15.4. Satz von Gauß

Mehrdim. Analogon des HDI (& part. Integration)

Zur Vorbereitung ein lokaler Spezialfall

15.25. Lemma Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ offen, $I =]\alpha, \beta[$ Intervall, und $\rho \in C^1(U'; I)$. Sei

$$A := \{ (x', x_d) \in U' \times \mathbb{R} : x_d \leq \rho(x') \}.$$

$$M := \{ (x', x_d) \in U' \times I : x_d = \rho(x') \}$$

und $f \in C_c(U' \times \mathbb{R})$. Dann gilt, $\forall k = 1, \dots, d$,

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) \, d\lambda^d(x) = \int_M f(x) \, \nu_k(x) \, d\lambda_M(x),$$

wobei

$$\underset{(x', x_d)}{\nu(\underset{\sim}{x})} = \underbrace{\left[1 + |(\nabla \rho)(x')|^2 \right]^{-1/2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c} -(\nabla\rho)(x')^T \\ \hline 1 \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{c} d-1 \\ \hline 1 \end{array}$$

($\nu(x) \in \mathbb{R}^d$) der äußere Normalen-Einheitsvektor in $x \in M$ ist (vgl. Satz 15.16 mit $\varphi(x) = x_d - \rho(x')$ für Interpretation von ν).

<u>Beweis</u>: Nach Bsp. 15.21: globale Karte $\begin{array}{l} U' \to \mathbb{R}^d \\ x' \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ \rho(x') \end{pmatrix} \end{array}$ der $(d-1)$-dim. C^1-Mfkt. M mit $g(x') = 1 + |(\nabla\rho)(x')|^2 \quad \forall x' \in U'$

$$\overset{\text{Bsp. 15.24(a)}}{\Longrightarrow} \int_M f(x) \nu(x) \, d\lambda_M(x) = \int_{U'} f(x', \rho(x')) \, \nu(x', \rho(x')) \sqrt{g(x')} \, d\lambda^{d-1}(x')$$

$$(*) \qquad = \int_{U'} f(x', \rho(x')) \begin{pmatrix} -(\nabla\rho)(x')^T \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda^{d-1}(x')$$

(Komponentenweise).

Andererseits gilt im Fall

$\underline{k=d}$: $$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_d}(x)\, d\lambda^d(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{U'} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\rho(x')} \frac{\partial f}{\partial x_d}(x', x_d)\, dx_d \right)}_{f(x', \rho(x')) - \underbrace{\lim_{\xi \to -\infty} f(x', \xi)}_{= 0 \,:\, \text{supp} f \text{ kpt.}}} d\lambda^{d-1}(x')$$

mit (*) $\Rightarrow$ Beh. ✓

$\underline{1 \le k \le d-1}$:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_k}\, d\lambda^d(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{U'} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\rho(x')} \frac{\partial f}{\partial x_k'}(x', x_d)\, dx_d \right)}_{\text{Kettenregel + Satz 12.48(b)}} d\lambda^{d-1}(x')$$

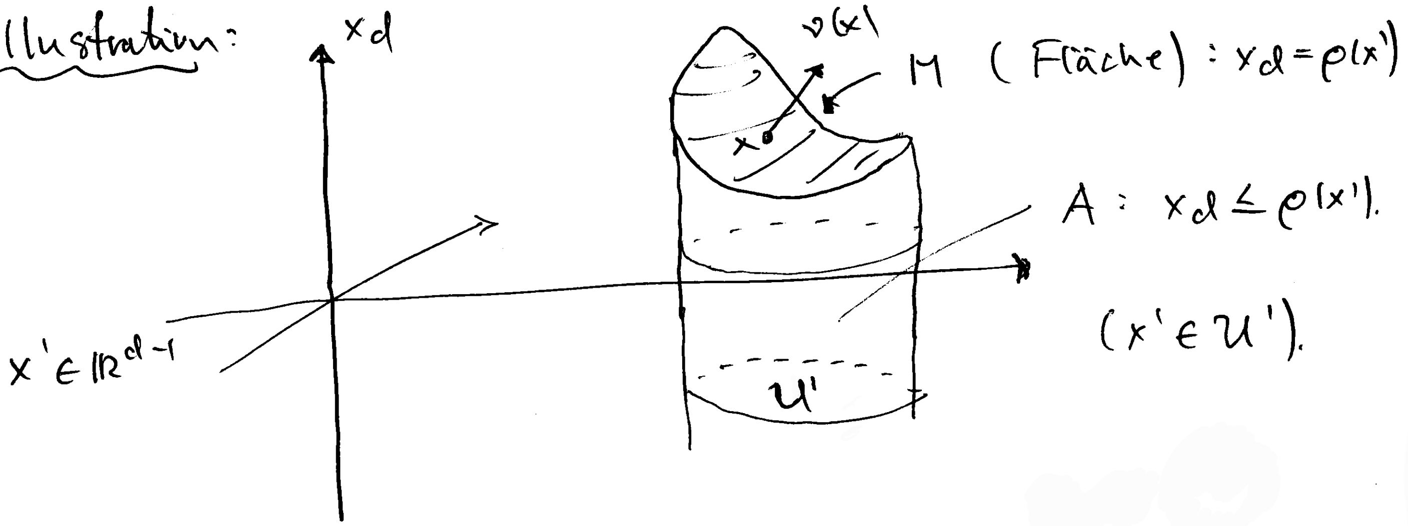
$$\left(\frac{\partial}{\partial x_k'} \underbrace{\int_{-\infty}^{\rho(x')} f(x', x_d)\, dx_d}_{=: F(x')} \right) - f(x', \rho(x')) \frac{\partial \rho}{\partial x_k'}(x')$$

$$= I + \int_{U'} f(x', \rho(x')) \left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_k'} \right)(x')\, d\lambda^{d-1}(x')$$

Es gilt $I = 0$, da supp F kpt in U' & Tut. Blatt 10, Auf. 2 ∎

$\Rightarrow$ Beh. mit (*).

Illustration:



Nun die globale Version:

15.26. Integralsatz von Gauß (auch: Divergenzsatz oder Satz von Ostrogradski)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $F \in C^1(A; \mathbb{R}^d)$ stetig diff.bares Vektorfeld, und $K \subseteq A$ Kompaktum mit C^1-Rand. Dann gilt:

$$\int_K \underbrace{(\nabla \cdot F)}_{\text{Divergenz von } F}(x)\, d\lambda^d(x) = \int_{\partial K} F(x) \cdot \underbrace{\nu(x)}_{\text{äußeres Einheits-Normalenfeld}}\, d\lambda_{\partial K}(x)$$

15.27. Bemerkung: Satz gilt auch, wenn ∂K nur glatt bis auf eine $(d-1)$-dim Nullmenge; Beispiel: Würfel! (siehe z.B. Kaballo, "Einführung in die Analysis III").

Beweisstrategie: Durch Zusammensetzen des lokalen Resultats (in Lem. 15.25) mittels Teilung der Eins (siehe 13.18 & 13.19)

Noch ein technischer Hilfssatz:

15.28. Lemma (Lebesgue) Sei M metrischer Raum und $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge. Sei $K \subseteq M$ kompakt und $\{U_j\}_{j \in J}$ offene Überdeckung von K.

Dann existiert $l > 0$ (Lebesgue-Zahl):

$$\forall A \subseteq M \text{ mit } A \cap K \neq \emptyset \text{ und } \operatorname{diam}(A) \le l$$
$$\exists j \in J: A \subseteq U_j.$$

Beweis (15.28) $\forall x \in K \ \exists r_x > 0 \ \& \ j_x \in J : B_{r_x}(x) \subseteq \mathcal{U}_{j_x}$

$\Rightarrow \{ B_{\frac{r_x}{2}}(x) \}_{x \in K}$ ist offene Überdeckung von K

$\overset{K \text{ kpt.}}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_N \in K : \quad K \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} B_{\frac{r_{x_n}}{2}}(x_n)$

Setze $\ell := \min \{ \frac{r_{x_1}}{2}, \ldots, \frac{r_{x_N}}{2} \}$

Sei nun $A \cap K \neq \emptyset$, $\operatorname{diam}(A) \leq \ell$ und $a \in A \cap K$

$\Rightarrow \exists n := n_a \in \{1, \ldots, N\} : \quad a \in B_{\frac{r_{x_n}}{2}}(x_n)$

$\overset{\operatorname{diam}(A) \leq \ell}{\Rightarrow} \quad A \subseteq B_{r_{x_n}}(x_n) \subseteq \mathcal{U}_{j_{x_n}}$ $\blacksquare$

Beweis von Satz 15.26:

1) Sei $a \in \partial K$

von a abh.

$\overset{K \ C^1\text{-Rand}}{\Rightarrow} \exists$ (in $\mathbb{R}^d$) offene Umgeb. $\mathcal{U}$ von a und $\exists \psi \in C^1(\mathcal{U})$:

(a) $(\nabla \psi)(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$

(b) $\partial K \cap \mathcal{U} = \{ x \in \mathcal{U} : \psi(x) = 0 \}$

(c) $K \cap \mathcal{U} = \{ x \in \mathcal{U} : \psi(x) \leq 0 \}$

(a) $\Rightarrow \exists \underset{j_a}{\underset{\shortparallel}{j}} \in \{1, \ldots, d\} : \quad (\partial_j \psi)(a) \neq 0$

j'te Komponente fehlt.

Für $x \in \mathcal{U}$ sei $\mathbb{R}^{d-1} \ni x' := (\ldots x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots)$

Sei $G(x', x_j) := \psi(x)$; u.V. $\exists \delta > 0$:

$$\underbrace{B^{(d-1)}_{\frac{\delta}{2}}(a')}_{=: \mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^{d-1}} \times \underbrace{B^{(1)}_{\frac{\delta}{2}}(a_j)}_{=: I \subseteq \mathbb{R}} \subseteq B^{(d)}_{\delta}(a) \subseteq \mathcal{U}$$

(Dreiecksungl.)

$\Rightarrow G \in C^1(\mathcal{U}' \times I)$ mit $\frac{\partial G}{\partial x_j}(a', a_j) = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(a) \neq 0$

und $\partial K \cap (\mathcal{U}' \times I) = \{ (x', x_j) \in \mathcal{U}' \times I : G(x', x_j) = 0 \}$

Satz 9.4 $\Rightarrow$ (Impl. Fkt'en)

$\exists\, \mathcal{U}_0' \subseteq \mathcal{U}'$ off. Umg. von a'

$\exists\, I_0 \subseteq I$ " " " a_j

$\exists\, \rho \in C^1(\mathcal{U}_0'; I_0)$ mit

$$\partial K \cap (\mathcal{U}_0' \times I_0) = \{ (x', x_j) \in \mathcal{U}_0' \times I_0 : \rho(x') = x_j \}$$

Da $K \cap \mathcal{U} = \{ (x', x_j) \in \mathcal{U} : G(x', x_j) \le 0 \}$

(für $\mathcal{U}_0'$, I_0 genü. klein) $\Rightarrow$ $K \cap (\mathcal{U}_0' \times I_0) = \{ (x', x_j) \in \mathcal{U}_0 \times I_0 : x_j \le \rho(x') \}$.

<u>Moral</u>: K wird <u>lokal</u> um $a \in \partial K$ wie in Lemma 15.25 beschrieben (modulo $j \leftrightarrow d$).

Setze $\mathcal{U}_a := \mathcal{U}_0' \times I_0$

2) Für $r > 0$, sei $V_r := \{ x \in K : \operatorname{dist}(x, \partial K) > r \} \Rightarrow V_r \subseteq \mathring{K}$ offen ($x \mapsto \operatorname{dist}(x, \partial K)$ Lipschitz)

Da (!) $\mathring{K} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{\frac{1}{n}}$ und K kpt.

$\Rightarrow \exists\, r_0 > 0$: $K \subseteq \left(\bigcup_{a \in \partial K} \mathcal{U}_a \right) \cup V_{r_0}$. Sei ℓ die zugeh. Lebesgue-Zahl (Lemma 15.28)

Setze $\varepsilon := \frac{\ell}{2\sqrt{d}} > 0$, sei $\{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p \in \mathbb{Z}^d}$ C^∞-Teilung der Eins (siehe 13.18 & 13.19) $\Rightarrow$ diam $\underbrace{\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon}}_{\text{Würfel mit Kantenlänge } 2\varepsilon} \le \ell$

Sei $P_K := \{ p \in \mathbb{Z}^d : \operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \cap K \neq \emptyset \}$

$\Rightarrow P_K$ endlich (da K beschränkt)

Lem. 15.28

$\Rightarrow$ $\forall p \in P_K$ gilt entweder: $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \subseteq V_{r_0}$

oder: $\exists a \in \partial K$: $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \subseteq \mathcal{U}_a$

Da $F(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\varepsilon}(x) F(x)$ $\forall x \in K$ $\left(\sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\varepsilon} = 1 \; ! \right)$

$$\Rightarrow \int_K (\nabla \cdot F)(x)\, d\lambda^d(x) = \sum_{p \in P_K} \int_K (\nabla \cdot (\gamma_{p,\varepsilon} F))(x)\, d\lambda^d(x)$$

$$\int_{\partial K} F(x) \cdot \nu(x)\, d\lambda_{\partial K}(x) = \sum_{p \in P_K} \int_{\partial K} (\gamma_{p,\varepsilon}(x) F(x)) \cdot \nu(x)\, d\lambda_{\partial K}(x)$$

Moral: es genügt Satz für C^1-Vektorfeld $\gamma_{p,\varepsilon} F$ zu zeigen

3) Sei $k \in \{1, \dots, d\}$, $p \in P_K$, $f_k := \gamma_{p,\varepsilon} F_k$ $(F = (F_1, \dots, F_d))$

1. Fall: $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \subseteq V_{r_0} \Rightarrow \int_{\partial K} f_k(x) \nu_k(x)\, d\lambda_{\partial K}(x) = 0$

da $\partial K \cap V_{r_0} = \emptyset$

Andererseits: $\displaystyle\int_K \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)\, d\lambda^d(x) \underset{\text{Tut. 10, Aufg. 2 (ii)}}{=} 0$

da $\operatorname{supp} f_k \cap \partial K \subseteq V_{r_0} \cap \partial K = \emptyset$

($\operatorname{supp} f_k$ kompakt in K enthalten)

$\Rightarrow$ Satz gilt für $\gamma_{p,\varepsilon} F$ ✓

2. Fall: $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \subseteq \mathcal{U}_a$

Nach 1) folgt aus Lemma 15.25:

$$\int_K \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)\, d\lambda^d(x) = \int_{K\cap \mathcal{U}_a} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)\, d\lambda^d(x)$$

$$= \int_{\partial K\cap \mathcal{U}_a} f_k(x)\nu_k(x)\, d\lambda_{\partial K\cap \mathcal{U}_a}(x) = \int_{\partial K} f_k(x)\nu_k(x)\, d\lambda_{\partial K}(x)$$

$\sum_{k=1}^{d} \Rightarrow$ Beh. $\boxtimes$

15.29. Beispiel (a) $K \subseteq \mathbb{R}^d$ Kompaktum mit C^1-Rand,

$F: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $F(x) := x$; $F \in C^\infty(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d)$,

$\Rightarrow (\nabla\cdot F)(x) = d \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$, also $\int_K (\nabla\cdot F)(x)\, d\lambda^d(x) = d\,\lambda^d(K)$

Satz von Gauß $\Rightarrow$

$$\lambda^d(K) = \frac{1}{d}\int_{\partial K} x\cdot \nu(x)\, d\lambda_{\partial K}(x)$$

(b) Beispiel: $K = \overline{B_1(0)} = \{x\in\mathbb{R}^d : |x|\le 1\}$, $d \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$

$\Rightarrow \partial K = S^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : |x| = 1\}$.

$$d\,\lambda^d(B_1(0)) = \int_{S^{d-1}} \underbrace{\underset{\overset{\|}{x}}{F(x)}\cdot \underset{\overset{\|}{x}}{\nu(x)}}_{=x^2=1} \, d\lambda_{S^{d-1}}(x) = \lambda_{S^{d-1}}(S^{d-1})$$

(Bsp. 15.17)

$$\Rightarrow \lambda_{S^{d-1}}(S^{d-1}) = d\cdot\lambda^d(B_1(0)) = \frac{d\,\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)} \quad (= d\,\omega_d)$$

Üb. 10, Aufg. 2 (ii).

("Oberfläche der Einheitsphäre in $\mathbb{R}^d$ = d × Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^d$")

spezielle Werte: für $d = 2,3$:

$\lambda_{S^1}(S^1) = 2\pi$

$\lambda_{S^2}(S^2) = 4\pi$

15.30. Korollar (Green-Formeln, Greensche Formeln).

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subseteq A$ d-dim. Kompaktum mit C^1-Rand, und $f, g \in C^2(A)$. Dann gilt

(1) Erste Greensche Formel / Identität:

$$\int_K (\nabla f)(x) \cdot (\nabla g)(x) \, d\lambda^d(x) = \int_{\partial K} f(x) \, \nu(x) \cdot (\nabla g)(x) \, d\lambda_{\partial K}(x) - \int_K f(x) \, (\Delta g)(x) \, d\lambda^d(x)$$

Mann nennt $(\partial_\nu g)(x) := \nu(x) \cdot (\nabla g)(x)$ äußere Normalenableitung von g

(2) Zweite Greensche Formel / Identität:

$$\int_K \left[f(x)(\Delta g)(x) - (\Delta f)(x) g(x) \right] d\lambda^d(x) = \int_{\partial K} \left[f(x)(\partial_\nu g)(x) - g(x)(\partial_\nu f)(x) \right] d\lambda_{\partial K}(x)$$

Beweis: (1): Satz von Gauß mit $F = f \nabla g$

(2): aus Differenz von (1) & (1) mit $f \leftrightarrow g$ ∎

15.31. Korollar (Satz von Green)

Sei $A \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^2$ ($d=2$), $K \subseteq A$ 2-dim Kompaktum mit C^1-Rand, und $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \in C^1(A; \mathbb{R}^2)$ C^1-Vektorfeld.

Dann gilt
$$\int_K \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(x) \right) d\lambda^2(x) = \int_{\partial K} F(x) \cdot \tau(x) \, d\lambda_{\partial K}(x)$$

wobei $\tau = \begin{pmatrix} -\nu_2 \\ \nu_1 \end{pmatrix}$ der Einheitstangentialvektor von ∂K ist

(ν Einheitsnormalenvektor)

<u>Beweis</u>: Nach 1. Greensche Formel:

$$\int_K \nabla f \cdot \nabla g \, d\lambda^d = \int_{\partial K} f \, \nu \cdot \nabla g \, d\lambda_{\partial K} - \int_K f \, \Delta g \, d\lambda^d,$$

also mit $f := F_2$, $g(x) := x_1$: $\int_K \begin{pmatrix} \partial_1 F_2 \\ \partial_2 F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda^2 = \int_{\partial K} F_2 \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda_{\partial K}$

mit $f := F_1$, $g(x) = x_2$: $\int_K \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 \\ \partial_2 F_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda^2 = \int_{\partial K} F_1 \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda_{\partial K}$

$$\overset{(1)-(2)}{\Longrightarrow} \int_K (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \, d\lambda^2 = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\nu_2 \\ \nu_1 \end{pmatrix} d\lambda_{\partial K} \Rightarrow \text{Beh} \; \blacksquare$$