilde{V} \subseteq M$ zwei Karten mit $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$, sowie $W := \varphi^{-1}(V \cap \tilde{V})$, $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(V \cap \tilde{V})$ und $\psi := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : W \to \tilde{W}$ (Diffeom. laut Satz 15.6.)

Dann gilt
$$g(t) = \left[\det(D\psi)(t)\right]^2 \tilde{g}(\psi(t)) \quad \forall t \in W$$
wobei $g := g_\varphi$, $\tilde{g} := g_{\tilde{\varphi}}$ Gram-Determ. bzgl. Karten φ & $\tilde{\varphi}$

Beweis: $\varphi(t) = (\tilde{\varphi} \circ \psi)(t) \overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} (D\varphi)(t) = (D\tilde{\varphi})(\psi(t)) \cdot (D\psi)(t)$

$$\Rightarrow g(t) = \det\left[(D\varphi)(t)\right]^T (D\varphi)(t)$$
$$\overset{(AB)^T = B^T A^T}{=} \det\Big[\underbrace{(D\psi)(t)^T}_{n\times n\text{-Matrix}} \underbrace{\left((D\tilde{\varphi})(\psi(t))\right)^T (D\tilde{\varphi})(\psi(t))}_{n\times n\text{-Matrix}} \underbrace{(D\psi)(t)}_{n\times n\text{-Matrix}}\Big]$$

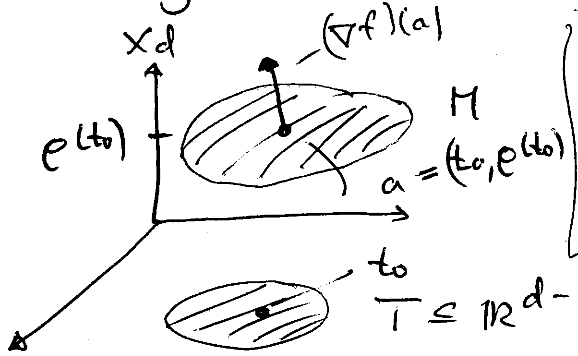
$\Rightarrow$ Beh. mit $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ & $\det A^T = \det A$ ∎

15.21. Beispiel (Graphen) $(n = d-1)$ Sei $T \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ offen, $\rho \in C^1(T; \mathbb{R})$. Für
$$x := ((x_1, \ldots, x_{d-1}), x_d) \in T \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^d,$$
$$f(x) := x_d - \rho(x_1, \ldots, x_{d-1}), \quad f: T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
gilt
$$(\nabla f)(x) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(x_1, \ldots, x_{d-1}) \\ \vdots \\ -\frac{\partial \rho}{\partial x_{d-1}}(x_1, \ldots, x_{d-1}) \\ 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\nabla\rho(x_1, \ldots, x_{d-1})^T \\ 1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^d$$
where $\nabla\rho(x_1,\ldots,x_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$,
$$(\nabla f)(x) \neq 0, \qquad (\nabla f)(x) = (-\nabla\rho(x_1, \ldots, x_{d-1}), 1)$$

(a)
$$M := \{x \in T \times \mathbb{R} : x_d = \rho(x_1, \dots, x_{d-1})\} \quad (\underline{\text{Graph von } \rho})$$
$$= \{x \in T \times \mathbb{R} : f(x) = 0\}$$

ist $(d-1)$ - dim. $\underline{C^1\text{- Mfkt.}}$ mit globaler $\underline{\text{Karte}}$

$$\varphi : \begin{array}{l} T \to \mathbb{R}^d \\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \rho(t) \end{pmatrix} \end{array}$$



Siehe Ana2, Tut. Auf. 11, T4

(b) $\underline{\text{Normalenraum}}$ von M

in $a = (t_0, \rho(t_0))$:

$$N_a M = \operatorname{span}\{(\nabla f)(a)\} = \operatorname{span}\{(-\nabla\rho(t_0), 1)\} \quad (\text{siehe 15.11 (b)})$$

(c) $\underline{\text{Gram-Matrix und -Determinante}}$:

$$(D\varphi)(t) = \left.\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline \underbrace{(\partial_1\rho)(t) \; \cdots \; (\partial_{d-1}\rho)(t)}_{d-1} \end{pmatrix}\right\} d = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} \\ \hline (\nabla\rho)(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G(t) = (D\varphi)(t)^T (D\varphi)(t) = \left(\mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} \;\vdots\; (\nabla\rho)(t)^T \right) \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} \\ \hline (\nabla\rho)(t) \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} + P(t), \quad P_{\alpha\beta}(t) := (\partial_\alpha\rho)(t)(\partial_\beta\rho)(t)$$
$$\alpha, \beta = 1, \dots, d-1$$

P ist Orthogonalprojektor (in $\mathbb{R}^{d-1}$)

auf Vektor $(\nabla\rho)(t)^T$, d.h. $\forall v \in \mathbb{R}^{d-1}$: $Pv = [\underbrace{(\nabla\rho)(t) \cdot v}_{\in \mathbb{R}}] (\nabla\rho)(t)^T$

$\Rightarrow G(t)$ selbstadj. $(d-1)\times(d-1)$ - Matrix,

Eigenwerte $1 + |(\nabla\rho)(t)|^2, \underbrace{1, \dots, 1}_{d-2 \text{ Stück}}$

$$\Rightarrow \boxed{g(t) = 1 + |(\nabla\rho)(t)|^2}$$

15.22. Def. & Satz Sei M n-dim. C^1-Mfkt. in $\mathbb{R}^d$ mit Atlas $\{\varphi_\alpha : T_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ (siehe Lem. 15.4) und der Zerlegung

$$M = \dot{\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}}} U_\alpha \quad \text{wobei } U_\alpha \subseteq V_\alpha,\ U_\alpha \in \mathcal{B}^d \cap M.$$

Sei $g_\alpha := g_{\varphi_\alpha}$ Gram-Determinante bzgl. Karte φ_α.

Dann gilt:

$$\lambda_M : \begin{array}{l} \mathcal{B}^d \cap M \longrightarrow [0,\infty] \\ B \longmapsto \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}} \int\limits_{\varphi_\alpha^{-1}(B\cap U_\alpha)} \sqrt{g_\alpha(t)}\, d\lambda^n(t) \end{array}$$

ist ein Maß, das Lebesgue-(Borel)-Maß auf M (auch: Flächen-Maß), und unabhängig von Wahl des abzähl. Atlas (Notation: $d\sigma_M$, dS, ...)

Beweis: λ_M ist ein Maß: Für $\alpha\in\mathbb{N}$ ist

$$\tau_\alpha := \tau_{\varphi_\alpha} : \begin{array}{l} \mathcal{B}^n \cap \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow [0,\infty] \\ S' \longmapsto \int\limits_{S'} \sqrt{g_\alpha(t)}\, d\lambda^n(t) \end{array} \qquad (*)$$

ein Maß (Leb. Maß mit Dichte - klar!).

$\Rightarrow$ Bildmaß $\varphi_\alpha(\tau_\alpha)$ ist Maß auf $\mathcal{B}^d \cap U_\alpha$

$$\Rightarrow \quad \lambda_M = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} (\varphi_\alpha(\tau_\alpha))(\,\cdot\, \cap U_\alpha) \qquad (**)$$

ist Maß auf $\mathcal{B}^d \cap M$ (verwende „großen Umordnungssatz für Reihen" - Fubini für Zählmaß - für σ-Additivität).

Unabh. von λ_M von Wahl der Karte:

Seien $\varphi, \tilde\varphi$ zwei Karten wie in Lemma 15.20

$\Rightarrow \psi := \tilde\varphi^{-1} \circ \varphi : W \to \tilde W$ ist Diffeom. und für alle $B \in \mathcal{B}^d \cap (V \cap \tilde V)$ gilt ($\varphi(\mathcal{I})$, $\tilde\varphi(\tilde{\mathcal{I}})$ Bildmaße von $\mathcal{I}, \tilde{\mathcal{I}}$ wie in (*)):

$$(\varphi(\mathcal{I}))(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \underbrace{\sqrt{g(t)}}_{\substack{\text{Lem. 15.20} \\ = \\ |\det(D\psi)(t)|\sqrt{\tilde g(\psi(t))}}} \, d\lambda^n(t) \overset{\text{Trafo-Form. 14.21}}{=} \int_{\underbrace{\psi(\varphi^{-1}(B))}_{\tilde\varphi^{-1}(B)}} \sqrt{\tilde g(\tilde t)} \, d\lambda^n(\tilde t)$$

$$= (\tilde\varphi(\tilde{\mathcal{I}}))(B)$$

– d.h. Bildmaße auf M stimmen im Schnittgebiet überein

$\Rightarrow$ Beh. folgt mit Form von λ_M in (**) ∎

$\boxed{\text{15.23 Korollar}}$ Mit der Notation des vorigen Satzes gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(M, \mathcal{B}^d \cap M, \lambda_M) \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha)} f_\pm(\varphi_\alpha(t)) \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t) < \infty$$

In dem Fall:

$$\int_M f(x) \, d\lambda_M(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha)} f(\varphi_\alpha(t)) \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t). \quad (*)$$

Beweis: Sei $B \in \mathcal{B}^d \cap M$, dann

$$\int_M \mathbb{1}_B(x) \, d\lambda_M(x) = \lambda_M(B) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(B \cap V_\alpha)} \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t)$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha)} \mathbb{1}_B(\varphi_\alpha(t)) \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t) \quad \Rightarrow (*) \text{ gilt für } \mathbb{1}_B$$

$\Rightarrow$ (*) gilt für Elem. Fkt. $\overset{\text{monotone Konv.}}{\Rightarrow}$ (*) ok für $f \geq 0$, $\mathcal{B}^d \cap M$-messbar $\Rightarrow$ Beh. ∎

15.24 Beispiel (a) Sphäre $S_r^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = r\}$, $r > 0$

2 Karten: $\varphi : \begin{array}{l}]0,2\pi[\to S_r^1 \\ t \mapsto r\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\end{array}$, $\tilde\varphi : \begin{array}{l}]-\pi,\pi[\to S_r^1 \\ t \mapsto r\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\end{array}$

Sei $U := S_r^1 \setminus \left\{\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\tilde U := \left\{\begin{pmatrix}r\\0\end{pmatrix}\right\}$;

$\Rightarrow \tilde\varphi^{-1}(\tilde U) = \{0\}$ Nullmenge von λ^1 ($\Rightarrow$ keine Rolle!)

$\forall t \in \varphi^{-1}(U) =]0,2\pi[$: $(D\varphi)(t) = r\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$

$\Rightarrow G(t) = r^2(-\sin t, \cos t)\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = r^2 \Rightarrow g(t) = r^2$

Also: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ messbar ($\Rightarrow f|_{S_r^1}$ $\mathcal{B}^2 \cap S_r^1$-messbar)

$\Rightarrow f|_{S_r^1} \in \mathcal{L}^1(S_r^1, \lambda_{S_r^1}) \Leftrightarrow t \mapsto f(r\cos t, r\sin t) \in \mathcal{L}^1(]0,2\pi[, \lambda^1)$

und
$$\int_{S_r^1} f(x)\, d\lambda_{S_r^1}(x) = r\int_{]0,2\pi[} f(r\cos t, r\sin t)\, dt \qquad (dt = d\lambda^1(t))$$

(man kann $]0,2\pi[$ mit $[0,2\pi]$ ersetzen).

(b) Analog: Sphäre $S_r^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\}$, $r > 0$

Sei Φ Kugelkoordinaten (Bsp. 14.25), und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ messbar

$\Rightarrow f|_{S_r^2} \in \mathcal{L}^1(S_r^2, \lambda_{S_r^2}) \Leftrightarrow (\theta,\varphi) \mapsto (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)\sin\theta \in \mathcal{L}^1(]0,2\pi[\times]0,\pi[, \lambda^2)$

und
$$\int_{S_r^2} f(x)\, d\lambda_{S_r^2}(x) = r^2 \int_{]0,2\pi[}\int_{]0,\pi[} (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

(siehe Üb).

(c) Allgemeiner: Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f\, d\lambda^d &= \int_0^\infty \left(\int_{S_r^{d-1}} f(x)\, d\lambda_{S_r^{d-1}}(x)\right) dr \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{S^{d-1}} f(ry)\, d\lambda_{S^{d-1}}(y)\right) r^{n-1}\, dr.\end{aligned}}$$

(siehe Üb.; Fall $d=2$ aus (a) & Bsp. 14.24; $d=3$: (b) & 14.25).

(d) Graphen: $M = \{x \in T \times \mathbb{R} : x_d = \rho(x_1, \dots, x_{d-1})\}$, $\rho \in C^1(T, \mathbb{R})$, φ die globale Karte (siehe Bsp. 15.21). Dann ist

$$\lambda_M(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{1 + |(\nabla\rho)(t)|^2}\, d\lambda^{d-1}(t) \quad \forall B \in M \cap \mathcal{B}^d,$$

Insbes.

$$\lambda_M(M) = \int_T \sqrt{1 + |\nabla\rho(t)|^2}\, d\lambda^{d-1}(t).$$

Wenn $f \in \mathcal{L}^1(M, \lambda_M)$, dann

$$\boxed{\int_M f(x)\, d\lambda_M(x) = \int_T f(t, \rho(t)) \sqrt{1 + |(\nabla\rho)(t)|^2}\, d\lambda^{d-1}(t)}$$

15.4. Satz von Gauß

Mehrdim. Analogon des HDI (& part. Integration)

Zur Vorbereitung ein lokaler Spezialfall

15.25. Lemma Sei $\mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ offen, $I =]\alpha, \beta[$ Intervall, und $\rho \in C^1(\mathcal{U}'; I)$. Sei

$$A := \{ (x', x_d) \in \mathcal{U}' \times \mathbb{R} : x_d \leq \rho(x') \}.$$

$$M := \{ (x', x_d) \in \mathcal{U}' \times I : x_d = \rho(x') \}$$

und $f \in C_c(\mathcal{U}' \times \mathbb{R})$. Dann gilt, $\forall k = 1, .., d$,

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\, d\lambda^d(x) = \int_M f(x)\, \nu_k(x)\, d\lambda_M(x),$$

wobei

$$\underset{(x', x_d)}{\nu(\underset{\sim}{x})} = \underbrace{\left[1 + |(\nabla\rho)(x')|^2\right]^{-1/2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -(\nabla\rho)(x')^T \\ \hline 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} d-1 \\ \hline 1 \end{array}$$

($\nu(x) \in \mathbb{R}^d$) der äußere Normalen-Einheitsvektor in $x \in M$ ist (vgl. Satz 15.16 mit $\varphi(x) = x_d - \rho(x')$ für Interpretation von ν).

Beweis: Nach Bsp. 15.21: globale Karte $\begin{array}{l} U' \to \mathbb{R}^d \\ x' \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ \rho(x') \end{pmatrix} \end{array}$

der $(d-1)$-dim. C^1-Mfkt. M

mit $g(x') = 1 + |(\nabla\rho)(x')|^2 \quad \forall x' \in \mathcal{U}'$

$$\overset{\text{Bsp. 15.24(a)}}{\Longrightarrow} \int_M f(x)\, \nu(x)\, d\lambda_M(x) = \int_{U'} f(x', \rho(x'))\, \nu(x', \rho(x'))\, \sqrt{g(x')}\, d\lambda^{d-1}(x')$$

$$(*) \qquad = \int_{U'} f(x', \rho(x')) \begin{pmatrix} -(\nabla\rho)(x')^T \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda^{d-1}(x')$$

(Komponentenweise).

Andererseits gilt im Fall

$\underline{k=d}$: $\displaystyle\int_A \frac{\partial f}{\partial x_d}(x)\,d\lambda^d(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{U'} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\rho(x')} \frac{\partial f}{\partial x_d}(x',x_d)\,dx_d\right)}_{f(x',\rho(x')) - \underbrace{\lim_{\xi\to-\infty} f(x',\xi)}_{=0 \,:\, \operatorname{supp} f \text{ kpt.}}} d\lambda^{d-1}(x')$

mit (*) $\Rightarrow$ Beh. ✓

$\underline{1 \le k \le d-1}$:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_k}\,d\lambda^d(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{U'} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\rho(x')} \frac{\partial f}{\partial x_k'}(x',x_d)\,dx_d\right)}_{\text{Kettenregel + Satz 12.48(b)}} d\lambda^{d-1}(x')$$

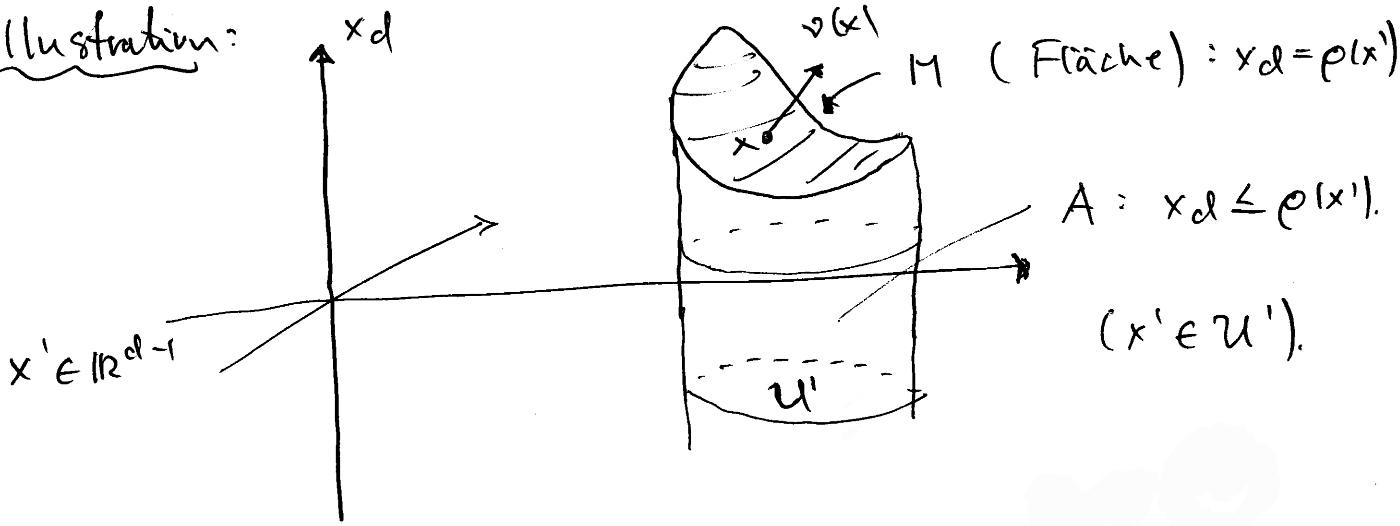
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k'} \underbrace{\int_{-\infty}^{\rho(x')} f(x',x_d)\,dx_d}_{=:F(x')}\right) - f(x',\rho(x'))\frac{\partial \rho}{\partial x_k'}(x')$$

$$= I + \int_{U'} f(x',\rho(x'))\left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_k'}\right)(x')\,d\lambda^{d-1}(x')$$

Es gilt $I = 0$, da supp F kpt in U' & Tut. Blatt 10, Auf. 2

$\Rightarrow$ Beh. mit (*). ∎

Illustration:



Nun die globale Version:

15.26. Integralsatz von Gauß (auch: Divergenzsatz oder Satz von Ostrogradski)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $F \in C^1(A; \mathbb{R}^d)$ stetig diff.bares Vektorfeld, und $K \subseteq A$ Kompaktum mit C^1-Rand. Dann gilt:

$$\int_K \underbrace{(\nabla \cdot F)}_{\text{Divergenz von } F}(x)\, d\lambda^d(x) = \int_{\partial K} F(x) \cdot \underbrace{\nu(x)}_{\text{äußeres Einheits-Normalenfeld}}\, d\lambda_{\partial K}(x)$$

15.27. Bemerkung: Satz gilt auch, wenn ∂K nur glatt bis auf eine $(d-1)$-dim Nullmenge; Beispiel: Würfel! (siehe z.B. Kaballo, "Einführung in die Analysis III").

Beweisstrategie: Durch Zusammensetzen des lokalen Resultats (in Lem. 15.25) mittels Teilung der Eins (siehe 13.18 & 13.19)

Noch ein technischer Hilfssatz:

15.28. Lemma (Lebesgue) Sei M metrischer Raum und $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge. Sei $K \subseteq M$ kompakt und $\{U_j\}_{j \in J}$ offene Überdeckung von K.
Dann existiert $l > 0$ (Lebesgue-Zahl):

$$\forall A \subseteq M \text{ mit } A \cap K \neq \emptyset \text{ und } \operatorname{diam}(A) \leq l$$
$$\exists j \in J: A \subseteq U_j.$$

Beweis (15.28) $\forall x \in K \; \exists r_x > 0 \;\&\; j_x \in J : B_{r_x}(x) \subseteq \mathcal{U}_{j_x}$

$\Rightarrow \{ B_{\frac{r_x}{2}}(x) \}_{x \in K}$ ist offene Überdeckung von K

$\overset{K \text{ kpt.}}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_N \in K : \; K \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} B_{\frac{r_{x_n}}{2}}(x_n)$

Setze $\ell := \min \left\{ \frac{r_{x_1}}{2}, \dots, \frac{r_{x_N}}{2} \right\}$

Sei nun $A \cap K \neq \emptyset$, $\operatorname{diam}(A) \leq \ell$ und $a \in A \cap K$

$\Rightarrow \exists n := n_a \in \{1, \dots, N\} : \; a \in B_{\frac{r_{x_n}}{2}}(x_n)$

$\overset{\operatorname{diam}(A) \leq \ell}{\Rightarrow} \quad A \subseteq B_{r_{x_n}}(x_n) \subseteq \mathcal{U}_{j_{x_n}}$ ■

Beweis von Satz 15.26:

1) Sei $a \in \partial K$

von a abh.

$\overset{K\, C^1\text{-Rand}}{\Rightarrow} \exists$ (in $\mathbb{R}^d$) offene Umgeb. $\mathcal{U}$ von a und $\exists \psi \in C^1(\mathcal{U})$:

(a) $(\nabla \psi)(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$

(b) $\partial K \cap \mathcal{U} = \{ x \in \mathcal{U} : \psi(x) = 0 \}$

(c) $K \cap \mathcal{U} = \{ x \in \mathcal{U} : \psi(x) \leq 0 \}$

(a) $\Rightarrow \exists \underset{j_a}{\underset{\parallel}{j}} \in \{1, \dots, d\} : \; (\partial_j \psi)(a) \neq 0$

j'te Komponente fehlt.

Für $x \in \mathcal{U}$ sei $\mathbb{R}^{d-1} \ni x' := (\dots x_{j-1}, x_{j+1}, \dots)$

Sei $G(x', x_j) := \psi(x)$; u.V. $\exists \delta > 0$:

$$\underbrace{B^{(d-1)}_{\frac{\delta}{2}}(a')}_{=: \mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^{d-1}} \times \underbrace{B^{(1)}_{\frac{\delta}{2}}(a_j)}_{=: I \subseteq \mathbb{R}} \underset{\text{(Dreiecksungl.)}}{\subseteq} B^{(d)}_{\delta}(a) \subseteq \mathcal{U}$$

$\Rightarrow G \in C^1(\mathcal{U}' \times I)$ mit $\frac{\partial G}{\partial x_j}(a', a_j) = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(a) \neq 0$

und $\partial K \cap (\mathcal{U}' \times I) = \{ (x', x_j) \in \mathcal{U}' \times I : G(x', x_j) = 0 \}$

Satz 9.4 $\Rightarrow$ (Impl. Fkt'en)

$\exists\, \mathcal{U}_0' \subseteq \mathcal{U}'$ off. Umg. von a'

$\exists\, I_0 \subseteq I$ " " " a_j

$\exists\, \rho \in C^1(\mathcal{U}_0'; I_0)$ mit

$$\partial K \cap (\mathcal{U}_0' \times I_0) = \{ (x', x_j) \in \mathcal{U}_0' \times I_0 : \rho(x') = x_j \}$$

Da $K \cap \mathcal{U} = \{ (x', x_j) \in \mathcal{U} : G(x', x_j) \leq 0 \}$

(für $\mathcal{U}_0'$, I_0 genü. klein) $\Rightarrow$

$$K \cap (\mathcal{U}_0' \times I_0) = \{ (x', x_j) \in \mathcal{U}_0 \times I_0 : x_j \leq \rho(x') \}.$$

<u>Moral</u>: K wird <u>lokal</u> um $a \in \partial K$ wie in Lemma 15.25 beschrieben (modulo $j \Leftrightarrow d$).

Setze $\mathcal{U}_a := \mathcal{U}_0' \times I_0$

2) Für $r > 0$, sei $V_r := \{ x \in K : \operatorname{dist}(x, \partial K) > r \} \Rightarrow V_r \subseteq \mathring{K}$ offen ($x \mapsto \operatorname{dist}(x, \partial K)$ Lipschitz)

Da (!) $\mathring{K} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{\frac{1}{n}}$ und K kpt.

$\Rightarrow \exists\, r_0 > 0$: $K \subseteq \left(\bigcup_{a \in \partial K} \mathcal{U}_a \right) \cup V_{r_0}$. Sei l die zugeh. Lebesgue-Zahl (Lemma 15.28)

Setze $\varepsilon := \frac{l}{2\sqrt{d}} > 0$, sei $\{ \gamma_{p,\varepsilon} \}_{p \in \mathbb{Z}^d}$ C^∞-Teilung der Eins (siehe 13.18 & 13.19) $\Rightarrow$ diam $\underbrace{\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon}}_{\in \text{ Würfel mit Kantenlänge } 2\varepsilon} \leq l$

Sei $P_K := \{ p \in \mathbb{Z}^d : \operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \cap K \neq \emptyset \}$

$\Rightarrow P_K$ endlich (da K beschränkt)

Lem. 15.28

$\Rightarrow$ $\forall p \in P_K$ gilt entweder: $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \subseteq V_{r_0}$

oder: $\exists a \in \partial K$: $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \subseteq \mathcal{U}_a$

Da $F(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\varepsilon}(x) F(x) \quad \forall x \in K \quad \left(\sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\varepsilon} = 1 \quad ! \right)$

$$\Rightarrow \int_K (\nabla \cdot F)(x)\, d\lambda^d(x) = \sum_{p \in P_K} \int_K (\nabla \cdot (\gamma_{p,\varepsilon} F))(x)\, d\lambda^d(x)$$

$$\int_{\partial K} F(x) \cdot \nu(x)\, d\lambda_{\partial K}(x) = \sum_{p \in P_K} \int_{\partial K} (\gamma_{p,\varepsilon}(x) F(x)) \cdot \nu(x)\, d\lambda_{\partial K}(x)$$

Moral: es genügt Satz für C^1-Vektorfeld $\gamma_{p,\varepsilon} F$ zu zeigen

3) Sei $k \in \{1, \dots, d\}$, $p \in P_K$, $f_k := \gamma_{p,\varepsilon} F_k$ $\quad (F = (F_1, \dots, F_d))$

1. Fall: $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \subseteq V_{r_0} \Rightarrow \int_{\partial K} f_k(x) \nu_k(x)\, d\lambda_{\partial K}(x) = 0$

da $\partial K \cap V_{r_0} = \emptyset$

Andererseits: $\displaystyle\int_K \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)\, d\lambda^d(x) \underset{\uparrow \text{ Tut. 10, Aufg. 2 (ii)}}{=} 0$

da $\operatorname{supp} f_k \cap \partial K \subseteq V_{r_0} \cap \partial K = \emptyset$

($\operatorname{supp} f_k$ kompakt in K enthalten)

$\Rightarrow$ Satz gilt für $\gamma_{p,\varepsilon} F$ ✓

2. Fall: $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \subseteq \mathcal{U}_a$

Nach 1) folgt aus Lemma 15.25:

$$\int_K \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)\, d\lambda^d(x) = \int_{K\cap\mathcal{U}_a} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)\, d\lambda^d(x)$$

$$= \int_{\partial K\cap\mathcal{U}_a} f_k(x)\nu_k(x)\, d\lambda_{\partial K\cap\mathcal{U}_a}(x) = \int_{\partial K} f_k(x)\nu_k(x)\, d\lambda_{\partial K}(x)$$

$\overset{\sum_{k=1}^{d}}{\Longrightarrow}$ Beh. $\boxtimes$

15.29. Beispiel (a) $K \subseteq \mathbb{R}^d$ Kompaktum mit C^1-Rand,

$F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $F(x) := x$; $F \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$,

$\Rightarrow (\nabla\cdot F)(x) = d \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$, also $\int_K (\nabla\cdot F)(x)\, d\lambda^d(x) = d\,\lambda^d(K)$

$\overset{\text{Satz von Gauß}}{\Longrightarrow}$

$$\lambda^d(K) = \frac{1}{d}\int_{\partial K} x\cdot\nu(x)\, d\lambda_{\partial K}(x)$$

(b) Beispiel: $K = \overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| \le 1\}$, $d \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$

$\Rightarrow \partial K = S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$.

$$d\,\lambda^d(B_1(0)) = \int_{S^{d-1}} \underbrace{\underset{x}{F(x)}\cdot\underset{x\ (\text{Bsp. } 15.17)}{\nu(x)}}_{=x^2=1}\, d\lambda_{S^{d-1}}(x) = \lambda_{S^{d-1}}(S^{d-1})$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_{S^{d-1}}(S^{d-1}) = d\cdot\lambda^d(B_1(0)) = \frac{d\,\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \quad (= d\omega_d)$$

↑ Üb. 10, Aufg. 2 (ii).

("Oberfläche der Einheitsphäre in $\mathbb{R}^d$ = $d \times$ Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^d$")

Spezielle Werte: für $d = 2, 3$:

$\lambda_{S^1}(S^1) = 2\pi$

$\lambda_{S^2}(S^2) = 4\pi$

15.30. Korollar (*Green-Formeln*, *Greensche Formeln*).

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subseteq A$ d-dim. Kompaktum mit C^1-Rand, und $f, g \in C^2(A)$. Dann gilt

(1) *Erste Greensche Formel / Identität*:

$$\int_K (\nabla f)(x) \cdot (\nabla g)(x) \, d\lambda^d(x) = \int_{\partial K} f(x) \, \nu(x) \cdot (\nabla g)(x) \, d\lambda_{\partial K}(x) - \int_K f(x) \, (\Delta g)(x) \, d\lambda^d(x)$$

Man nennt $(\partial_\nu g)(x) := \nu(x) \cdot (\nabla g)(x)$ *äußere Normalenableitung* von g

(2) *Zweite Greensche Formel / Identität*:

$$\int_K \left[f(x) (\Delta g)(x) - (\Delta f)(x) g(x) \right] d\lambda^d(x) = \int_{\partial K} \left[f(x) (\partial_\nu g)(x) - g(x) (\partial_\nu f)(x) \right] d\lambda_{\partial K}(x)$$

Beweis: (1): Satz von Gauß mit $F = f \nabla g$

(2): aus Differenz von (1) & (1) mit $f \leftrightarrow g$ ∎

15.31. Korollar (*Satz von Green*)

Sei $A \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^2$ ($d = 2$), $K \subseteq A$ 2-dim Kompaktum mit C^1-Rand, und $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \in C^1(A; \mathbb{R}^2)$ C^1-Vektorfeld.

Dann gilt

$$\int_K \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(x) \right) d\lambda^2(x) = \int_{\partial K} F(x) \cdot \tau(x) \, d\lambda_{\partial K}(x)$$

wobei $\tau = \begin{pmatrix} -\nu_2 \\ \nu_1 \end{pmatrix}$ der *Einheitstangentialvektor* von ∂K ist

(ν Einheitsnormalenvektor)

Beweis: Nach 1. Greensche Formel:

$$\int_K \nabla f \cdot \nabla g \, d\lambda^d = \int_{\partial K} f \, \nu \cdot \nabla g \, d\lambda_{\partial K} - \int_K f \, \Delta g \, d\lambda^d,$$

also mit $f := F_2$, $g(x) := x_1$: $\int_K \begin{pmatrix} \partial_1 F_2 \\ \partial_2 F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda^2 = \int_{\partial K} F_2 \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda_{\partial K}$

mit $f := F_1$, $g(x) = x_2$: $\int_K \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 \\ \partial_2 F_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda^2 = \int_{\partial K} F_1 \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda_{\partial K}$

$$\overset{(1)-(2)}{\Rightarrow} \int_K (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \, d\lambda^2 = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\nu_2 \\ \nu_1 \end{pmatrix} d\lambda_{\partial K} \Rightarrow \text{Beh} \quad \blacksquare$$