14.3. Integration bzgl. Produktmaßen

14.13. Definition Sei $f : X_1 \times X_2 \to X'$ und $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$,

$$f_{x_1} : \begin{array}{l} X_2 \to X' \\ x_2 \mapsto f(x_1, x_2) \end{array}, \qquad f_{x_2} : \begin{array}{l} X_1 \to X' \\ x_1 \mapsto f(x_1, x_2) \end{array}$$

Schnitt-abbildungen

14.14 Beispiel: Sei $A \subseteq X_1 \times X_2 \Rightarrow (\mathbb{1}_A)_{x_j} = \mathbb{1}_{A_{x_j}}$, $j = 1, 2$.

14.15. Lemma Seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$, und $(X', \mathcal{A}')$ Messräume, sei $(X, \mathcal{A}) := (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ und $f : X \to X'$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar.

Dann gilt $\forall x_1 \in X_1$ und $\forall x_2 \in X_2$:

f_{x_1} ist $\mathcal{A}_2$-$\mathcal{A}'$-messbar und f_{x_2} ist $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}'$-messbar.

Beweis. Sei $A' \in \mathcal{A}'$

x_1- Schnitt

$$\Rightarrow \quad f_{x_1}^{-1}(A') = \{x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in f^{-1}(A')\} = \Big(\underbrace{f^{-1}(A')}_{\in \mathcal{A}}\Big)_{x_1} \underset{\text{Lem. 14.7}}{\in} \mathcal{A}_2 \qquad \blacksquare$$

14.16. Satz (Fubini-Tonelli)

Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, 2$, σ-endliche Maßräume und $(X, \mathcal{A}, \mu) := (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) $\mathcal{A}$-messbar. Dann ist, für $g \in \{\operatorname{Re} f_+, \operatorname{Re} f_-, \operatorname{Im} f_+, \operatorname{Im} f_-\}$

$$\begin{array}{l} X_1 \to [0, \infty] \\ x_1 \mapsto \displaystyle\int_{X_2} g(x_1, x_2)\, d\mu_2(x_2) \end{array}, \qquad \begin{array}{l} X_2 \to [0, \infty] \\ x_2 \mapsto \displaystyle\int_{X_1} g(x_1, x_2)\, d\mu_1(x_1) \end{array}$$

$\mathcal{A}_1$-messbar $\qquad$ $\mathcal{A}_2$-messbar

Außerdem:

(i) (Tonelli) Ist $f \geq 0$ f.ü. (d.h. $f(X \setminus N) \subseteq [0,\infty]$, $\mu(N)=0$)

so gilt:
$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)$$
$$= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1,x_2)\,d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) \qquad (*)$$

(Möglicherweise sind alle Integrale $+\infty$!)

(ii) (Fubini) Ist eines der 3 Integrale $\int_X |f(x)|\,d\mu(x)$,

$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x_1,x_2)|\,d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)$, $\int_{X_2} \left(\int_{X_1} |f(x_1,x_2)|\,d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2)$

endlich, so sind alle 3 endlich, und es gilt $(*)$

Beweis: 1. Schritt: Elementarfunktionen: $f = \sum_{j=1}^{J} \underbrace{\alpha_j}_{\geq 0} \mathbb{1}_{\underbrace{A_j}_{\in \mathcal{A}}}$

Bsp. 14.13
$\Rightarrow$ $f_{x_1} = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \mathbb{1}_{(A_j)_{x_1}} \Rightarrow x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}\,d\mu_2 = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j\, \mu_2((A_j)_{x_1}) \geq 0$

$\mathcal{A}_1$ - messbar (Lemma 14.8.)

- also ist wohldef.:
$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\,d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \underbrace{\int_{X_1} \mu_2((A_j)_{x_1})\,d\mu_1(x_1)}_{\mu(A_j)} \quad \text{Satz. 14.9}$$
$$= \int_X f(x)\,d\mu(x)$$

Analog mit $1 \leftrightarrow 2$

$\Rightarrow$ $(*)$ ✓ (Für Elementar Fkt'en)

2. Schritt: $f: X \to [0,\infty]$ messbar

$\Rightarrow \exists (\varphi_n)_n$ Folge von Elementarfkt.'en mit $\varphi_n \nearrow f$

$\Rightarrow (\varphi_n)_{x_j} \nearrow f_{x_j}$ $(j=1,2) \Rightarrow x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}\, d\mu_2 \underset{\text{Mon. Kgz.}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1}\, d\mu_2}_{\mathcal{A}_1\text{-messbar (1. Schr.)}}$

ist messbar (also erste beide Behaupt. für g) &

$$\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1) \overset{\text{Mon. Kgz.}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{X_1}\left(\int_{X_2}(\varphi_n)_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1)}_{\overset{\text{1. Schritt}}{=} \int_X \varphi_n(x)\, d\mu(x)}$$

$$\overset{\text{Mon. Kgz.}}{=} \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

(analog für $1 \leftrightarrow 2$) $\Rightarrow (*)$ ✓ (für $f: X \to [0,\infty]$ messbar)

3. Schritt: Sei $f \geq 0$ μ-f.ü. Dann für $f_- \geq 0$ gilt

$$\underset{f_-=0\ \mu\text{-f.ü.}}{0 =} \int_X f_-(x)\, d\mu(x) \overset{\text{2. Schr.}}{=} \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_-(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1)$$

$$= \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f_-(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1)\right) d\mu_2(x_2)$$

und für $f_+ \geq 0$ gilt (i) (2. Schritt). Subtrahieren $\Rightarrow (*)$ ✓ (für $f \geq 0$ μ-f.ü.).

4. Schritt: $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$ messbar)

aus 3. Schritt + Zerlegung in $(\mathrm{Re} f)_\pm$, $(\mathrm{Im} f)_\pm$ ∎

14.17. Bemerkung

(a) Gebräuchliche Schreibweise:

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$$

(b) Beträge in (ii) sind wesentlich (siehe Übung!)

(c) Analog für n-faches Produkt (z.B. $n = 3$).