15. Untermannigfaltigkeiten und der Satz von Gauß

15.1. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$

15.1. Definition Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ versehen mit Relativtop. des $\mathbb{R}^d$ (mit der Eukl. Top.), sei $n \in \mathbb{N}$, $n \leq d$.

(a) M *n-dimensionaler* C^1-(Unter-)*Mannigfaltigkeit* (des $\mathbb{R}^d$)

:$\Leftrightarrow$ $\forall a \in M\ \exists V \subseteq M$ offen in Relativtop. auf M mit $a \in V$, $\exists$ *Kartengebiet* $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\exists$ (lokale) *Karte*

$\varphi: T \to V$ mit
$\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$

(i) φ bijektiv
(ii) φ, φ^{-1} stetig } Homöomorphismus
(iii) φ stetig diff.bar
(iv) $\mathrm{Rang} \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t)\right)_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 1 \leq k \leq n}}}_{\frac{\partial(\varphi_1, \dots, \varphi_d)}{\partial(t_1, \dots, t_n)}(t)} = n \quad \forall t \in T$

(b) Sei A eine Indexmenge

Atlas von M :$\Leftrightarrow$ Familie von Karten $\{\varphi_\alpha : T_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha \in A}$

mit $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = M$

15.2. Bemerkung (a) (iii) heisst: $\varphi : T \to \mathbb{R}^d$ (T offen) diff.bar ($\varphi(T) = V \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^d$ nicht i.A. in $\mathbb{R}^d$ offen).

(iv) heisst, Matrix hat voller Rang $\forall t$

(b) Vorsicht: häufige Konvention anderswo:

Die Abbildung $V \to T$ heisst "Karte"
(unseren dann „Parameterdarst.")

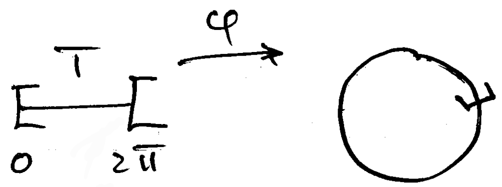
(c) Falls statt (iii): φ l-mal stetig diff.bar, $l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

$\rightsquigarrow$ C^l-Mfkt.

(d) Konvention: j kartesischer Index für $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$;
α Familienindex von φ in einem Atlas ($\varphi_\alpha : T_\alpha \to V_\alpha$).

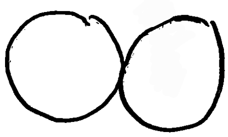
15.3. Beispiel (a) Die Einheitsphäre in $\mathbb{R}^2$:
$S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ (Kreis!) ist 1-dim C^∞-Mfkt.
Nur 2 Karten nötig für Atlas, z.B. Einschränkungen auf
$]0, 2\pi[$ und $]-\pi, \pi[$ der Abb. $\mathbb{R} \to S^1$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

NB:



keine zulässige Wahl, da T nicht offen in $\mathbb{R}$.

(b)



ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$
(Begr.: "Behaupt." am Ende Bew. Lemma 15.5)

$\boxed{\text{15.4. Lemma}}$ Sei M C^1-Mfkt. Dann hat M abzählbaren Atlas.

Beweis: Aus Satz von Lindelöf (10.24), denn: Eukl. Top. $\mathcal{T}$
auf $\mathbb{R}^d$ erfüllt 2. AA. (Bsp. 10.14) $\Rightarrow$ $(M, \mathcal{T}_M)$ ← Relativtop.
erfüllt 2. AA - denn: Sei $V \in \mathcal{T}_M \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T} : V = U \cap M$
u.V. gilt $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{n_j}$ ($\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ abz. Basis $\mathcal{T}$ - 2. AA)
$\Rightarrow V = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (B_{n_j} \cap M)$; d.h. $\{\underbrace{B_k \cap M}_{=: C_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist
Basis von $\mathcal{T}_M$. ☒

$\varphi^{-1}: V \to T$ macht M lokal flach und ist im folgenden Sinn diff-bar (NB: V i.A. nicht offen in $\mathbb{R}^d$!)

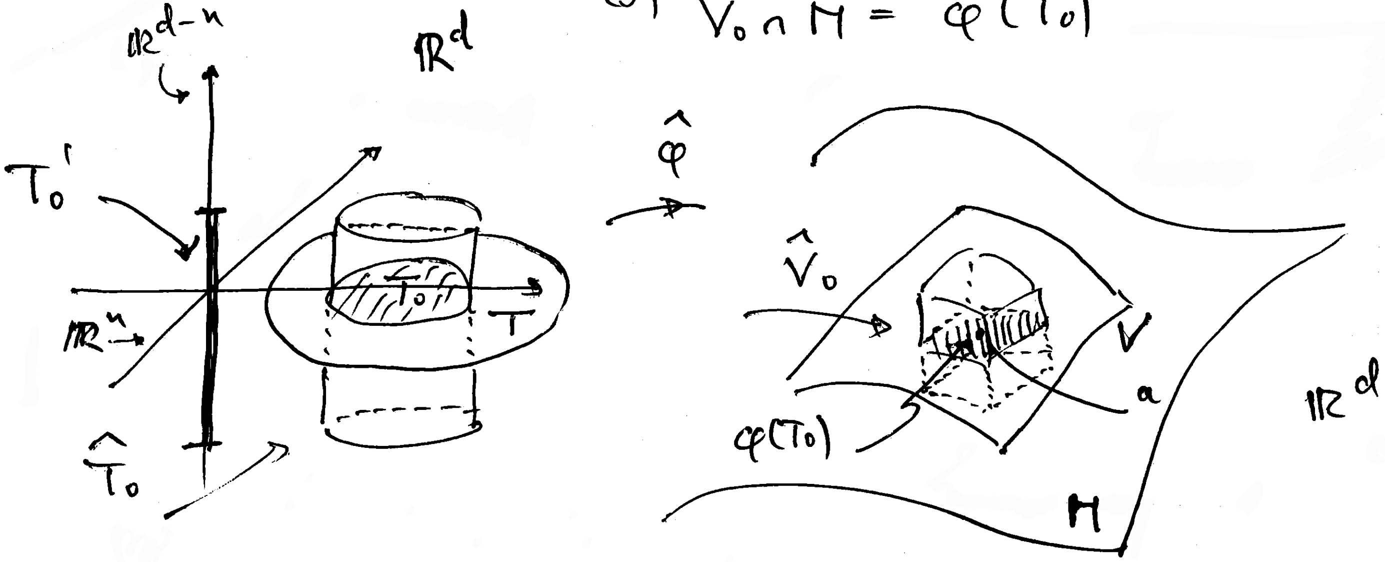
15.5. Lemma Sei $\varphi: T \to V$ Karte der C^1-Mfkt. M, sei $a \in V$. Dann $\exists\, T_0 \subseteq T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $a \in \varphi(T_0)$, $T_0' \subseteq \mathbb{R}^{d-n}$ offene Umgebung der $0 \in \mathbb{R}^{d-n}$, und $\hat{V}_0 \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, sowie

$$\hat{\varphi}: \underbrace{T_0 \times T_0'}_{=:\hat{T}_0 \subseteq \mathbb{R}^d} \to \hat{V}_0 \quad (\text{„Flachmacher" bzgl. } a) \text{ mit}$$

(1) $\hat{\varphi}$ ist Diffeomorphismus

(2) $\hat{\varphi}|_{T_0 \times \{0\}} = \varphi|_{T_0}$

(3) $\hat{V}_0 \cap M = \varphi(T_0)$



Beweis: Def. 15.1. (iv) $\Rightarrow \exists\, 1 \le j_1 < j_2 < \dots < j_n \le d$ mit

$$\text{Rang } \frac{\partial(\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_n})}{\partial(t_1, \dots, t_n)}(\tau) =: \text{Rang } J(\tau) = n, \quad \text{wobei } \tau := \varphi^{-1}(a)$$

O.E. sei $j_k = k \ \forall k = 1, \dots, n$ (sonst nummeriere Koord. in $\mathbb{R}^d$ um; wenn Beh wahr für $\underset{\text{Perm.Abb.}}{\pi} \circ \varphi$ und $\pi M \Rightarrow$ Beh. wahr für φ und M).

Sei $\delta > 0$, $\hat{t} := (t, t') \in T \times]-\delta, \delta[^{d-n} =: \hat{T}$; $\hat{\tau} := (\tau, 0)$

und $\quad \hat{\varphi}_j(\hat{t}) := \varphi_j(t)$, $\quad j = 1, \dots, n$

$\quad\quad \hat{\varphi}_j(\hat{t}) := \varphi_j(t) + t'_{j-n}$, $\quad j = n+1, \dots, d$

$\Rightarrow$ $\hat{\varphi}$ stetig diff'bar. auf $\hat{T}$ mit

$$(D\hat{\varphi})(\hat{\tau}) = \frac{\partial(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_d)}{\partial(\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_d)}(\hat{\tau}) = \begin{array}{c} \\ 1 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ d \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} t & t' \end{array} \\ \left(\begin{array}{c|ccc} J(\tau) & & 0 & \\ \hline & 1 & & \\ * & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array} \right) \end{array}$$

hat Rang d $\Rightarrow$ invertierbar

$\overset{\text{Kor. 26}}{\Rightarrow}$ (Satz über Umkehrfkt.)

$\exists$ Umgebung $\hat{T}_0$ von $\hat{\tau}$ in $\mathbb{R}^d$ mit

$\quad \hat{\varphi} : \hat{T}_0 \to \hat{\varphi}(\hat{T}_0) =: \hat{V}_0$ ist Diffeomorphismus

Durch weiteres Verkleinern kann man $\hat{T}_0$ von der Form $T_0 \times T_0'$ wählen (Dreiecksungleichung !) $\Rightarrow$ (1)

Da $\hat{\varphi}|_{T \times \{0\}} = \varphi|_T$ $\Rightarrow$ (2)

Zu (3): Kann durch weiteres Verkleinern von T_0 und δ erreicht werden, denn es gilt:

Behauptung: $\exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon^{(d)}(a) \cap M \subseteq \varphi(T_0)$

Bew. Beh: $\varphi(T_0)$ offen in Rel-top (d.h. $\varphi(T_0) \in \mathcal{T}_M$) & $a \in \varphi(T_0)$

$\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebung U_M von a in $\varphi(T_0)$

$\Rightarrow$ $U_M = U \cap M$, wobei U offen in $\mathbb{R}^d$ und

$a \in U$, also $U \cap M \subseteq \varphi(T_0)$ $\quad \blacksquare$

$\boxed{\text{15.6. Satz}}$ (Kartenwechsel)

Sei M n-dim. C^1-Mfkt. Dann gilt

(a) $n =: \dim M$ ist eindeutig bestimmt, d.h. falls

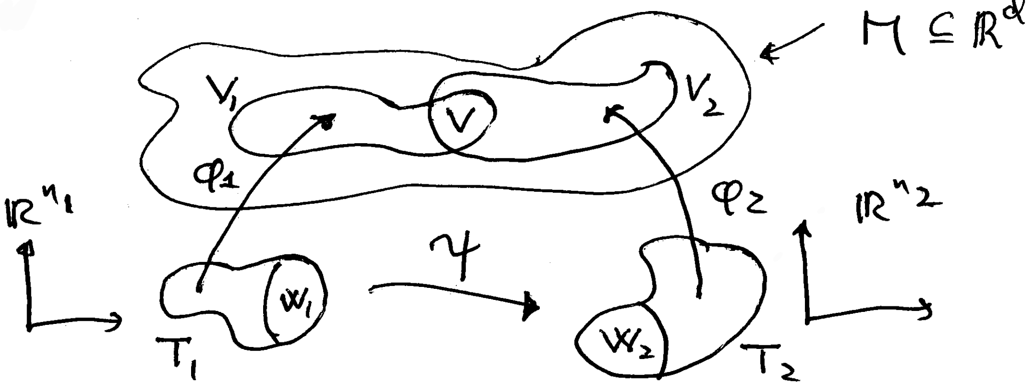
φ Karte von M mit Kartengebiet $\subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow m = n$.

(b) Für $\gamma = 1,2$ sei $\varphi_\gamma : T_\gamma \to V_\gamma$ Karte von M (siehe 15.2(d))

mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ (V offen in M u. V.).

Sei $W_\gamma := \varphi_\gamma^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen in $\mathbb{R}^n$!).

Dann ist $\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W_1 \to W_2$ ein Diffeomorphismus



15.7. Bemerkung: (a) $\exists \psi : [0,1] \to [0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$

stetig & surjektiv (Peano-Kurve) ! – aber:

ψ nicht injektiv.

(b) $\nexists$ Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen

von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ (siehe Übung)

(Nicht einmal ein Homöomorphismus !)

Beweis von Satz 15-6: Für $\gamma = 1,2$ seien $T_\gamma \subseteq \mathbb{R}^{n_\gamma}$ offen, $n_\gamma \in \mathbb{N}$, und $\varphi_\gamma : T_\gamma \to V_\gamma$ Karten mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$.

(i) ψ ist Homöom., da φ_1, φ_2 Homöom.'en.

(ii) Zur: Diff.-barkeit: sei $a \in V$ beliebig fest,

sei $\tau_\gamma := \varphi_\gamma^{-1}(a) \in W_\gamma \subseteq T_\gamma$. Sei $\hat{\varphi}_\gamma : \hat{T}_{0,\gamma} \to \hat{V}_{0,\gamma}$ Flachmacher zu φ_γ bzgl. a (Notation wie in Lemma 15.5, mit angehängtem γ), d.h. $\hat{T}_{\gamma,0}$ ist offene Umgebung von $(\tau_\gamma, \underset{\mathbb{R}^{d-n_\gamma}}{0}) \in \mathbb{R}^d$, $\hat{V}_{\gamma,0}$ off. Umgeb. von a in $\mathbb{R}^d$

Sei $\hat{Y} := \hat{V}_{0,1} \cap \hat{V}_{0,2}$ ($\neq \emptyset$, da $\ni a$), offen in $\mathbb{R}^d$,

$\hat{X}_\gamma := \hat{\varphi}_\gamma^{-1}(\hat{Y})$ (offen in $\mathbb{R}^d$), $\hat{\psi} := \hat{\varphi}_2^{-1} \circ \hat{\varphi}_1 : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$

- Da $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ Diffeom.'en $\Rightarrow$ $\hat{\psi}$ Diffeom mit Umkehrung
$$\hat{\psi}^{-1} = \hat{\varphi}_1^{-1} \circ \hat{\varphi}_2$$
- Setze $X_\gamma := \hat{X}_\gamma \cap W_\gamma$ (offene Umgeb. von τ_γ in $\mathbb{R}^{n_\gamma}$)

(2) in Lem. 15.5 $\Longrightarrow$ & $\hat{\varphi}_\gamma$ bijektiv
$$\hat{\psi}\Big(\underbrace{\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in\,\mathbb{R}^{d-n_1}}\Big) = \underbrace{\begin{pmatrix} \psi(t) \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in\,\mathbb{R}^{d-n_2}} \quad \forall t \in X_1 \quad (*)$$

(von rechts nach links lesen) $\Rightarrow$ ψ stetig diff.-bar in $\tau_1 \in W_1$

(aus $(*)$ $\Rightarrow$ $\psi_k(t) = \hat{\psi}_k\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ $\forall k = 1, \dots, n_2$

$\Rightarrow$ $\forall j = 1, \dots, n_1$, $\forall k = 1, \dots, n_2$: $(\partial_j \psi_k)(t) = (\partial_j \hat{\psi}_k)\left(\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ existiert & ist stetig $\forall t \in X_1$)

Da $T_1 \in W_1$ bel. (da $a \in V$ bel.) $\Rightarrow \psi$ stetig diff.bar auf W_1

Analog: ψ^{-1} stetig diff.bar auf W_2 (vertausche $1 \leftrightarrow 2$)

$\overset{(i)}{\Rightarrow}$ ψ Diffeom. $\Rightarrow$ (b) ✓

(i) & (ii) $\Rightarrow$ ψ ist Diffeom. zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{n_1}$ & $\mathbb{R}^{n_2}$ $\overset{\text{Bem. 15.7(b)}}{\Longrightarrow}$ $n_1 = n_2 \Rightarrow$ (a) ✓

Mfkt. als Lösungsmenge lokaler Gleichungssysteme (vgl. <u>lin.</u> Unterräume von $\mathbb{R}^d$ als Lösungsmenge eines <u>lin.</u> Glg.systems):

15.8. Satz Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ und $n \in \mathbb{N}$, $n \leq d$.

Dann sind äquivalent:

(i) M ist n-dim. C^1-Mfkt.

(ii) $\forall a \in M$ $\exists$ offene Umgebung $\mathcal{U} \ni a$ in $\mathbb{R}^d$ und $\exists f_1, \dots, f_{d-n} : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar mit

(1) $M \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : f_1(x) = \dots = f_{d-n}(x) = 0\}$

(2) $$\text{Rang} \; \frac{\partial(f_1, \dots, f_{d-n})}{\partial(x_1, \dots, x_d)}(a) = d - n$$

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)":

Benutze Flachmacher $\hat{\varphi}$ von Karte φ bzgl. a aus Beweis von Lem. 15.5 mit $U := \hat{V}_0$

und $$f_j := (\hat{\varphi}^{-1})_{n+j} \quad \text{für } j = 1, \dots, d-n.$$

(1) Folgt aus Eig.schaft (3) Lem. 15.5 & Def. von $\hat{\varphi}$

(2) Für (tot.) Differential von Umkehrfkt des Flachmachers gilt:

$$(D\hat{\varphi}^{-1})(a) = \left[(D\hat{\varphi})(\varphi^{-1}(a))\right]^{-1} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 1 \cdots n & n+1 \cdots d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ d \end{array} & \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -BA & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array}\right) \end{array}$$

(durch Invert. der Matrix $(D\hat{\varphi})(\hat{t})$ im Bew. Lem. 15.5, wobei $A := \left[J(\varphi^{-1}(a))\right]^{-1}$ & B den $(d-n)\times n$ - Block dort mit "$*$" bezeichnet).

Die $(d-n)\times d$ - Matrix $\left(-BA \,\vdots\, \begin{smallmatrix} 1 & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{smallmatrix}\right)$ ist gerade $\frac{\partial(f_1,\dots,f_{d-n})}{\partial(x_1,\dots,x_d)}(a)$, und hat Rang $d-n$. ✓

"(i) ⇐ (ii)": Ziel: Konstruiere eine Karte φ!

(2) $\Rightarrow \exists\, 1 \le j_1 < \dots < j_{d-n} \le d$ mit

$$(*) \qquad \text{Rang } \frac{\partial(f_1,\dots,f_{d-n})}{\partial(x_{j_1},\dots,x_{j_{d-n}})}(a) = d-n \quad (\Rightarrow \text{invertierbar})$$

• o.E. sei $j_k = n+k \;\; \forall k = 1,\dots,d-n$ (sonst umnummerier.)

Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von $(a_1,\dots,a_n) =: a'$

sei $U'' \subseteq \mathbb{R}^{d-n}$ " " " $(a_{n+1},\dots,a_d) =: a''$

so dass $U' \times U'' \subseteq U$ (geht wegen Dreiecks-Ungl.!)

$(U \ni a = (a', a''))$

Sei $F: \begin{array}{l} \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' \longrightarrow \mathbb{R}^{d-n} \\ (x', x'') \longmapsto \begin{pmatrix} f_1(x', x'') \\ \vdots \\ f_{d-n}(x', x'') \end{pmatrix} \end{array}$ $\Rightarrow$ stetig diff.-bar (n.V.)

und (n.V.) $M \cap (\mathcal{U}' \times \mathcal{U}'') = \{(x', x'') \in \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' : F(x', x'') = 0\}$

$(*) \Rightarrow$ Satz 9.4 (Impl. Fkt'en)

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}_0' \subseteq \mathcal{U}'$ offene Umg. von a',
$\exists\, \mathcal{U}_0'' \subseteq \mathcal{U}''$ " " " a'',

$\exists\, g: \mathcal{U}_0' \to \mathcal{U}_0''$ stetig diff.-bar mit

(**) $M \cap (\mathcal{U}_0' \times \mathcal{U}_0'') = \{(x', x'') \in \mathcal{U}_0' \times \mathcal{U}_0'' : x'' = g(x')\}$

$\Rightarrow \varphi: \begin{array}{l} \mathcal{U}_0' \longrightarrow M \cap (\mathcal{U}_0' \times \mathcal{U}_0'') \ (\subseteq \mathbb{R}^d) \\ \mathbb{R}^n \ni t \longmapsto \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \end{array}$ stetig diff.-bar

mit $(D\varphi)(t) = \begin{array}{c} n \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline & * & \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} n \\ d-n \end{array}$ $\overset{d \geq n}{\Rightarrow}$ Rang n $\forall t \in \mathcal{U}_0'$

zudem

- φ injektiv per def.
- φ bijektiv wegen (**)
- φ^{-1} stetig, denn sei $x^1 := \varphi(t^1), x^2 := \varphi(t^2)$

$$\Rightarrow |\varphi^{-1}(x^2) - \varphi^{-1}(x^1)|_{\mathbb{R}^n} = |t^2 - t^1|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \left| \begin{pmatrix} t^2 \\ g(t^2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^1 \\ g(t^1) \end{pmatrix} \right|_{\mathbb{R}^d} = |x^2 - x^1|_{\mathbb{R}^d}$$

$\blacksquare$