14.4. Anwendung: Transformationsformel für das Lebesgue-Maß.

14.18. Definition & Lemma

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ ein Messraum, und $\varphi : X \to X'$ messbar.

Bildmaß (von μ unter φ): $\varphi(\mu) := \mu \circ \varphi^{-1} : \begin{array}{l} \mathcal{A}' \to [0,\infty] \\ A' \mapsto \mu(\varphi^{-1}(A')) \end{array}$

ist Maß auf $\mathcal{A}'$.

Beweis: Sei $(A_n')_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}'$ Folge paarw. disjunkter Mengen

$\Rightarrow \varphi^{-1}\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n'\right) = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\varphi^{-1}(A_n')}_{\in \mathcal{A}}$; Rest klar ∎

14.19. Beispiele: $X = X' = \mathbb{R}^d$; $\mathcal{A} = \mathcal{A}' = \mathcal{B}^d$; $\mu = \lambda^d$

(a) $T_y : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ x \mapsto x+y \end{array}$ für $y \in \mathbb{R}^d$ (fix) Translation

$\overset{\text{Satz 11.41.}}{\Rightarrow}$ $T_y(\lambda^d) = \lambda^d$

(b) $\Lambda_\alpha : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ x \mapsto \alpha x \end{array}$, $\alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ Skalierung

$\Rightarrow \Lambda_\alpha(\lambda^d) = \frac{1}{|\alpha|^d}\lambda^d$ (siehe Übung!)

(c) $\Pi_{jk} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ (\ldots x_j \ldots x_k \ldots) \mapsto (\ldots x_k \ldots x_j \ldots) \end{array}$ Permutation

$\Rightarrow \Pi_{jk}(\lambda^d) = \lambda^d$

(da $\lambda^d = \lambda \otimes \ldots \otimes \lambda^d$ Produkt gleicher Faktoren)

14.20. Satz (vom Bildmaß)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ Messraum, $\varphi : X \to X'$ messbar und $f : X' \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) messbar. Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(X', \mathcal{A}', \varphi(\mu)) \iff f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$$

In diesem Fall ist, $\forall A' \in \mathcal{A}'$,

$$\int_{A'} f(x')\, d(\varphi(\mu))(x') = \int_{\varphi^{-1}(A')} (f \circ \varphi)(x)\, d\mu(x)$$

Beweis: O.E. $A' = X'$ (sonst ersetze f durch $\mathbb{1}_{A'} f$)

Beh. wahr für $f = \mathbb{1}_{B'}$, $B' \in \mathcal{A}'$, denn

$$\int_{X'} \mathbb{1}_{B'}\, d\varphi(\mu) = (\varphi(\mu))(B') \underset{\text{Def } \varphi(\mu)}{=} \mu(\varphi^{-1}(B')) = \int_X \mathbb{1}_{B'} \circ \varphi\, d\mu$$

$\Rightarrow$ Beh. wahr für Elementarfkt.

monKgz. $\Rightarrow$ " " " $f \geq 0$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar

$\Rightarrow$ " " " f $\varphi(\mu)$-integrierbar ☒

$\Rightarrow$ " " "

14.21. Satz (Transformationsformel für λ^d)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ stetig diff.bar und $\varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ stetig diff.bar (Diffeomorphismus)

Dann gilt, $\forall A \subseteq \mathcal{U}$, $A \in \mathcal{B}^d$:

$$\lambda^d(\varphi(A)) = \int_A |\det(D\varphi)(x)|\, d\lambda^d(x) \qquad (*)$$

$(d\lambda^d(x) \equiv dx)$

(Hier: $D\varphi(x)$ Differential von φ (Jacobi-Matrix).)

Mit Satz vom Bildmaß mit $\mu = \lambda^d \circ \varphi$ folgt

14.22. Korollar Unter den Vorauss. von Satz 14.21 gilt $\forall f \in \mathcal{L}^1(\varphi(\mathcal{U}), \lambda^d)$:

$$(\nabla) \qquad \int_{\varphi(\mathcal{U})} f(y)\,dy = \int_{\mathcal{U}} (f \circ \varphi)(x)\,|\det(D\varphi)(x)|\,dx$$

(Merkregel: "Aus $y = \varphi(x)$ folgt $dy = |\det(D\varphi)(x)|\,dx$" - "Substitution")

Beweis Kor. 14.22: Für Borel'sche $B' = \varphi(B)$, $B \in \mathcal{B}^d$, sagt Satz 14.21:

$$\int_{\varphi(\mathcal{U})} \mathbb{1}_{B'}(y)\,dy = \int_{\mathcal{U}} (\mathbb{1}_{B'} \circ \varphi)(x)\,|\det(D\varphi)(x)|\,dx$$

Damit gilt Kor. 14.22 (∇) für $f \in E$ (Linearität) und damit für $f \in E^*$ (mon. Kgz.). Zerlegung in $\operatorname{Re} f_\pm$, $\operatorname{Im} f_\pm$ gibt die Beh. ∎

14.23. Beispiel: Sei $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Bewegung d.h. $\exists\, y \in \mathbb{R}^d$, $M \in O(d)$ (orthogonale Matrix), so daß

$\beta(x) = Mx + y$, $x \in \mathbb{R}^d$. Es gilt die Invarianz des Lebesgue-Maßes unter Bewegungen:

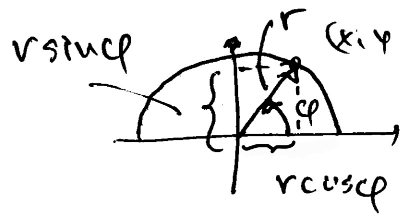
$$\beta(\lambda^d) = \lambda^d,$$

da $|\det D\beta| = |\det(M)| = 1$ ∎

14.24. Beispiel (Polarkoordinaten $(d=2)$)

Sei $p : [0,\infty[\times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Funktion der ebenen Polarkoordinaten:

$$p(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$



Dann gilt, für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ integrierbar:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \, d(x,y)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_{\ge 0}} \int_{[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) \, r \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_{[0,\infty[\times [0,2\pi]} (f \circ p)(r,\varphi) \, d\lambda^2(r,\varphi)$$

Beweis: Sei $R := \{(x,0) : x \ge 0\}$; R λ^2-Nullmenge, da Teilmenge Hyperebene (!); $\{0\} \cup \{2\pi\}$ ist λ-Nullmenge $\Rightarrow$

Beh. äquiv zu $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2 \setminus R} f \, d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{]0,2\pi[} (f \circ p)(r,\varphi) \, r \, d\varphi \, dr$

Einschränkung $p :]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \setminus R$ ist Diffeomorph.

mit $p^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arg(x,y)\right)$, wobei

$$\arg(x,y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & y > 0 \\ \frac{3\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & y < 0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x}, & x < 0 \end{cases}$$

ist stetig diff.bar auf $\mathbb{R}^2 \setminus R$

Es gilt $\quad \det(Dp)(r,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r$

und nach Kor. 14.22 & Fubini (!):

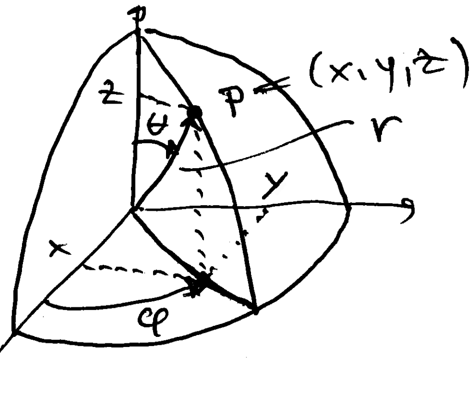
$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}} f\,d\lambda^2 = \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} (f\circ p)(r,\varphi)\,|\det(Dp)(r,\varphi)|\,d(r,\varphi) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{]0,2\pi[} (f\circ p)(r,\varphi)\, r\,d\varphi\,dr$$ ∎

14.25. Beispiel (Kugelkoordinaten ($d=3$))

Sei $\Phi : \mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,\pi]\times[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$ die Funktion der Kugelkoordinaten (räumlichen Polarkoordinaten):

$$\Phi(r,\theta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} 0\leq r<\infty, \\ 0\leq\theta\leq\pi \\ 0\leq\varphi\leq 2\pi \end{array}$$

Dann gilt, für $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{C}$ integrierbar:



$$\int_{\mathbb{R}^3} f\,d\lambda^3 = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,d(x,y,z)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,\pi]} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\times r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi\,dr$$

$$= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)\, r^2\sin\theta\, d\lambda^3(r,\theta,\varphi)$$

Beweis: Seien $U := \mathbb{R}_{>0}\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ und $V := \mathbb{R}^3\setminus(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\{0\}\times\mathbb{R})$. Dann sind $U, V\subseteq\mathbb{R}^3$ offen, $\Phi : U\to V$ Diffeomorphismus, mit

$$\Phi^{-1}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \arg(x,y)\right)$$

(mit $\arg\in C^1(\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\{0\}))$, siehe 14.24.)

Es gilt $(D\Phi)(r,\theta,\varphi) = \left(\cdots \right)$ und $\det(D\Phi)(r,\theta,\varphi) = r^2 \sin\theta$

Nach Trans.satz/formel (14-22) gilt

$$\int_V f(x,y,z)\, d(x,y,z) \underset{\text{Fubini}}{=} \int_{\mathcal{U}} (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)\, r^2\sin\theta\, d(r,\theta,\varphi) \Rightarrow \text{Beh.} \ \square$$

<u>14.26. Bemerkung</u>: Geht auch allgemein in $\mathbb{R}^d$, $d>3$ – für d-dim. Polarkoordinaten, siehe z.B. Walter II, § 7.19, Amann-Escher X.8 (Band III), oder Elstrodt V.4.

<u>Beweis</u> von <u>Satz 14.21</u> (<u>Trans.satz/-formel</u>):

In 6(!) Akten; Induktion nach d (Akte 5 & 6). Erst 4 Akte Vorb.:

<u>1. Akt</u>: $(*)$ in 14.21 $\Leftrightarrow$

$$(**)\quad \begin{cases} \forall y\in\mathcal{U}\ \exists U_y \subseteq \mathcal{U}, \text{ offen, mit } y\in U_y \ \& \ (*) \text{ in 14.21 gilt für} \\ \qquad \varphi|_{U_y} \text{ und } \forall \tilde{A}\in\mathcal{B}^d,\ \tilde{A}\subseteq U_y \end{cases}$$

<u>Bew.</u>: "$\Rightarrow$" klar; globale $\Rightarrow$ lokale Aussage.

"$\Leftarrow$": Aus Lem. 11.16: $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, K_n kpt. Quader

Heine-Borel $\Rightarrow$ jedes K_n wird von endlich viele U_y, $y\in K_n$, überdeckt $\Rightarrow$ $\exists$ <u>abz.</u> Teilüberdeckung $\{U_{y_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{U}$.

Mache diese <u>disjunkt</u>: $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_{y_j} = \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} \underset{\in\mathcal{B}^d}{B_j} = \mathcal{U}$ (Lem. 11.12) $(B_j\subseteq U_{y_j})$

Sei nun $\mathcal{B}^d \ni A \subseteq \mathcal{U}$; Folge $(\varphi(A\cap B_j))_{j\in\mathbb{N}}$ paarw. disj.

da $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ paarw. disj. & φ <u>Diffeomorphism</u>. (insbes. Injekt.)

$$\Rightarrow \lambda^d(\varphi(A)) = \lambda^d\Big(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} \varphi(A\cap B_j)\Big) \overset{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^d(\varphi(A\cap B_j))$$

(**) mit $\tilde{A} := A\cap B_j \subseteq U_{y_j}\ \forall j$

$$\overset{\text{d}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\det[(D\varphi)(x)]|\, \mathbb{1}_{A\cap B_j}(x)\, dx$$

mon. Kgz.

$$\overset{\text{b}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |\det[(D\varphi)(x)]| \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A\cap B_j}(x)}_{\mathbb{1}_{\dot\bigcup_{j=1}(A\cap B_j)}(x)}\, dx = \int_A |\det[(D\varphi)(x)]|\, dx$$

d.h., (*) in 14.21 gilt ✓

2. Akt: Seien $\psi: U \to \psi(U)$, $\chi: \psi(U) \to \chi(\psi(U))$ Diffeomorphismen, für die (*) in 14.21 gelte. Dann gilt (*) in 14.21 auch für $\chi\circ\psi$.

Bew: Sei $A \subseteq U$, $A \in \mathcal{B}^d$; dann, aus (*) in 14.21 für χ:

$$\lambda^d\big(\underbrace{(\chi\circ\psi)(A)}_{\chi(\psi(A))}\big) = \int_{\psi(A)} |\det[(D\chi)(x)]|\, dx$$

Aus Kor. 14.22 (mit $\varphi := \psi$, $U := A$; $f := |\det(D\chi)|$) folgt

$$= \int_A \underbrace{|\det[(D\chi)(\psi(x))]| \cdot |\det[(D\psi)(x)]|}_{= |\det[(D(\chi\circ\psi))(x)]|}\, dx$$

aus $(\det M_1)(\det M_2) = \det(M_1 M_2)$ und Kettenregel

$$(D\chi)(\psi(x)) \cdot (D\psi)(x) = (D(\chi\circ\psi))(x). \quad ✓$$

3. Abl: (*) in 14.21 gilt für die Permutationsabb. Π_{jk} in Bsp. 14.19(c)

Bew: • $\lambda^d \circ \Pi_{jk} = \lambda^d$ nach 14.19(c)

• $|\det[(D\Pi_{jk})(x)]| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$, da $D\Pi_{jk}$ Permutationsmatrix (siehe LA). ✓

4. Abl: O.E.: $\forall y \in \mathcal{U}$ kann lokale Diffeo. $\varphi|_{U_y}$ in (**) auf Form $U_y \ni (x_1, \dots, x_d) \mapsto (x_1, \alpha_{x_1}(x_2, \dots, x_d))$ gewählt werden, wo: Für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ wo $(U_y)_{x_1} \neq \emptyset$ (x_1-Schnitt) ist α_{x_1} Diffeo. definiert auf $(U_y)_{x_1}$; erinnerung:

$$(U_y)_{x_1} := \{ (x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} : (x_1, x_2, \dots, x_d) \in U_y \}$$

Bew: Sei $y \in \mathcal{U}$ fest. O.E. sei $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(y) \neq 0$ - denn, falls nicht, $\exists j, k \in \{1, \dots, d\}$ mit $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(y) \neq 0$ (aus Inv.barkeit $(D\varphi)(y)$: $Id = \varphi^{-1} \circ \varphi \Rightarrow \mathbb{1}_{d \times d} = ((D\varphi^{-1}) \circ \varphi) \cdot D\varphi$)

$\Rightarrow \tilde{\varphi} := \Pi_{1j} \circ \varphi \circ \Pi_{1k}$ erfüllt $\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_1}(y) \neq 0$ und $\varphi = \Pi_{1j} \circ \tilde{\varphi} \circ \Pi_{1k}$. Ist also (*) in 14.21 gezeigt für $\tilde{\varphi}$

$\overset{2.,3.\text{Abl}}{\Longrightarrow}$ (*) gilt für bel. Diffeo. φ ✓

Sei also $\varphi: U_y \to \varphi(U_y)$ Diffeo. mit $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(y) \neq 0$.

Ziel: Zerlege φ in Diffeo's von gesuchter Form.

(i) Sei $\psi : U_y \ni x \mapsto \psi(x) := (\varphi_1(x), x_2, \dots, x_d)$

Weil

$$D\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

($\mathbb{1}_{k\times k}$ ist $k\times k$ - Einheitsmatrix)

ist $(D\psi)(y)$ inv-bar; Satz über Umkehrfkt. (Kor 9.6 Anm 2)

$\Rightarrow \exists\, \hat{U}_y \subseteq U_y$ offene Umgeb y, worauf ψ Diffeomorp.

$\Rightarrow \tilde{\psi} := \Pi_{12} \circ \psi \circ \Pi_{12}$ auch Diffeo (dort) und

$$\tilde{\psi}(x) = (x_1, \underbrace{\varphi_1(x_2, x_1, x_3, \dots, x_d), x_3, \dots, x_d}_{=: \alpha_{x_1}(x_2, x_3, \dots, x_d)}) \quad \forall x \in \Pi_{12}(\hat{U}_y)$$

$\Rightarrow$ gesuchter Form – denn $\alpha_{x_1}(\hat{x})$ ist stet. diff-bar in $\hat{x} := (x_2, x_3, \dots, x_d) \in (\Pi_{12}(\hat{U}_y))_{x_1}$ $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, und

$$(D\alpha_{x_1})(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \circ \Pi_{12}\right)(x_1, \hat{x}) & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{1}_{(d-2)\times(d-2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

(Kettenregel!)

$\Rightarrow (D\alpha_{x_1})(\hat{x})$ invertierbar für $(x_1, \hat{x}) = \Pi_{12}(\underline{\underline{y}})$

$\Rightarrow$ (Kor 9.6) $\exists$ (evt. kleinere) Umgebung $(\Pi_{12}\tilde{U}_y)_{x_1} \subseteq (\Pi_{12}\hat{U}_y)_{x_1}$ in $\mathbb{R}^{d-1}$, so α_{x_1} ist Diffeom., für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ für die $(\Pi_{12}\tilde{U}_y)_{x_1} \neq \emptyset$ gilt.

(ii) Damit ist $\chi := \varphi \circ \psi^{-1}$ ein Diffeomorphismus auf off. Umgebung $\psi(\tilde{U}_y)$ von $\psi(y)$.

Sei $z = (z_1, \hat{z}) \in \psi(\tilde{U}_y)$, dann gilt $\psi^{-1}(z) = (\eta_{\hat{z}}(z_1), \hat{z})$

mit $\eta_{\hat{z}}$ die Umkehrfkt von $\varphi_1(\cdot, \hat{z})$

(existiert, da $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in \tilde{U}_y$).

$$\Rightarrow \chi(z) = (z_1, \underbrace{\varphi_2(\eta_{\hat{z}}(z_1), \hat{z}), \dots, \varphi_d(\eta_{\hat{z}}(z_1), \hat{z})}_{=: \alpha_{z_1}(\hat{z})}) \quad \forall z \in \psi(\tilde{U}_y)$$

Da χ Diffeo $\Rightarrow$
$$(D\chi)(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ * & \\ \vdots & (D\alpha_{z_1})(\hat{z}) \\ * & \end{pmatrix}$$
inv.bar $\forall z \in \psi(\tilde{U}_y)$,

also $(D\alpha_{z_1})(\hat{z})$ inv.bar (Abl. bzg. $\hat{z}$)

$\Rightarrow$ Für alle $z_1 \in \mathbb{R}$ wo $(\psi(\tilde{U}_y))_{z_1} \neq \emptyset$ ist

α_{z_1} Diffeomorphismus, def. auf $(\psi(\tilde{U}_y))_{z_1}$

(i) & (ii) $\Rightarrow$ Diffeo's $\tilde{\psi}$ & χ sind von gesuchten Form. Falls (*) in 14.21 für $\tilde{\psi}$ & χ gilt

$\Rightarrow$ (*) in 14.21 gilt für φ, denn

2. & 3. Abl
$$\varphi = \chi \circ \pi_{12} \circ \tilde{\psi} \circ \pi_{12} \quad \checkmark$$

Wir sind für die Induktion jetzt bereit!

5. Abt: Induktionsanfang: (*) in 14.21 wahr für $d=1$

Bew.: Sei $[a,b[\subseteq \mathcal{U}$ ein Intervall ($a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$)

Dann gilt (*) in 14.21 wegen HDI für Riemann-Integrale,

denn $\lambda(\varphi([a,b[)) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ streng monoton} \\ (\text{Diffeo!})}}{=} |\varphi(b) - \varphi(a)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{HDI}}}{=} \left| \int_a^b \varphi'(x)\, dx \right|$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ wechselt nicht Vorzeichen } (\varphi' \neq 0 \text{ da Diffeo})}}{=} \int_a^b |\varphi'(x)|\, dx = \int_{[a,b[} |\det[(D\varphi)(x)]|\, d\lambda^1(x)$$

$\Rightarrow$ (*) gilt auf $\mathcal{I} \cap \mathcal{U}$ ($\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B} \cap \mathcal{U}$ mit Ausschöpfungsbed. wie in 11.28).

Da beide Seiten von (*) in 14.21 je ein Maß auf $\mathcal{B} \cap \mathcal{U}$ definieren $\Rightarrow$ Eind.keitssatz 11.28: (*) in 14.21 gilt $\forall A \in \mathcal{B} \cap \mathcal{U}$ ✓

6. Abt: Induktionsschritt: Sei $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Gilt (**) für $d-1$, dann auch für d.

Bew.: Sei $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $y \in \mathcal{U}$ bel. fest, und $A \subseteq U_y$, $A \in \mathcal{B}^d$

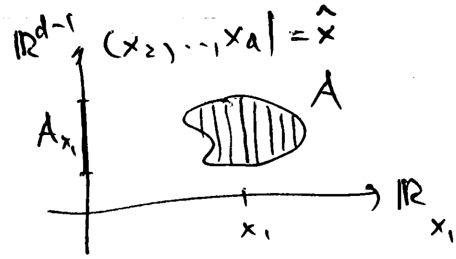
O.E. sei φ von der Form aus 4. Abt

$$\Rightarrow \quad (D\varphi)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & (D\alpha_{x_1})(\hat{x}) & \\ * & & & \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, \hat{x}) \in U_y$$

$$\Rightarrow \quad \det[(D\varphi)(x)] = \det[(D\alpha_{x_1})(\hat{x})]$$

Sei $A_{x_1} := \{ \hat{x} \in \mathbb{R}^{d-1} : (x_1, \hat{x}) \in A \}$ x_1-Schnitt von A für $x_1 \in \mathbb{R}$

Damit ist



$$A = \dot{\bigcup_{x_1 \in \mathbb{R}}} (\{x_1\} \times A_{x_1}) \quad \text{woraus}$$

$$\boxed{\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_{A_{x_1}}(\hat{x})}$$ („Prinzip von Cavalieri")

Es folgt

$$\varphi(A) = \dot{\bigcup_{x_1 \in \mathbb{R}}} \underbrace{\varphi(\{x_1\} \times A_{x_1})}_{= \{x_1\} \times \alpha_{x_1}(A_{x_1})} \overset{\text{Cavalieri}}{\Longrightarrow} \mathbb{1}_{\varphi(A)}(x) = \mathbb{1}_{\alpha_{x_1}(A_{x_1})}(\hat{x})$$

da φ von der Form in 4. Abl

Damit folgt

$$\lambda^d(\varphi(A)) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varphi(A)}(x)\, d\lambda^d(x) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{\mathbb{1}_{\varphi(A)}(x_1, \hat{x})}_{\mathbb{1}_{\alpha_{x_1}(A_{x_1})}(\hat{x})} d\lambda^{d-1}(\hat{x}) \Big)}_{\lambda^{d-1}(\alpha_{x_1}(A_{x_1}))} dx_1$$

$$\overset{\text{Ind.-Ann.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{A_{x_1}} \underbrace{|\det[(D\alpha_{x_1})(\hat{x})]|}_{= |\det[(D\varphi)(x_1, \hat{x})]|} d\lambda^{d-1}(\hat{x}) \Big) dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{\mathbb{1}_{A_{x_1}}(\hat{x})}_{= \mathbb{1}_A(x_1, \hat{x})} |\det[(D\varphi)(x_1, \hat{x})]|\, d\lambda^{d-1}(\hat{x}) \Big) dx_1$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_A |\det[(D\varphi)(x)]|\, d\lambda^d(x) \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Satz folgt aus 1., 5. & 6. Abl. $\blacksquare$