15.3. Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Faktum: (!) Für $n < d$ ist die n-dim Mfkt. M eine Nullmenge bzgl. λ^d.

Idee: Lebesgue-Maß auf $M \cap \varphi(T)$ = Bildmaß
(φ Karte)
unter φ von geeignetem Maß auf Kartengeb. $T \subseteq \mathbb{R}^n$
so, daß Ergebnis unabh. von Wahl der Karte.

Zentrale Rolle dabei:

15.18. Definition $M \subseteq \mathbb{R}^d$ n-dim C^1-Mfkt., $\varphi: T \to M$ Karte, $\alpha, \beta \in \{1, \dots, n\}$: Sei

$$G_{\alpha\beta}: \begin{array}{l} T \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial t_\alpha}(t) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_\beta}(t) \end{array},$$

($\cdot$: Skalarprod. in $\mathbb{R}^d$)

Dann heißt

$$G := G_\varphi: \begin{array}{l} T \to \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{R}) \\ t \mapsto (G_{\alpha\beta}(t))_{1 \le \alpha, \beta \le n} \end{array} = [(D\varphi)(t)]^T (D\varphi)(t)$$

(T: transponierte)

Gram-Matrix / metrischer Tensor, und

$$g := g_\varphi: \begin{array}{l} T \to [0, \infty[\\ t \mapsto \det G(t) = \det [(D\varphi)(t)]^T (D\varphi)(t) \end{array}$$

die Gram-Determinante / Gramsche Determinante.

15.19. Bemerkung:

$$G(t) = [(D\varphi)(t)]^T (D\varphi)(t) \quad \forall t \in T$$

$\Rightarrow$ $G(t) \geq 0$ (siehe 8.35 & 8.37) (denn $v \cdot A^T A v = (Av) \cdot (Av) \geq 0$)

$\Rightarrow$ $G(t)$ diagonalisierbar; nicht-neg Eigenwerten; $g(t)$ Produkt Eigenwerte.

Trafo-Verhalten von g unter Kartenwechsel:

15.20. Lemma Sei M n-dim. C^1-Mfkt., seien $\varphi : T \to V \subseteq M$, $\tilde\varphi : \tilde T \to \tilde V \subseteq M$ zwei Karten mit $V \cap \tilde V \neq \emptyset$, sowie $W := \varphi^{-1}(V \cap \tilde V)$, $\tilde W := \tilde\varphi^{-1}(V \cap \tilde V)$ und $\psi := \tilde\varphi^{-1} \circ \varphi : W \to \tilde W$ (Diffeom. laut Satz 15.6.)

Dann gilt
$$g(t) = \left[\det(D\psi)(t)\right]^2 \tilde g(\psi(t)) \quad \forall t \in W$$
wobei $g := g_\varphi$, $\tilde g := g_{\tilde\varphi}$ Gram-Determ. bzgl. Karten φ & $\tilde\varphi$

Beweis: $\varphi(t) = (\tilde\varphi \circ \psi)(t) \overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} (D\varphi)(t) = (D\tilde\varphi)(\psi(t)) \cdot (D\psi)(t)$

$$\Rightarrow g(t) = \det\left[(D\varphi)(t)\right]^T (D\varphi)(t)$$
$$= \det\Big[\underbrace{(D\psi)(t)^T}_{n\times n\text{-Matrix}} \underbrace{\left((D\tilde\varphi)(\psi(t))\right)^T (D\tilde\varphi)(\psi(t))}_{n\times n\text{-Matrix}} \underbrace{(D\psi)(t)}_{n\times n\text{-Matrix}}\Big]$$

$(AB)^T = B^T A^T$

$\Rightarrow$ Beh. mit $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ & $\det A^T = \det A$ ■

15.21. Beispiel (Graphen) $(n = d-1)$ Sei $T \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ offen, $\rho \in C^1(T;\mathbb{R})$. Für
$$x := ((x_1,\dots,x_{d-1}), x_d) \in T \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^d,$$
$$f(x) := x_d - \rho(x_1,\dots,x_{d-1}), \quad f : T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
gilt
$$(\nabla f)(x) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial\rho}{\partial x_1}(x_1,\dots,x_{d-1}) \\ \vdots \\ -\frac{\partial\rho}{\partial x_{d-1}}(x_1,\dots,x_{d-1}) \\ 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\nabla\rho(x_1,\dots,x_{d-1})^T \\ 1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^d$$

$\nabla\rho(x_1,\dots,x_{d-1})^T \in \mathbb{R}^{d-1}$

$\neq 0$

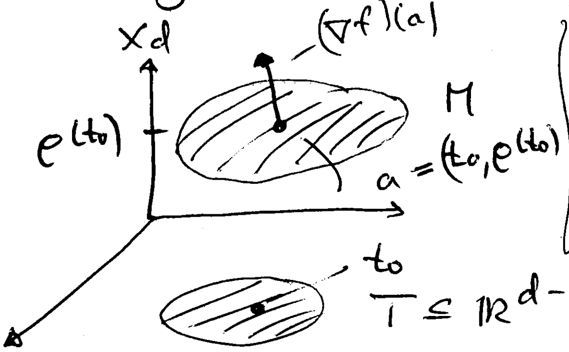
$= (-\nabla\rho(x_1,\dots,x_{d-1}), 1)$

(a)

$$M := \{x \in T \times \mathbb{R} : x_d = \rho(x_1, \dots, x_{d-1})\} \quad (\text{Graph von } \rho)$$
$$= \{x \in T \times \mathbb{R} : f(x) = 0\}$$

ist $(d-1)$-dim. C^1-Mfkt. mit globaler Karte

$$\varphi : \begin{array}{l} T \to \mathbb{R}^d \\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \rho(t) \end{pmatrix} \end{array}$$



Siehe Ana2, Tut. Auf. 11, T4

(b) Normalenraum von M in $a = (t_0, \rho(t_0))$:

$$N_a M = \operatorname{span}\{(\nabla f)(a)\} = \operatorname{span}\{(-\nabla\rho(t_0), 1)\} \quad (\text{siehe } 15.11\,(b))$$

(c) Gram-Matrix und -Determinante:

$$(D\varphi)(t) = \left.\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline \underbrace{(\partial_1\rho)(t) \; \cdots \; (\partial_{d-1}\rho)(t)}_{d-1} \end{pmatrix}\right\} d = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} \\ \hline (\nabla\rho)(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G(t) = (D\varphi)(t)^T (D\varphi)(t) = \left(\mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} \;\vdots\; (\nabla\rho)(t)^T\right) \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} \\ \hline (\nabla\rho)(t) \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} + P(t), \quad P_{\alpha\beta}(t) := (\partial_\alpha\rho)(t)(\partial_\beta\rho)(t), \quad \alpha, \beta = 1, \dots, d-1$$

P ist Orthogonalprojektor (in $\mathbb{R}^{d-1}$) auf Vektor $(\nabla\rho)(t)^T$, d.h. $\forall v \in \mathbb{R}^{d-1}$: $Pv = [\underbrace{(\nabla\rho)(t) \cdot v}_{\in \mathbb{R}}] (\nabla\rho)(t)^T$

$\Rightarrow G(t)$ selbstadj. $(d-1)\times(d-1)$-Matrix,

Eigenwerte $1 + |(\nabla\rho)(t)|^2, \underbrace{1, \dots, 1}_{d-2 \text{ Stück}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g(t) = 1 + |(\nabla \rho)(t)|^2}$$

15.22. Def. & Satz Sei M n-dim. C^1-Mfkt. in $\mathbb{R}^d$ mit Atlas $\{\varphi_\alpha : T_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ (siehe Lem. 15.4) und der Zerlegung

$$M = \dot{\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}}} U_\alpha \quad \text{wobei } U_\alpha \subseteq V_\alpha, \; U_\alpha \in \mathcal{B}^d \cap M.$$

Sei $g_\alpha := g_{\varphi_\alpha}$ Gram-Determinante bzgl. Karte φ_α.

Dann gilt:

$$\lambda_M : \begin{array}{l} \mathcal{B}^d \cap M \longrightarrow [0,\infty] \\ B \longmapsto \sum\limits_{\alpha \in \mathbb{N}} \int\limits_{\varphi_\alpha^{-1}(B \cap U_\alpha)} \sqrt{g_\alpha(t)}\, d\lambda^n(t) \end{array}$$

ist ein Maß, das Lebesgue-(Borel)-Maß auf M (auch: Flächen-Maß), und unabhängig von Wahl des abzähl. Atlas

(Notation: $d\sigma_M$, dS, ...)

Beweis: λ_M ist ein Maß: Für $\alpha \in \mathbb{N}$ ist

$$\tau_\alpha := \tau_{\varphi_\alpha} : \begin{array}{l} \mathcal{B}^n \cap \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow [0,\infty] \\ S' \longmapsto \int\limits_{S'} \sqrt{g_\alpha(t)}\, d\lambda^n(t) \end{array} \qquad (*)$$

ein Maß (Leb. Maß mit Dichte - klar!).

$\Rightarrow$ Bildmaß $\varphi_\alpha(\tau_\alpha)$ ist Maß auf $\mathcal{B}^d \cap U_\alpha$

$$\Rightarrow \quad \lambda_M = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} (\varphi_\alpha(\tau_\alpha))(\,\cdot \cap U_\alpha) \qquad (**)$$

ist Maß auf $\mathcal{B}^d \cap M$ (verwende „großen Umordnungssatz für Reihen" - Fubini für Zählmaß - für σ-Additivität).

Unabh. von λ_M von Wahl der Karte:

Seien $\varphi, \tilde\varphi$ zwei Karten wie in Lemma 15.20

$\Rightarrow \psi := \tilde\varphi^{-1} \circ \varphi : W \to \tilde W$ ist Diffeom. und für alle $B \in \mathcal{B}^d \cap (V \cap \tilde V)$ gilt ($\varphi(\mathcal{I}), \tilde\varphi(\tilde{\mathcal{I}})$ Bildmaße von $\mathcal{I}, \tilde{\mathcal{I}}$ wie in (*)):

$$(\varphi(\mathcal{I}))(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \underbrace{\sqrt{g(t)}}_{\overset{\text{Lem. 15.20}}{=} |\det(D\psi)(t)| \sqrt{\tilde g(\psi(t))}} \, d\lambda^n(t) \overset{\text{Trafo-Form. 14.21}}{=} \int_{\underbrace{\psi(\varphi^{-1}(B))}_{\tilde\varphi^{-1}(B)}} \sqrt{\tilde g(\tilde t)} \, d\lambda^n(\tilde t)$$

$$= (\tilde\varphi(\tilde{\mathcal{I}}))(B)$$

- d.h. Bildmaße auf M stimmen im Schnittgebiet überein

$\Rightarrow$ Beh. folgt mit Form von λ_M in (**) ∎

15.23 Korollar Mit der Notation des vorigen Satzes gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(M, \mathcal{B}^d \cap M, \lambda_M) \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha)} f_\pm(\varphi_\alpha(t)) \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t) < \infty$$

In dem Fall:

$$\int_M f(x) \, d\lambda_M(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha)} f(\varphi_\alpha(t)) \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t). \quad (*)$$

Beweis: Sei $B \in \mathcal{B}^d \cap M$, dann

$$\int_M \mathbb{1}_B(x) \, d\lambda_M(x) = \lambda_M(B) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(B \cap V_\alpha)} \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t)$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha)} \mathbb{1}_B(\varphi_\alpha(t)) \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t) \quad \Rightarrow (*) \text{ gilt für } \mathbb{1}_B$$

$\Rightarrow$ (*) gilt für Elem. Fkt. $\overset{\text{monotone Konv.}}{\Rightarrow}$ (*) ok für $f \geq 0$, $\mathcal{B}^d \cap M$-messbar $\Rightarrow$ Beh. ∎

15.24 Beispiel (a) Sphäre $S_r^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = r\}$, $r > 0$

2 Karten: $\varphi : \begin{array}{l}]0,2\pi[\to S_r^1 \\ t \mapsto r\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\end{array}$, $\tilde{\varphi} : \begin{array}{l}]-\pi,\pi[\to S_r^1 \\ t \mapsto r\begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix}\end{array}$

Sei $U := S_r^1 \setminus \left\{\begin{pmatrix} r\\0\end{pmatrix}\right\}$, $\tilde{U} := \left\{\begin{pmatrix} r\\0\end{pmatrix}\right\}$;

$\Rightarrow \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{U}) = \{0\}$ Nullmenge von λ^1 ($\Rightarrow$ keine Rolle!)

$\forall t \in \varphi^{-1}(U) =]0,2\pi[$: $(D\varphi)(t) = r\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix}$

$\Rightarrow G(t) = r^2(-\sin t, \cos t)\cdot\begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} = r^2 \Rightarrow g(t) = r^2$

Also: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ messbar ($\Rightarrow f|_{S_r^1}$ $\mathcal{B}^2 \cap S_r^1$-messbar)

$\Rightarrow f|_{S_r^1} \in \mathcal{L}^1(S_r^1, \lambda_{S_r^1}) \Leftrightarrow t \mapsto f(r\cos t, r\sin t) \in \mathcal{L}^1(]0,2\pi[, \lambda^1)$

und
$$\int_{S_r^1} f(x)\, d\lambda_{S_r^1}(x) = r\int_{]0,2\pi[} f(r\cos t, r\sin t)\, dt \qquad (dt = d\lambda^1(t))$$

(man kann $]0,2\pi[$ mit $[0,2\pi]$ ersetzen).

(b) Analog: Sphäre $S_r^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\}$, $r > 0$

Sei Φ Kugelkoordinaten (Bsp. 14.25), und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ messbar

$\Rightarrow f|_{S_r^2} \in \mathcal{L}^1(S_r^2, \lambda_{S_r^2}) \Leftrightarrow (\theta,\varphi) \mapsto (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)\sin\theta \in \mathcal{L}^1(]0,2\pi[\times]0,\pi[, \lambda^2)$

und
$$\int_{S_r^2} f(x)\, d\lambda_{S_r^2}(x) = r^2 \int_{]0,2\pi[}\int_{]0,\pi[} (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

(siehe Üb).

(c) Allgemeiner: Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f\, d\lambda^d &= \int_0^\infty \left(\int_{S_r^{d-1}} f(x)\, d\lambda_{S_r^{d-1}}(x)\right) dr \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{S^{d-1}} f(ry)\, d\lambda_{S^{d-1}}(y)\right) r^{n-1}\, dr.\end{aligned}}$$

(siehe Üb.; Fall $d=2$ aus (a) & Bsp. 14.24; $d=3$: (b) & 14.25).

(d) Graphen: $\quad M = \{x \in T \times \mathbb{R} : x_d = \rho(x_1, \dots, x_{d-1})\}$, $\rho \in C^1(T, \mathbb{R})$

φ die globale Karte (siehe Bsp. 15.21). Dann ist

$$\lambda_M(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{1 + |(\nabla\rho)(t)|^2}\, d\lambda^{d-1}(t) \qquad \forall B \in M \cap \mathcal{B}^d,$$

Insbes. $$\lambda_M(M) = \int_T \sqrt{1 + |\nabla\rho(t)|^2}\, d\lambda^{d-1}(t).$$

Wenn $f \in \mathcal{L}^1(M, \lambda_M)$, dann

$$\boxed{\int_M f(x)\, d\lambda_M(x) = \int_T f(t, \rho(t)) \sqrt{1 + |(\nabla\rho)(t)|^2}\, d\lambda^{d-1}(t)}$$