15.2. Tangential- und Normalenvektoren

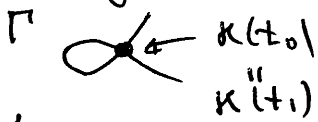
$\boxed{\text{15.9. Definition}}$ (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall (auch uneigentliches), sei $t_0 \in I$.

$\kappa : I \to \mathbb{R}^d$ stetig diff-bar. : C^1-Kurve (in $\mathbb{R}^d$)

mit C^1-Kurvenbogen $\Gamma := \kappa(I) \subseteq \mathbb{R}^d$

$v := \kappa'(t_0) \in \mathbb{R}^d$ Tangentialvektor von κ in $\kappa(t_0)$

- kann mehrere geben, falls κ nicht injektiv:



(b) Sei M C^1-Mfkt, $a \in M$ in $\mathbb{R}^d$.

$$\left.\begin{array}{l} v \in \mathbb{R}^d \text{ Tangentialvektor von } M \\ \text{in } a \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\, \varepsilon > 0 \text{ und } C^1\text{-Kurve} \\ \kappa :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subseteq \mathbb{R}^d : \\ \kappa(0) = a \quad \text{und } v = \kappa'(0) \end{array}\right.$$

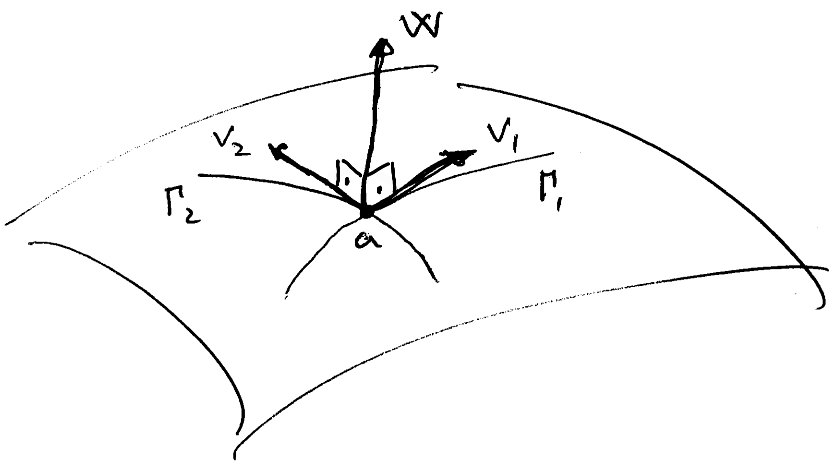
Tangentialraum von M in a:

$$T_a M := \{ v \in \mathbb{R}^d : v \text{ ist Tang. vektor von } M \text{ in } a \}$$

$$\left.\begin{array}{l} w \in \mathbb{R}^d \text{ Normalenvektor von } M \\ \text{in } a \end{array}\right\} :\Leftrightarrow w \perp T_a M$$

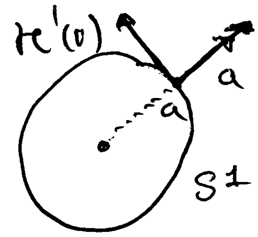
Normalenraum von M in a:

$$N_a M := \{ w \in \mathbb{R}^d : w \text{ ist Normalenvekt. von } M \text{ in } a \}$$



$M \subseteq \mathbb{R}^d$

15.10. Beispiel $M = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$



Sei $a = \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} \in S^1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

C^1-Kurve $\kappa : \begin{array}{l}]-\varepsilon, \varepsilon[\to S^1 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\lambda t + t_0) \\ \sin(\lambda t + t_0) \end{pmatrix} \end{array}$; $\kappa(0) = a$

$\kappa'(0) = \lambda \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix} \in T_a S^1 \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Nächster Satz zeigt:

$T_a S^1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix} \right\}$ - und damit $N_a S^1 = \operatorname{span}\{a\}$

15.11. Satz Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ n-dim. C^1-Mfkt, sei $a \in M$. Dann gilt:

(a) $T_a M = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\varphi^{-1}(a)), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\varphi^{-1}(a)) \right\}$ lin. unab. per def.

ist unabh. von Wahl der Karte $\varphi : T \to M$ mit $a \in \varphi(T)$.

Insbes.: $T_a M$ lin. Unterraum von $\mathbb{R}^d$, $\dim(T_a M) = n$

(b) Sei U offene Umgebung von a in $\mathbb{R}^d$ und $\exists f_1, \dots, f_{d-n} \in C^1(U)$ mit $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{d-n}(x) = 0\}$

und $\operatorname{Rang} \frac{\partial(f_1, \dots, f_{d-n})}{\partial(x_1, \dots, x_d)} = d - n$ (exist. nach Satz 15.8).

Dann ist

$$N_a M = \operatorname{span}\{(\nabla f_1)(a), \dots, (\nabla f_{d-n})(a)\}$$ lin. unab.

unabh. von Wahl der $f_1, \dots, f_{d-n}$.

Insbes.: $\dim(N_a M) = d - n$, und für alle $v \in T_a M$ und alle $j = 1, \dots, d-n$ gilt

$$v \cdot (\nabla f_j)(a) = 0$$

<u>Beweis</u>: Sei $X := \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\varphi^{-1}(a)), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\varphi^{-1}(a)) \right\}$

$Y := \operatorname{span}\{ (\nabla f_1)(a), \dots, (\nabla f_{d-n})(a) \}$

<u>Also</u>: $X, Y^\perp$ sind je n-dim lin. Unterräume von $\mathbb{R}^d$ $(*)$

Wir zeigen: $X \subseteq T_a M \subseteq Y^\perp$ $\left(\overset{(*)}{\Longrightarrow} X = T_a M = Y^\perp \to \text{alle Beh.} \right)$

„<u>$X \subseteq T_a M$</u>": Sei $v := \sum_{j=1}^{n} \underset{\in \mathbb{R}}{\lambda_j} \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(\underbrace{\varphi^{-1}(a)}_{=: t_0 \in \mathbb{R}^n}) \in X$ bel.

$\exists\, \varepsilon > 0 : B_{\tilde{\varepsilon}}(t_0) \subseteq T$
mit $\tilde{\varepsilon} := (\sqrt{n} \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j|)\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\kappa : \begin{array}{l}]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \\ \tau \mapsto \varphi(t_{0,1} + \lambda_1 \tau, \dots, t_{0,n} + \lambda_n \tau) \end{array}$

ist wohldef C^1-Kurve mit $\kappa(0) = \varphi(t_0) = a$, $\kappa'(0) = v$
(Kettenregel!)

$\Rightarrow v \in T_a M$ ✓

„<u>$T_a M \subseteq Y$</u>": Sei $\kappa :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ bel. C^1-Kurve mit $\kappa(0) = a$, $\kappa'(0) = v$ (d.h. $v \in T_a M$). Da $\kappa(\tau) \in M$ $\forall |\tau| < \varepsilon$

$\Rightarrow f_j(\kappa(\tau)) = 0 \quad \forall |t| < \varepsilon, \quad \forall j = 1, \dots, d-n$

$\left(\frac{d}{d\tau} = 0\right) \Rightarrow \quad 0 = \frac{d}{d\tau} f_j(\kappa(\tau))\Big|_{\tau=0} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)\, \kappa_k'(0)$

$= (\nabla f_j)(a) \cdot \underbrace{\kappa'(0)}_{v} \Rightarrow v \in Y^\perp$ ✓

$\blacksquare$

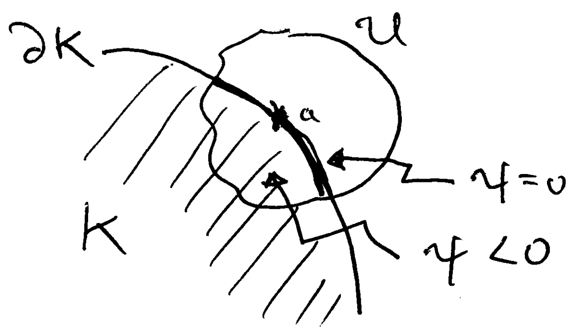
15.12. Definition Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$

K ist *d-dim. Teilmenge mit C^1-Rand* $:\Longleftrightarrow$ $\forall a \in \partial K \; \exists$ offene Umgebung $\mathcal{U} \ni a$ in $\mathbb{R}^d$ sowie $\psi \in C^1(\mathcal{U};\mathbb{R})$ mit

(1) $K \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : \psi(x) \leq 0\}$

(2) $(\nabla \psi)(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$

(3) $\partial K \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : \psi(x) = 0\}$



15.13. Bemerkung

- (3) ist keine eigenständige Forderung, sondern folgt bereits aus (1) & (2) (siehe Forster 3, §15, p. 179-180 (8. Aufl.)).
- Es genügt (2) für $x = a$ zu fordern, da $\psi \in C^1$.
- Falls K zudem *kompakt*, nennen wir K *d-dim Kompaktum mit C^1-Rand*

15.14. Beispiel: $\overline{B_1(0)} := \overline{B_1^d(0)} := \{x \in \mathbb{R}^d : \underbrace{|x|^2 - 1}_{=:\psi(x)} \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^d$

ist d-dim. Komp. mit C^1-Rand

$\Rightarrow \; S^{d-1} := \partial \overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^d : \psi(x) = 0\}$ und

$N_a S^{d-1} = \operatorname{span}\{a\} \quad \forall a \in S^{d-1}$ (vgl. Bsp. 15.10.)

15.15. Satz Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine d-dim Teilmenge mit C^1-Rand. Dann ist ∂K eine $(d-1)$-dim C^1-Mfkt in $\mathbb{R}^d$

Beweis: Satz 15.8, (ii) $\Rightarrow$ (i), mit $n = d-1$ und $f_1 = \psi$ $\blacksquare$

15.16. Satz u. Def. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine d-dim. Teilmenge mit C^1-Rand. Dann gilt

(a) $\forall a \in \partial K \ \exists!$ äußerer Normalen-Einheitsvektor

$$\nu(a) := \frac{(\nabla\psi)(a)}{|(\nabla\psi)(a)|} \in \mathbb{R}^d \quad (\psi \text{ wie in Def. 15.12})$$

von K in a, mit

(1) $\nu(a) \perp T_a(\partial K)$

(2) $|\nu(a)| = 1$

(3) $\exists \varepsilon_0 > 0 : a + \varepsilon\nu(a) \notin K \ \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

(b) Das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld

$$\nu : \begin{array}{l} \partial K \to \mathbb{R}^d \\ a \mapsto \nu(a) \end{array}$$

ist stetig.

Beweis: Sei $a \in \partial K$, ψ wie in Def. 15.12 $\Rightarrow \nu(a)$ wohldef. & erfüllt (2); Stetigkeit klar ($\psi \in C^1$); (1) folgt wie Bew. 15.11 (b) & 15.15.

zu (3): $$\psi(a + \varepsilon\nu(a)) \overset{\text{diff-bar}}{=} \underbrace{\psi(a)}_{0} + \underbrace{(\nabla\psi)(a) \cdot \varepsilon\nu(a)}_{|(\nabla\psi)(a)| \cdot \varepsilon} + o(\varepsilon) \quad (\varepsilon \to 0)$$

$\Rightarrow \psi(a + \varepsilon\nu(a)) > 0 \ \forall \varepsilon > 0$ hinreichend klein

$\Rightarrow a + \varepsilon\nu(a) \notin K$.

Bleibt noch Eindeutigkeit: Satz 15.11 (b) & (1)

$\Rightarrow$: $\tilde{\nu} \in N_a(\partial K) = \operatorname{span}\{(\nabla\psi)(a)\}$, $|\tilde{\nu}| = 1$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \tilde{\nu} = \pm\nu(a) \overset{(3)}{\Rightarrow} \tilde{\nu} = +\nu(a)$ ∎

15.17 Beispiel: Für S^{d-1} (siehe Bsp. 15.14) ist $\nu(a) = a \ \forall a \in S^{d-1}$.