14. Produktmaße und der Satz von Fubini

Hier: nur endliche Produkte!

14.1. Produkt-σ-Algebren

14.1. Definition Seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$, $j = 1, \dots, n$ Messräume

$$X := \bigtimes_{j=1}^{n} X_j \quad (\text{kartes. Produkt}) \text{ und } \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$p_j : \begin{array}{l} X \to X_j \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j \end{array} \qquad \text{Projektion auf } j\text{'te Koordinate}$$

Produkt-σ-Algebra (auf X): $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j := \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := \sigma(p_1, \dots, p_n)$

- kleinste σ-Algebra auf X, bzgl. der alle p_j messbar (siehe Def. 12.4.)

14.2. Satz Für $j = 1, \dots, n$ sei $\mathcal{E}_j$ Erzeuger von $\mathcal{A}_j$ in X_j, zudem $\exists (E_j^k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}_j$ mit $E_j^k \uparrow X_j$ für $k \to \infty$.

Dann gilt

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\{\underbrace{A_1 \times \dots \times A_n}_{\text{„Produktmenge"}} : A_j \in \mathcal{E}_j \ \forall j = 1, \dots, n\})$$

Beweis: „$\supseteq$": $A_1 \times \dots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(A_n) \in \sigma(p_1, \dots, p_n)$ $\forall A \in \mathcal{E}_j$, $j = 1, \dots, n$

„$\subseteq$": folgt aus: $\forall j = 1, \dots, n$ ist p_j $\tilde{\mathcal{A}}$-$\mathcal{A}_j$-messbar

$$\text{mit } \tilde{\mathcal{A}} := \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_l \in \mathcal{E}_l \ \forall l\}).$$

Also: fixiere $j \in \{1, \dots, n\}$, o.E. $j = 1$: Sei $A_1 \in \mathcal{E}_1$

$$\Rightarrow p_1^{-1}(A_1) = \underbrace{A_1 \times X_2 \times \dots \times X_n}_{\in \tilde{\mathcal{A}}} \overset{\text{n.V.}}{=} \bigcup_{k_2 \in \mathbb{N}} \dots \bigcup_{k_n \in \mathbb{N}} \underbrace{A_1 \times E_2^{k_2} \times \dots \times E_n^{k_n}}_{\in \tilde{\mathcal{A}}}$$

Da E_1 Erzeuger von $\mathcal{A}_1$ $\overset{\text{Satz 12.3.(a)}}{\Longrightarrow}$ p_1 messbar ■

<u>14.3. Bemerkung</u>: Die Voraussetzung $E_j^k \uparrow X_j \ \forall j$ ist wesentlich (Übung!).

<u>14.4. Beispiel</u>

$$\mathcal{B}^d = \underbrace{\mathcal{B} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}}_{d \text{ Faktoren}}$$ Borel-σ-Algebra in $\mathbb{R}^d$ ($\mathcal{B}$: " ——— " — $\mathbb{R}$)

da $\mathcal{B}^d = \sigma(\{\bigtimes_{j=1}^{d} [a_j, b_j[\ : \ a_j \leq b_j\})$, $\mathcal{B} = \sigma(\{[a,b[\ : \ a \leq b\})$

<u>und</u> $[-n,n[\ \uparrow \mathbb{R}$ für $n \to \infty$.

$\boxed{\text{14.5. Lemma}}$ Für $n,m \in \mathbb{N}$ gilt die Assoziativität:

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j\right) \otimes \left(\bigotimes_{j=n+1}^{m} \mathcal{A}_j\right) = \bigotimes_{j=1}^{m} \mathcal{A}_j$$

<u>Beweis</u>: Identifiziere $(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$ und $X_1 \times \dots \times X_n$ vermöge der Bijektion

$$((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$$

Mit Satz 14.2. folgt

$\{A_1 \times \dots \times A_{n-1} : A_j \in \mathcal{A}_j \text{ für } j = 1, \dots, n-1\}$ ist Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}$

Damit ist

$$\mathcal{E} := \{(A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n : A_j \in \mathcal{A}_j, \ j = 1, \dots, n\}$$

Erzeuger von $(\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n$ in $(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$.

$\mathcal{E}$ ist zu identifizieren mit $\{A_1 \times \dots \times A_n : A_j \in \mathcal{A}_j, j = 1, \dots, n\}$, was ein Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ in $X_1 \times \dots \times X_n$ ist. Dies liefert

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathcal{A}_j \right) \otimes \mathcal{A}_n = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und somit das Lemma nach sukzess. Anw. $\boxtimes$

14.2. Produktmaße

Zunächst alles nur für $n=2$, also $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume

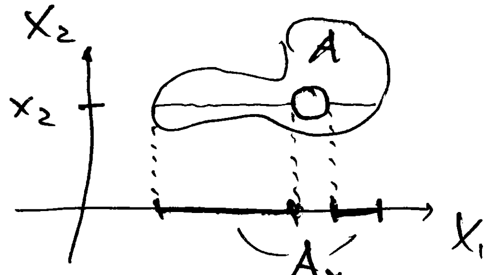
14.6. Definition Sei $A \subseteq X_1 \times X_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

$$A_{x_1} := \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in A\} \qquad \text{x_1-Schnitt von A}$$

$$A_{x_2} := \{x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in A\} \qquad \text{x_2-Schnitt von A}$$

14.7. Lemma Sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, sei $x_i \in X_i$, $i = 1,2$. Dann gilt

$$A_{x_1} \in \mathcal{A}_2 \quad \text{und} \quad A_{x_2} \in \mathcal{A}_1$$



x_2-Schnitt von A

Beweis: nur für x_1-Schnitte; x_2 analog.

Sei $\tilde{\mathcal{A}} := \{Q \subseteq \underbrace{X_1 \times X_2}_{=:X} : Q_{x_1} \in \mathcal{A}_2\} \Rightarrow$

(i) $Q \in \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow (X \setminus Q)_{x_1} \overset{(!)}{=} X_2 \setminus \underbrace{Q_{x_1}}_{\in \mathcal{A}_2 \text{ n.V.}} \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow X \setminus Q \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(ii) $(X)_{x_1} = X_2 \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow X \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(iii) $A^{(k)} \in \tilde{\mathcal{A}} \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^{(k)}\right)_{x_1} \overset{(!)}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{A^{(k)}_{x_1}}_{\in \mathcal{A}_2} \in \mathcal{A}_2$

$\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^{(k)} \in \tilde{\mathcal{A}}$

(i)-(iii): $\tilde{\mathcal{A}}$ ist σ-Algebra auf X.

Außerdem: $(A_1 \times A_2)_{x_1} \overset{(!)}{=} \begin{cases} A_2, & x_1 \in A_1 \\ \emptyset, & x_1 \notin A_1 \end{cases}$ $\qquad (\square)$

$\Rightarrow$ insbesondere, wenn $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j = 1,2$ $\Rightarrow A_1 \times A_2 \in \tilde{\mathcal{A}}$

Somit gilt $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ∎

14.8. Lemma Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, 2$, σ-endliche Maßräume, und sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Dann gilt:

$$S_A^{(1)}: \begin{array}{l} X_1 \to [0,\infty] \\ x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1}) \end{array} \quad \mathcal{A}_1\text{-messbar}, \qquad S_A^{(2)}: \begin{array}{l} X_2 \to [0,\infty] \\ x_2 \mapsto \mu_1(A_{x_2}) \end{array} \quad \mathcal{A}_2\text{-messbar}.$$

Beweis: Nur für $S_A := S_A^{(1)}$; für $S_A^{(2)}$ analog. 14.7.: S_A wohldef.

1. Akt: μ_2 endliches Maß.

Beh: $\mathcal{D} := \{ D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : S_D \ \mathcal{A}_1\text{-messbar} \}$ ist Dynkin-System in $X_1 \times X_2 =: X$.

denn:
- $S_X : x_1 \mapsto \mu_2(X_2)$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar (da konstant).
  $\Rightarrow X \in \mathcal{D}$
- $S_{X \setminus D} : x_1 \mapsto \mu_2(\underbrace{(X \setminus D)_{x_1}}_{X_2 \setminus D_{x_1}}) \overset{\mu_2 \text{ endlich}}{=} \mu_2(X_2) - \underbrace{\mu_2(D_{x_1})}_{S_D(x_1)}$

  also: S_D messbar $\Rightarrow S_{X \setminus D}$ messbar, $\Rightarrow \mathcal{D}$ ist ^{c}-stabil.
- sei $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ paarw. disjunkt

  $\Rightarrow S_{\bigcup_n D_n} : x_1 \mapsto \mu_2(\underbrace{(\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n)_{x_1}}_{\overset{(!)}{=} \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (D_n)_{x_1}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} S_{D_n}(x_1)$ ist messbar

  also ist $\mathcal{D}$ $\dot\cup_\infty$-stabil.

Außerdem: Für $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt:

$S_{A_1 \times A_2} : x_1 \mapsto \mu_2((A_1 \times A_2)_{x_1}) = \underbrace{\mu_2(A_2) \mathbb{1}_{A_1}(x_1)}_{\text{messbar}}$ (siehe (II) Bew. 14.7.)

also: $\mathcal{D} \supseteq \{ A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2 \} =: \mathcal{E}$

da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil und $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \underset{\text{Satz 11.17}}{\Rightarrow} \mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

2. Akt: μ_2 ist σ-endlich.

$\Rightarrow \exists (B_n)_n \subseteq \mathcal{A}_2$ mit $B_n \uparrow X_2$ und $\mu_2(B_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow s_A: x_1 \to \mu_2(A_x) \underset{\text{Stetigkeit von unten}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu_2(B_n \cap A_{x_1})}_{=: \mu_{2,n}(A_{x_1})}$

1. Akt $\Rightarrow x_1 \mapsto \mu_{2,n}(A_{x_1})$ messbar, da $\mu_{2,n} := \mu_2(B_n \cap \cdot)$ endliches Maß

$\Rightarrow s_A$ messbar ∎

14.9. Satz Für $j=1,2$ seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ σ-endl. Maßräume.
Dann $\exists!$ Maß π auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$:

$(*) \quad \pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \ \forall A_2 \in \mathcal{A}_2.$

$\pi =: \mu_1 \otimes \mu_2$ heißt Produktmaß und ist σ-endlich
$\forall A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2})\, d\mu_2(x_2).$$

Für die Eindeutigkeit von π genügt es $(*)$ nur $\forall A_1 \in \mathcal{E}_1$ und $\forall A_2 \in \mathcal{E}_2$ zu fordern, wobei $\mathcal{E}_j$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_j$ und $\exists (B_k^j)_k \subseteq \mathcal{E}_j$ mit $B_k^j \uparrow X_j$ und $\mu_j(B_k^j) < \infty \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall j = 1,2.$

Beweis: Sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Gemäß Lemma 14.7, 14.8. ist $\pi_1(A) := \int_{X_1} s_A^{(1)} d\mu_1 \in [0,\infty]$ wohldef. und

$\pi(\emptyset) = 0$, sowie für $(A^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

paarw. disj.,

$$\Pi_1\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A^n\Big) = \int_{X_1} \underbrace{s^{(1)}_{\bigcup_n A^n}}_{\sum_n s^{(1)}_{A^n}} \, d\mu_1 \underset{\text{mon. Kgz.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \Pi_1(A^n)$$

$\Rightarrow$ Π_1 ist Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$; sei nun $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$

– wegen $s^{(1)}_{A_1\times A_2} = \mu_2(A_2)\mathbb{1}_{A_1}$ $\Rightarrow$ $\Pi_1(A_1\times A_2) = \mu_2(A_2)\mu_1(A_1)$

Analog: $\Pi_2(A) := \int_{X_2} s^{(2)}_A \, d\mu_2$ def. Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

mit $\Pi_2(A_1\times A_2) = \mu_1(A_1)\mu(A_2)$

Seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Erzeuger von $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ wie gefordert

Satz 14.2
$\Rightarrow$ $\mathcal{E} := \{A_1\times A_2 : A_1 \in \mathcal{E}_1, A_2 \in \mathcal{E}_2\}$ ist $\cap$-stabiler

Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, außerdem

$$(**)\quad \begin{cases} B^1_k \times B^2_l \nearrow X_1 \times X_2 \quad \text{für } k,l \to \infty \\ \text{und } \underset{(i=1,2)}{\Pi_i}(B^1_k \times B^2_l) = \mu_1(B^1_k)\mu_2(B^2_l) < \infty \ \forall k,l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Satz 11.28.
$\Rightarrow$ jedes Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist bereits eindeutig durch Wert auf $\mathcal{E}$ festgelegt.

$\Rightarrow$ $\Pi_1 = \Pi_2$ sowie Eindeutigkeit; zudem aus $(**)$:

$\Pi := \Pi_1 = \Pi_2$ σ-endl.

$\blacksquare$

14.10. Korollar Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, .., n$, σ-endl. Maßräume.
Dann $\exists!$ Maß $\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j := \mu_1 \otimes .. \otimes \mu_n$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes .. \otimes \mathcal{A}_n$ mit

(1) $$\Big(\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j\Big)\Big(\bigtimes_{j=1}^{n} A_j\Big) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(A_j) \quad \forall A_j \in \mathcal{A}_j,\ j = 1, .., n.$$

zudem ist $\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j$ σ-endlich.
Falls $\mathcal{E}_j$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_j$ und $\exists (B_k^j)_k \subseteq \mathcal{E}_j$ mit $B_k^j \nearrow X_j$ für $k \to \infty$ und $\mu_j(B_k^j) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j = 1, .., n$, so genügt es (1) für $A_j \in \mathcal{E}_j$, $j = 1, .., n$ zu fordern (für die Eindeut.)

Beweis: σ-Endlichkeit und Eindeutigkeit von $\pi := \bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j$ wie im Beweis von Satz 14.9.

Existenz von π per Induktion: $n = 2$ aus Satz 14.9.

Ind. ann.: $\exists\, \pi' = \bigotimes_{j=1}^{n-1} \mu_j$ für ein $n > 2$

$\Rightarrow \pi'$ σ-endlich $\overset{\text{Satz 14.9}}{\Rightarrow}$ $\pi := \pi' \otimes \mu_n$ wohldef.

auf $(\mathcal{A}_1 \otimes .. \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n$ mit $\pi(A' \times A_n) = \pi'(A')\, \mu_n(A_n)$

$\forall A' \in \mathcal{A}_1 \otimes .. \otimes \mathcal{A}_{n-1}$, $\forall A_n \in \mathcal{A}_n$.

Da $(\mathcal{A}_1 \otimes .. \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \otimes .. \otimes \mathcal{A}_n$ (Lem. 14.5.)

und $\pi'(A_1 \times .. \times A_{n-1}) = \prod_{j=1}^{n-1} \mu_j(A_j) \Rightarrow$ Ind. ann. für $n+1$ $\blacksquare$

14.11. Bemerkung

Zusammen mit Lemma 14.5. folgt $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$:

$$\Big(\bigotimes_{j=1}^{m} \mu_j\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{j=m+1}^{n} \mu_j\Big) = \bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j .$$

Als Anwendung:

Noch ausstehender Beweis von Satz 11.38 für $d \geq 2$:

14.12. Korollar (Neufassung von Satz 11.38.).

$\exists !$ Maß λ^d auf $\mathcal{B}^d$, das Produktmaß $\lambda^d = \bigotimes_{j=1}^{d} \lambda = \lambda \otimes \ldots \otimes \lambda$,

mit

$$\lambda^d\Big(\underbrace{\mathop{\times}_{j=1}^{d} [a_j, b_j[}_{\in \mathcal{I}^d}\Big) = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j)$$

$\forall -\infty < a_j \leq b_j < \infty$, $j = 1, \ldots, d$.

Beweis (geg. der schon bewiesene Fall für $d=1$ in 11.38).

- λ σ-endlich auf $\mathcal{B}$
- $\mathcal{I}$ $\cap$-stabil; für $I_n := [-n, n[\in \mathcal{I}$ gilt
  $I_n \nearrow \mathbb{R}$ $(n \to \infty)$, $\lambda(I_n) = 2n < \infty$
  und $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}$ (also, $\mathcal{I}$ ist Erzeuger wie in 14.10 gefordert)
- $\prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j) = \prod_{j=1}^{d} \lambda([a_j, b_j[)$

$\Rightarrow$ Beh. aus Kor. 14.10. $\blacksquare$

14.3. Integration bzgl. Produktmaßen

14.13. Definition Sei $f: X_1 \times X_2 \to X'$ und $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$,

$$f_{x_1}: \begin{array}{l} X_2 \to X' \\ x_2 \mapsto f(x_1,x_2) \end{array}, \qquad f_{x_2}: \begin{array}{l} X_1 \to X' \\ x_1 \mapsto f(x_1,x_2) \end{array}$$

Schnitt-abbildungen

14.14 Beispiel: Sei $A \subseteq X_1 \times X_2 \Rightarrow (\mathbb{1}_A)_{x_j} = \mathbb{1}_{A_{x_j}}$, $j = 1,2$.

14.15. Lemma Seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$, $j=1,2$, und $(X', \mathcal{A}')$ Messräume, sei $(X, \mathcal{A}) := (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ und $f: X \to X'$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar. Dann gilt $\forall x_1 \in X_1$ und $\forall x_2 \in X_2$:

f_{x_1} ist $\mathcal{A}_2$-$\mathcal{A}'$-messbar und f_{x_2} ist $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}'$-messbar.

Beweis. Sei $A' \in \mathcal{A}'$

$$\Rightarrow f_{x_1}^{-1}(A') = \{x_2 \in X_2 : (x_1,x_2) \in f^{-1}(A')\} = (\underbrace{f^{-1}(A')}_{\in \mathcal{A}})_{x_1} \underset{\text{Lem. 14.7}}{\in} \mathcal{A}_2$$

x_1-Schnitt ∎

14.16. Satz (Fubini-Tonelli)

Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j=1,2$, σ-endliche Maßräume und $(X, \mathcal{A}, \mu) := (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Sei $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) $\mathcal{A}$-messbar. Dann ist, für $g \in \{\operatorname{Re} f_+, \operatorname{Re} f_-, \operatorname{Im} f_+, \operatorname{Im} f_-\}$

$$\begin{array}{l} X_1 \to [0,\infty] \\ x_1 \mapsto \int_{X_2} g(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2) \end{array}, \qquad \begin{array}{l} X_2 \to [0,\infty] \\ x_2 \mapsto \int_{X_1} g(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1) \end{array}$$

$\mathcal{A}_1$-messbar $\qquad$ $\mathcal{A}_2$-messbar

Außerdem:

(i) (Tonelli) Ist $f \geq 0$ f.ü. (d.h. $f(X\setminus N) \subseteq [0,\infty]$, $\mu(N)=0$)

so gilt:
$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2)\right)d\mu_1(x_1)$$
$$= \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f(x_1,x_2)\,d\mu_1(x_1)\right)d\mu_2(x_2) \qquad (*)$$

(Möglicherweise sind alle Integrale $+\infty$!)

(ii) (Fubini) Ist eines der 3 Integrale $\int_X |f(x)|\,d\mu(x)$,
$\int_{X_1}\left(\int_{X_2}|f(x_1,x_2)|\,d\mu_2(x_2)\right)d\mu_1(x_1)$, $\int_{X_2}\left(\int_{X_1}|f(x_1,x_2)|\,d\mu_1(x_1)\right)d\mu_2(x_2)$
endlich, so sind alle 3 endlich, und es gilt $(*)$

Beweis: 1. Schritt: Elementarfunktionen: $f=\sum_{j=1}^J \underbrace{\alpha_j}_{\geq 0} \mathbb{1}_{\underbrace{A_j}_{\in\mathcal{A}}}$

Bsp. 14.13 $\Rightarrow$ $f_{x_1}=\sum_{j=1}^J \alpha_j \mathbb{1}_{(A_j)_{x_1}} \Rightarrow x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}\,d\mu_2 = \sum_{j=1}^J \alpha_j \mu_2((A_j)_{x_1}) \geq 0$

$\mathcal{A}_1$ - messbar (Lemma 14.8.)

– also ist wohldef.:
$$\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\,d\mu_2(x_2)\right)d\mu_1(x_1) = \sum_{j=1}^J \alpha_j \underbrace{\int_{X_1} \mu_2((A_j)_{x_1})\,d\mu_1(x_1)}_{\mu(A_j)} \quad \text{Satz. 14.9}$$
$$= \int_X f(x)\,d\mu(x)$$

Analog mit $1 \leftrightarrow 2$

$\Rightarrow$ $(*)$ ✓ (Für Elementar Fkt'en)

2. Schritt: $f: X \to [0,\infty]$ messbar

$\Rightarrow \exists (\varphi_n)_n$ Folge von Elementarfkt.'en mit $\varphi_n \nearrow f$

$$\Rightarrow (\varphi_n)_{x_j} \nearrow f_{x_j} \ (j=1,2) \Rightarrow x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}\, d\mu_2 \underset{\text{Mon. Kgz.}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1}\, d\mu_2}_{\mathcal{A}_1\text{-messbar (1. Schr.)}}$$

ist messbar (also erste Teil d. Behaupt. für g) &

$$\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1) \overset{\text{Mon. Kgz.}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{X_1}\left(\int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1)}_{\overset{\text{1. Schritt}}{=} \int_X \varphi_n(x)\, d\mu(x)}$$

$$\overset{\text{Mon. Kgz.}}{=} \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

(analog für $1 \leftrightarrow 2$) $\Rightarrow$ (*) ✓ (für $f: X \to [0,\infty]$ messbar)

3. Schritt: Sei $f \geq 0$ μ-f.ü. Dann für $f_- \geq 0$ gilt

$$0 \underset{f_-=0\ \mu\text{-f.ü.}}{=} \int_X f_-(x)\, d\mu(x) \overset{\text{2. Schr.}}{=} \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_-(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1)$$

$$= \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f_-(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1)\right) d\mu_2(x_2)$$

und für $f_+ \geq 0$ gilt (i) (2. Schritt). Subtrahieren $\Rightarrow$ (*) ✓ (für $f \geq 0$ μ-f.ü.).

4. Schritt: $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$ messbar)

aus 3. Schritt + Zerlegung in $(\mathrm{Re} f)_\pm$, $(\mathrm{Im} f)_\pm$ ∎

14.17. Bemerkung

(a) Gebräuchliche Schreibweise:

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$$

(b) Beträge in (ii) sind wesentlich (siehe Übung!)

(c) Analog für n-faches Produkt (z.B. n = 3).

14.4. Anwendung: Transformationsformel für das Lebesgue-Maß.

14.18. Definition & Lemma

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ ein Messraum, und $\varphi: X \to X'$ messbar.

Bildmaß (von μ unter φ): $\varphi(\mu) := \mu \circ \varphi^{-1}: \begin{array}{l} \mathcal{A}' \to [0, \infty] \\ A' \mapsto \mu(\varphi^{-1}(A')) \end{array}$

ist Maß auf $\mathcal{A}'$.

Beweis: Sei $(A_n')_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}'$ Folge paarw. disjunkter Mengen

$\Rightarrow \varphi^{-1}(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n') = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{\varphi^{-1}(A_n')}_{\in \mathcal{A}}$; Rest klar $\blacksquare$

14.19. Beispiele: $X = X' = \mathbb{R}^d$; $\mathcal{A} = \mathcal{A}' = \mathcal{B}^d$; $\mu = \lambda^d$

(a) $T_y: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ x \mapsto x + y \end{array}$ für $y \in \mathbb{R}^d$ (fix) Translation

$\overset{\text{Satz 11.41.}}{\Rightarrow} T_y(\lambda^d) = \lambda^d$

(b) $\Lambda_\alpha: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ x \mapsto \alpha x \end{array}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Skalierung

$\Rightarrow \Lambda_\alpha(\lambda^d) = \frac{1}{|\alpha|^d} \lambda^d$ (siehe Übung!)

(c) $\Pi_{jk}: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ (\dots x_j \dots x_k \dots) \mapsto (\dots x_k \dots x_j \dots) \end{array}$ Permutation

$\Rightarrow \Pi_{jk}(\lambda^d) = \lambda^d$

(da $\lambda^d = \lambda \otimes \dots \otimes \lambda^d$ Produkt gleicher Faktoren)

$\boxed{14.20.\ \text{Satz}}$ (vom Bildmaß)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ Messraum, $\varphi: X \to X'$ messbar und $f: X' \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) messbar. Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(X', \mathcal{A}', \varphi(\mu)) \iff f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$$

In diesem Fall ist, $\forall A' \in \mathcal{A}'$,

$$\int_{A'} f(x')\, d(\varphi(\mu))(x') = \int_{\varphi^{-1}(A')} (f\circ\varphi)(x)\, d\mu(x)$$

Beweis: O.E. $A' = X'$ (sonst ersetze f durch $\mathbb{1}_{A'} f$)

Beh. wahr für $f = \mathbb{1}_{B'}$, $B' \in \mathcal{A}'$, denn

$$\int_{X'} \mathbb{1}_{B'}\, d\varphi(\mu) = (\varphi(\mu))(B') \underset{\text{Def } \varphi(\mu)}{=} \mu(\varphi^{-1}(B')) = \int_X \mathbb{1}_{B'} \circ \varphi\, d\mu$$

$\Rightarrow$ Beh. wahr für Elementarfkt.

monKgz. $\Rightarrow$ " " " $f \geq 0$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar

$\Rightarrow$ " " " f $\varphi(\mu)$-integrierbar ☒

$\boxed{14.21.\ \text{Satz}}$ (Transformationsformel für λ^d)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\varphi: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ stetig diff.bar und $\varphi^{-1}: \varphi(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ stetig diff.bar (Diffeomorphismus)

Dann gilt, $\forall A \subseteq \mathcal{U}, A \in \mathcal{B}^d$:

$$\lambda^d(\varphi(A)) = \int_A |\det(D\varphi)(x)|\, d\lambda^d(x) \qquad (*)$$

$$(d\lambda^d(x) \equiv dx)$$

(Hier: $D\varphi(x)$ Differential von φ (Jacobi-Matrix).)

Mit Satz vom Bildmaß mit $\mu = \lambda^d \circ \varphi$ folgt

14.22. Korollar Unter den Vorauss. von Satz 14.21 gilt

$\forall f \in \mathcal{L}^1(\varphi(\mathcal{U}), \lambda^d)$:

$$(\nabla) \qquad \int_{\varphi(\mathcal{U})} f(y)\,dy = \int_{\mathcal{U}} (f\circ\varphi)(x)\,|\det(D\varphi)(x)|\,dx$$

(Merkregel: "Aus $y = \varphi(x)$ folgt $dy = |\det(D\varphi)(x)|\,dx$" - "Substitution")

Beweis Kor. 14.22: Für Borel'sche $B' = \varphi(B)$, $B \in \mathcal{B}^d$,

sagt Satz 14.21:

$$\int_{\varphi(\mathcal{U})} \mathbb{1}_{B'}(y)\,dy = \int_{\mathcal{U}} (\mathbb{1}_{B'} \circ \varphi)(x)\,|\det(D\varphi)(x)|\,dx$$

Damit gilt Kor. 14.22 (∇) für $f \in E$ (Linearität) und damit für $f \in E^*$ (mon. Kgz.). Zerlegung in $\operatorname{Re} f_\pm$, $\operatorname{Im} f_\pm$ gibt die Beh. ∎

14.23. Beispiel: Sei $\beta: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Bewegung

d.h. $\exists\, y \in \mathbb{R}^d$, $M \in O(d)$ (orthogonale Matrix), so daß

$$\beta(x) = Mx + y, \quad x \in \mathbb{R}^d.$$ Es gilt die

Invarianz des Lebesgue-Maßes unter Bewegungen:

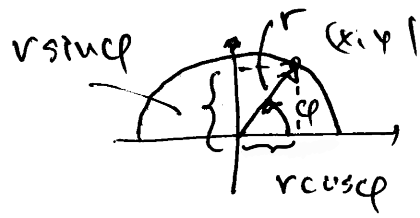
$$\beta(\lambda^d) = \lambda^d,$$

da $|\det D\beta| = |\det(M)| = 1$ ∎

14.24. Beispiel (Polarkoordinaten ($d=2$))

Sei $p: [0,\infty[\times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Funktion der ebenen Polarkoordinaten:

$$p(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$



Dann gilt, für $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ integrierbar:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d(x,y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}_{\ge 0}} \int_{[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,d\varphi\,dr$$
$$= \int_{[0,\infty[\times[0,2\pi]} (f\circ p)(r,\varphi)\,d\lambda^2(r,\varphi)$$

Beweis: Sei $R := \{(x,0) : x \ge 0\}$; R λ^2-Nullmenge, da Teilmenge Hyperebene (!); $\{0\}\cup\{2\pi\}$ ist λ-Nullmenge $\Rightarrow$

Beh. äquiv zu $$\int_{\mathbb{R}^2\setminus R} f\,d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{]0,2\pi[} (f\circ p)(r,\varphi)\, r\,d\varphi\,dr$$

Einschränkung $p:]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2\setminus R$ ist Diffeomorph.

mit $p^{-1}(x,y) = (\sqrt{x^2+y^2}, \arg(x,y))$, wobei

$$\arg(x,y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & y>0 \\ \frac{3\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & y<0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x}, & x<0 \end{cases}$$

ist stetig diff.bar auf $\mathbb{R}^2\setminus R$

Es gilt $$\det(Dp)(r,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r$$

und nach Kor. 14.22 & Fubini (!):

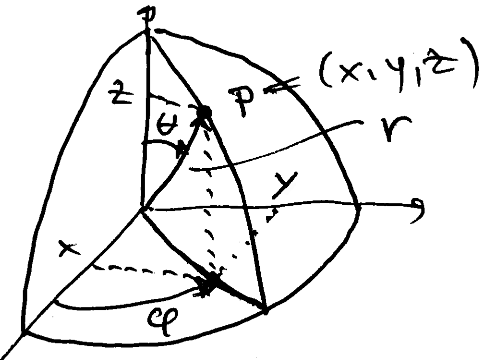
$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus R} f\,d\lambda^2 = \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} (f\circ p)(r,\varphi)\,|\det(Dp)(r,\varphi)|\,d(r,\varphi) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{]0,2\pi[} (f\circ p)(r,\varphi)\, r\, d\varphi\, dr \qquad \blacksquare$$

14.25. Beispiel (Kugelkoordinaten ($d=3$))

Sei $\Phi : \mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die Funktion der Kugelkoordinaten (räumlichen Polarkoordinaten):

$$\Phi(r,\theta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} &0\leq r<\infty,\\ &0\leq\theta\leq\pi\\ &0\leq\varphi\leq 2\pi \end{aligned}$$

Dann gilt, für $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$ integrierbar:



$$\int_{\mathbb{R}^3} f\,d\lambda^3 = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,d(x,y,z)$$
$$= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}}\int_{[0,2\pi]}\int_{[0,\pi]} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\times r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$$
$$= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)\, r^2\sin\theta\, d\lambda^3(r,\theta,\varphi)$$

Beweis: Seien $U := \mathbb{R}_{>0}\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ und $V := \mathbb{R}^3\setminus(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\{0\}\times\mathbb{R})$. Dann sind $U, V\subseteq\mathbb{R}^3$ offen, $\Phi: U\to V$ Diffeomorphismus, mit

$$\Phi^{-1}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \arg(x,y)\right)$$

(mit $\arg\in C^1(\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\{0\}))$, siehe 14.24.)

Es gilt $(D\Phi)(r,\theta,\varphi) = \left(\cdots \right)$ und $\det(D\Phi)(r,\theta,\varphi)$ $= r^2 \sin\theta$

Üb. 11.1 Ana2

Nach Trans.satz/formel (14-22) gilt

$$\int_V f(x,y,z)\, d(x,y,z) = \int_{\mathcal{U}} (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)\, r^2 \sin\theta \, d(r,\theta,\varphi) \overset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow} \text{Beh.} \quad \boxtimes$$

14.26. Bemerkung: Geht auch allgemein in $\mathbb{R}^d$, $d>3$ – für d-dim. Polarkoordinaten, siehe z.B. Walter II, §7.19, Amann-Escher X.8 (Band III), oder Elstrodt V.4.

Beweis von Satz 14.21 (Trans.satz/-formel):

In 6(!) Akten; Induktion nach d (Akte 5 & 6). Erst 4 Akte Vorb.:

1. Akt: $(*)$ in 14.21 $\Longleftrightarrow$

$$(**) \begin{cases} \forall y\in\mathcal{U}\ \exists U_y \subseteq \mathcal{U}, \text{ offen, mit } y\in U_y \ \& \ (*) \text{ in 14.21 gilt für} \\ \varphi|_{U_y} \text{ und } \forall \tilde{A}\in\mathcal{B}^d,\ \tilde{A}\subseteq U_y \end{cases}$$

Bew.: "$\Rightarrow$" klar; globale $\Rightarrow$ lokale Aussage.

"$\Leftarrow$": Aus Lem. 11.16: $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, K_n kpt. Quader

Heine-Borel $\Rightarrow$ jedes K_n wird von endlich viele U_y, $y\in K_n$, überdeckt $\Rightarrow \exists$ abz. Teilüberdeckung $\{U_{y_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{U}$.

Mache diese disjunkt: $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_{y_j} = \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} B_j = \mathcal{U}$ (Lem. 11.12), $B_j \in \mathcal{B}^d$ $(B_j \subseteq U_{y_j})$

Sei nun $\mathcal{B}^d \ni A \subseteq \mathcal{U}$; Folge $(\varphi(A\cap B_j))_{j\in\mathbb{N}}$ paarw. disj.

da $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ paarw. disj. & φ Diffeomorphismus (insbes. Injekt.)

$$\Rightarrow \lambda^d(\varphi(A)) = \lambda^d\Big(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} \varphi(A\cap B_j)\Big) \overset{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^d(\varphi(A\cap B_j))$$

(**) mit $\tilde{A} := A\cap B_j \subseteq U_{y_j}\ \forall j$

$$\overset{\text{d}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\det[(D\varphi)(x)]|\ \mathbb{1}_{A\cap B_j}(x)\,dx$$

mon. Kgz.

$$\overset{\text{b}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |\det[(D\varphi)(x)]| \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A\cap B_j}(x)}_{\mathbb{1}_{\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty}(A\cap B_j)}(x)} dx = \int_A |\det[(D\varphi)(x)]|\,dx$$

d.h., (*) in 14.21 gilt ✓

2. Akt: Seien $\psi : U \to \psi(U)$, $\chi : \psi(U) \to \chi(\psi(U))$ Diffeomorphismen, für die (*) in 14.21 gelte.
Dann gilt (*) in 14.21 auch für $\chi\circ\psi$.

Bew: Sei $A\subseteq U$, $A\in\mathcal{B}^d$; dann, aus (*) in 14.21 für χ:

$$\lambda^d\big(\underbrace{(\chi\circ\psi)(A)}_{\chi(\psi(A))}\big) = \int_{\psi(A)} |\det[(D\chi)(x)]|\,dx$$

Aus Kor. 14.22 (mit $\varphi := \psi$, $U := A$; $f := |\det(D\chi)|$) folgt

$$= \int_A \underbrace{|\det[(D\chi)(\psi(x))]|\cdot|\det[(D\psi)(x)]|}_{=|\det[(D(\chi\circ\psi))(x)]|}\,dx$$

aus $(\det M_1)(\det M_2) = \det(M_1 M_2)$ und Kettenregel

$$(D\chi)(\psi(x))\cdot(D\psi)(x) = (D(\chi\circ\psi))(x). \quad ✓$$

3. Akt: (*) in 14.21 gilt für die Permutationsabb. Π_{jk} in Bsp. 14.19(c)

Bew: • $\lambda^d \circ \Pi_{jk} = \lambda^d$ nach 14.19(c)

• $|\det[(D\Pi_{jk})(x)]| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$, da $D\Pi_{jk}$ Permutationsmatrix (siehe LA). ✓

4. Akt: O.E.: $\forall y \in \mathcal{U}$ kann lokale Diffeo. $\varphi|_{U_y}$ in (**) auf Form $U_y \ni (x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \alpha_{x_1}(x_2, \dots, x_d))$ gewählt werden, wo: Für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ wo $(U_y)_{x_1} \neq \emptyset$ (x_1-Schnitt) ist α_{x_1} Diffeo. definiert auf $(U_y)_{x_1}$; erinnerung:

$$(U_y)_{x_1} := \{ (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} : (x_1, x_2, \dots, x_d) \in U_y \}$$

Bew: Sei $y \in \mathcal{U}$ fest. O.E. sei $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(y) \neq 0$ - denn, falls nicht, $\exists j, k \in \{1, \dots, d\}$ mit $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(y) \neq 0$ (aus Inv.barkeit $(D\varphi)(y)$: $Id = \varphi^{-1} \circ \varphi \Rightarrow \mathbb{1}_{d \times d} = ((D\varphi^{-1}) \circ \varphi) \cdot D\varphi$)

$\Rightarrow \tilde{\varphi} := \Pi_{1j} \circ \varphi \circ \Pi_{1k}$ erfüllt $\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_1}(y) \neq 0$ und $\varphi = \Pi_{1j} \circ \tilde{\varphi} \circ \Pi_{1k}$. Ist also (*) in 14.21 gezeigt für $\tilde{\varphi}$

$\overset{2.,3.\text{Akt}}{\Longrightarrow}$ (*) gilt für bel. Diffeo. φ ✓

Sei also $\varphi : U_y \to \varphi(U_y)$ Diffeo. mit $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(y) \neq 0$.

Ziel: Zerlege φ in Diffeo's von gesuchter Form.

(ii) Sei $\psi : U_y \ni x \mapsto \psi(x) := (\varphi_1(x), x_2, \dots, x_d)$

Weil
$$D\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$
($\mathbb{1}_{k\times k}$ ist $k \times k$ - Einheitsmatrix)

ist $(D\psi)(y)$ inv. bar; Satz über Umkehrfkt. (Kor 9.6 Anm 2)

$\Rightarrow \exists\, \hat{U}_y \subseteq U_y$ offene Umgeb y, worauf ψ Diffeomorp.

$\Rightarrow \tilde{\psi} := \pi_{12} \circ \psi \circ \pi_{12}$ auch Diffeo (dort) und

$$\tilde{\psi}(x) = (x_1, \underbrace{\varphi_1(x_2, x_1, x_3, \dots, x_d), x_3, \dots, x_d}_{=: \alpha_{x_1}(x_2, x_3, \dots, x_d)}) \quad \forall x \in \pi_{12}(\hat{U}_y)$$

$\Rightarrow$ gesuchter Form – denn $\alpha_{x_1}(\hat{x})$ ist stet. diff. bar in $\hat{x} := (x_2, x_3, \dots, x_d) \in (\pi_{12}(\hat{U}_y))_{x_1}$ $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, und

$$(D\alpha_{x_1})(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \circ \pi_{12}\right)(x_1, \hat{x}) & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{1}_{(d-2)\times(d-2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

(Kettenregel!)

$\Rightarrow (D\alpha_{x_1})(\hat{x})$ invertierbar für $(x_1, \hat{x}) = \pi_{12}(y)$

$\Rightarrow$ (Kor 9.6) $\exists$ (evt. kleinere) Umgebung $(\pi_{12}\tilde{U}_y)_{x_1} \subseteq (\pi_{12}\hat{U}_y)_{x_1}$ in $\mathbb{R}^{d-1}$, so α_{x_1} ist Diffeom., für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ für die $(\pi_{12}\tilde{U}_y)_{x_1} \neq \emptyset$ gilt.

(ii) Damit ist $\chi := \varphi \circ \psi^{-1}$ ein Diffeomorphismus auf off. Umgebung $\psi(\tilde{U}_y)$ von $\psi(y)$.

Sei $z = (z_1, \hat{z}) \in \psi(\tilde{U}_y)$, dann gilt $\psi^{-1}(z) = (\eta_{\hat{z}}(z_1), \hat{z})$

mit $\eta_{\hat{z}}$ die Umkehrfkt von $\varphi_1(\cdot, \hat{z})$

(existiert, da $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in \tilde{U}_y$).

$$\Rightarrow \chi(z) = (z_1, \underbrace{\varphi_2(\eta_{\hat{z}}(z_1), \hat{z}), \ldots, \varphi_d(\eta_{\hat{z}}(z_1), \hat{z}))}_{=: \alpha_{z_1}(\hat{z})} \quad \forall z \in \psi(\tilde{U}_y)$$

Da χ Diffeo $\Rightarrow$

$$(D\chi)(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ * & \\ \vdots & (D\alpha_{z_1})(\hat{z}) \\ * & \end{pmatrix}$$

inv.bar $\forall z \in \psi(\tilde{U}_y)$,

also $(D\alpha_{z_1})(\hat{z})$ inv.bar (Abl. bzg. $\hat{z}$)

$\Rightarrow$ Für alle $z_1 \in \mathbb{R}$ wo $(\psi(\tilde{U}_y))_{z_1} \neq \emptyset$ ist

α_{z_1} Diffeomorphismus, def. auf $(\psi(\tilde{U}_y))_{z_1}$

(i) & (ii) $\Rightarrow$ Diffeo's $\tilde{\psi}$ & χ sind von gesuchten Form. Falls (*) in 14.21 für $\tilde{\psi}$ & χ gilt

$\Rightarrow$ (*) in 14.21 gilt für φ, denn

2. & 3. Abl

$$\varphi = \chi \circ \pi_{12} \circ \tilde{\psi} \circ \pi_{12} \quad \checkmark$$

Wir sind für die Induktion jetzt bereit!

5. Akt: Induktionsanfang: (*) in 14.21 wahr für d=1

Bew.: Sei $[a,b[\subseteq \mathcal{U}$ ein Intervall ($a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$)

Dann gilt (*) in 14.21 wegen HDI für Riemann-Integrale, denn

$$\lambda(\varphi([a,b[)) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ streng monoton} \\ (\text{Diffeo!})}}{=} |\varphi(b)-\varphi(a)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{HDI}}}{=} \left| \int_a^b \varphi'(x)\,dx \right|$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ wechselt nicht Vorzeichen } (\varphi' \neq 0 \text{ da Diffeo})}}{=} \int_a^b |\varphi'(x)|\,dx = \int_{[a,b[} |\det[(D\varphi)(x)]|\,d\lambda^1(x)$$

$\Rightarrow$ (*) gilt auf $\mathcal{I} \cap \mathcal{U}$ ($\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B} \cap \mathcal{U}$ mit Ausschöpfungsbed. wie in 11.28).

Da beide Seiten von (*) in 14.21 je ein Maß auf $\mathcal{B} \cap \mathcal{U}$ definieren $\Rightarrow$ Eind.keitssatz 11.28: (*) in 14.21 gilt $\forall A \in \mathcal{B} \cap \mathcal{U}$ ✓

6. Akt: Induktionsschritt: Sei $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Gilt (**) für $d-1$, dann auch für d.

Bew.: Sei $d \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $y \in \mathcal{U}$ bel. fest, und $A \subseteq U_y$, $A \in \mathcal{B}^d$

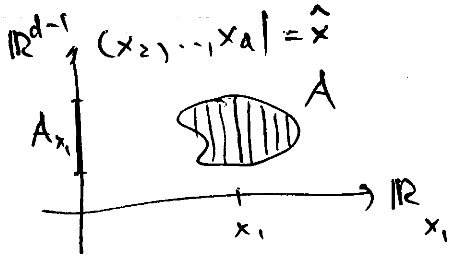
O.E. sei φ von der Form aus 4. Akt

$$\Rightarrow \quad (D\varphi)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ * & \\ \vdots & (D\alpha_{x_1})(\hat{x}) \\ * & \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, \hat{x}) \in U_y$$

$$\Rightarrow \quad \det[(D\varphi)(x)] = \det[(D\alpha_{x_1})(\hat{x})]$$

Sei $A_{x_1} := \{ \hat{x} \in \mathbb{R}^{d-1} : (x_1, \hat{x}) \in A \}$ x_1-Schnitt von A für $x_1 \in \mathbb{R}$

Damit ist



$$A = \dot{\bigcup_{x_1 \in \mathbb{R}}} (\{x_1\} \times A_{x_1}) \quad \text{woraus}$$

$$\boxed{\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_{A_{x_1}}(\hat{x})} \qquad (\text{„Prinzip von Cavalieri“})$$

Es folgt

$$\varphi(A) = \dot{\bigcup_{x_1 \in \mathbb{R}}} \underbrace{\varphi(\{x_1\} \times A_{x_1})}_{= \{x_1\} \times \alpha_{x_1}(A_{x_1})} \overset{\text{Cavalieri}}{\Longrightarrow} \mathbb{1}_{\varphi(A)}(x) = \mathbb{1}_{\alpha_{x_1}(A_{x_1})}(\hat{x})$$

da φ von der Form in 4. Abl

Damit folgt

$$\lambda^d(\varphi(A)) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varphi(A)}(x)\, d\lambda^d(x) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{\mathbb{1}_{\varphi(A)}(x_1, \hat{x})}_{\mathbb{1}_{\alpha_{x_1}(A_{x_1})}(\hat{x})} d\lambda^{d-1}(\hat{x}) \Big)}_{\lambda^{d-1}(\alpha_{x_1}(A_{x_1}))} dx_1$$

$$\overset{\text{Ind.-Ann.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{A_{x_1}} \underbrace{|\det[(D\alpha_{x_1})(\hat{x})]|}_{= |\det[(D\varphi)(x_1, \hat{x})]|} d\lambda^{d-1}(\hat{x}) \Big) dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{\mathbb{1}_{A_{x_1}}(\hat{x})}_{= \mathbb{1}_A(x_1, \hat{x})} |\det[(D\varphi)(x_1, \hat{x})]|\, d\lambda^{d-1}(\hat{x}) \Big) dx_1$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_A |\det[(D\varphi)(x)]|\, d\lambda^d(x) \qquad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Satz folgt aus 1., 5. & 6. Abl. $\blacksquare$