14.2. Produktmaße

Zunächst alles nur für $n=2$, also $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume

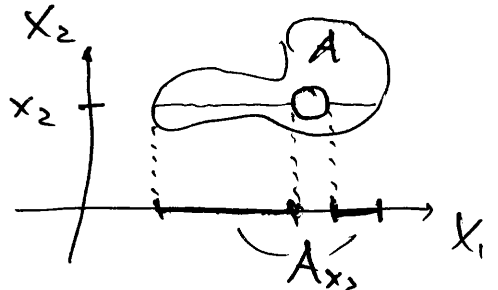
14.6. Definition Sei $A \subseteq X_1 \times X_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

$$A_{x_1} := \{ x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in A \} \quad x_1\text{-Schnitt von } A$$

$$A_{x_2} := \{ x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in A \} \quad x_2\text{-Schnitt von } A$$

14.7. Lemma Sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, sei $x_i \in X_i$, $i = 1,2$. Dann gilt

$$A_{x_1} \in \mathcal{A}_2 \text{ und } A_{x_2} \in \mathcal{A}_1$$



x_2-Schnitt von A

Beweis: nur für x_1-Schnitte; x_2 analog.

Sei $\tilde{\mathcal{A}} := \{ Q \subseteq \underbrace{X_1 \times X_2}_{=:X} : Q_{x_1} \in \mathcal{A}_2 \}$ $\Rightarrow$

(i) $Q \in \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow (X \setminus Q)_{x_1} \overset{(!)}{=} X_2 \setminus \underbrace{Q_{x_1}}_{\in \mathcal{A}_2 \text{ n.V.}} \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow X \setminus Q \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(ii) $(X)_{x_1} = X_2 \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow X \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(iii) $A^{(k)} \in \tilde{\mathcal{A}} \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^{(k)} \right)_{x_1} \overset{(!)}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{A^{(k)}_{x_1}}_{\in \mathcal{A}_2} \in \mathcal{A}_2$

$\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^{(k)} \in \tilde{\mathcal{A}}$

(i)–(iii): $\tilde{\mathcal{A}}$ ist σ-Algebra auf X.

Außerdem: $(A_1 \times A_2)_{x_1} \overset{(!)}{=} \begin{cases} A_2, & x_1 \in A_1 \\ \emptyset, & x_1 \notin A_1 \end{cases}$ (□)

$\Rightarrow$ insbesondere, wenn $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j = 1,2$ $\Rightarrow A_1 \times A_2 \in \tilde{\mathcal{A}}$

Somit gilt $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ■

14.8. Lemma Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, 2$, σ-Endliche Maßräume, und sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Dann gilt:

$S_A^{(1)}: \begin{array}{l} X_1 \to [0, \infty] \\ x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1}) \end{array}$ $\mathcal{A}_1$-messbar, $S_A^{(2)}: \begin{array}{l} X_2 \to [0, \infty] \\ x_2 \mapsto \mu_1(A_{x_2}) \end{array}$ $\mathcal{A}_2$-messbar.

Beweis: Nur für $S_A := S_A^{(1)}$; für $S_A^{(2)}$ analog. 14.7.: S_A wohldef.

1. Akt: μ_2 endliche Maß.

Beh: $\mathcal{D} := \{ D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : S_D\ \mathcal{A}_1\text{-messbar} \}$ ist Dynkin-System in $X_1 \times X_2 =: X$.

denn:
- $S_X : x_1 \mapsto \mu_2(X_2)$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar (da konstant).
  $\Rightarrow X \in \mathcal{D}$
- $S_{X \setminus D} : x_1 \mapsto \mu_2(\underbrace{(X \setminus D)_{x_1}}_{X_2 \setminus D_{x_1}}) \overset{\mu_2 \text{ endlich}}{=} \mu_2(X_2) - \underbrace{\mu_2(D_{x_1})}_{S_D(x_1)}$

  - also: S_D messbar $\Rightarrow S_{X \setminus D}$ messbar, $\Rightarrow \mathcal{D}$ ist ^{c}-stabil.
- sei $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ paarw. disjunkt
  $\Rightarrow S_{\dot\bigcup_n D_n} : x_1 \mapsto \mu_2(\underbrace{(\dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n)_{x_1}}_{\overset{(!)}{=} \dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (D_n)_{x_1}}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} S_{D_n}(x_1)$ ist messbar

  also ist $\mathcal{D}$ $\dot\cup_\infty$-stabil.

Außerdem: Für $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt:

$S_{A_1 \times A_2} : x_1 \mapsto \mu_2((A_1 \times A_2)_{x_1}) = \underbrace{\mu_2(A_2) \mathbb{1}_{A_1}(x_1)}_{\text{messbar}}$ (siehe (I) Bew. 14.7.)

also: $\mathcal{D} \supseteq \{ A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2 \} =: \mathcal{E}$

da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil und $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 \underset{\text{Satz 11.17.}}{\Longrightarrow} \mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

2. Akt: μ_2 ist σ-endlich.

$\Rightarrow \exists (B_n)_n \subseteq \mathcal{A}_2$ mit $B_n \nearrow X_2$ und $\mu_2(B_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \ s_A : x_1 \to \mu_2(A_x) \underset{\substack{\text{Stetigkeit} \\ \text{von unten}}}{\nearrow} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu_2(B_n \cap A_{x_1})}_{=: \mu_{2,n}(A_{x_1})}$$

1. Akt $\Rightarrow$ $x_1 \mapsto \mu_{2,n}(A_{x_1})$ messbar, da $\mu_{2,n} := \mu_2(B_n \cap \cdot)$ endliches Maß

$\Rightarrow s_A$ messbar ∎

$\boxed{\text{14.9. Satz}}$ Für $j=1,2$ seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ σ-endl. Maßräume.

Dann $\exists!$ Maß Π auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$:

$$(*) \quad \Pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \ \forall A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

$\Pi =: \mu_1 \otimes \mu_2$ heißt Produktmaß und ist σ-endlich

$\forall A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2})\, d\mu_2(x_2).$$

Für die Eindeutigkeit von Π genügt es $(*)$ nur $\forall A_1 \in \mathcal{E}_1$ und $\forall A_2 \in \mathcal{E}_2$ zu fordern, wobei $\mathcal{E}_j$ ein ∩-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_j$ und $\exists (B_k^j)_k \subseteq \mathcal{E}_j$ mit $B_k^j \nearrow X_j$ und $\mu_j(B_k^j) < \infty \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall j = 1,2$.

Beweis: Sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Gemäß Lemma 14.7, 14.8 ist $\Pi_1(A) := \int_{X_1} s_A^{(1)} d\mu_1 \in [0,\infty]$ wohldef. und

$\Pi(\emptyset) = 0$, sowie für $(A^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

paarw. disj.,

$$\Pi_1\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A^n\Big) = \int_{X_1} \underbrace{s^{(1)}_{\bigcup_n A^n}}_{\sum_n s^{(1)}_{A^n}} \, d\mu_1 \underset{\text{mon. Kgz.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \Pi_1(A^n)$$

$\Rightarrow$ Π_1 ist Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$; sei nun $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$

– wegen $s^{(1)}_{A_1\times A_2} = \mu_2(A_2)\,\mathbb{1}_{A_1}$ $\Rightarrow$ $\Pi_1(A_1\times A_2) = \mu_2(A_2)\,\mu_1(A_1)$

Analog: $\Pi_2(A) := \int_{X_2} s^{(2)}_A \, d\mu_2$ def. Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

mit $\Pi_2(A_1\times A_2) = \mu_1(A_1)\,\mu(A_2)$

Seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Erzeuger von $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ wie gefordert

Satz 14.2

$\Rightarrow$ $\mathcal{E} := \{A_1\times A_2 : A_1 \in \mathcal{E}_1, A_2 \in \mathcal{E}_2\}$ ist $\cap$-stabiler

Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, außerdem

$$(**)\quad \begin{cases} B^1_k \times B^2_l \nearrow X_1 \times X_2 \quad \text{für } k,l \to \infty \\ \text{und } \underset{(i=1,2)}{\Pi_i}(B^1_k \times B^2_l) = \mu_1(B^1_k)\,\mu_2(B^2_l) < \infty \ \forall k,l \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Satz 11.28.

$\Rightarrow$ jedes Maß auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ist bereits eindeutig durch Wert auf $\mathcal{E}$ festgelegt.

$\Rightarrow$ $\Pi_1 = \Pi_2$ sowie Eindeutigkeit; zudem aus $(**)$:

$\Pi := \Pi_1 = \Pi_2$ σ-endl.

$\boxtimes$

14.10. Korollar Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j=1,\dots,n$, σ-endl. Maßräume

Dann $\exists!$ Maß $\bigotimes_{j=1}^n \mu_j := \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ mit

(1) $$\Big(\bigotimes_{j=1}^n \mu_j\Big)\Big(\bigtimes_{j=1}^n A_j\Big) = \prod_{j=1}^n \mu_j(A_j) \qquad \forall A_j \in \mathcal{A}_j,\ j=1,\dots,n.$$

zudem ist $\bigotimes_{j=1}^n \mu_j$ σ-endlich.

Falls $\mathcal{E}_j$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_j$ und $\exists (B_k^j)_k \subseteq \mathcal{E}_j$ mit $B_k^j \nearrow X_j$ für $k \to \infty$ und $\mu_j(B_k^j) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j=1,\dots,n$, so genügt es (1) für $A_j \in \mathcal{E}_j$, $j=1,\dots,n$ zu fordern (für die Eindeut.)

Beweis: σ-Endlichkeit und Eindeutigkeit von $\pi := \bigotimes_{j=1}^n \mu_j$ wie im Beweis von Satz 14.9.

Existenz von π per Induktion: $n=2$ aus Satz 14.9.

Ind. ann.: $\exists\, \pi' = \bigotimes_{j=1}^{n-1} \mu_j$ für ein $n > 2$

$\Rightarrow \pi'$ σ-endlich $\overset{\text{Satz 14.9}}{\Rightarrow}$ $\pi := \pi' \otimes \mu_n$ wohldef.

auf $(\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n$ mit $\pi(A' \times A_n) = \pi'(A')\,\mu_n(A_n)$

$\forall A' \in \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}$, $\forall A_n \in \mathcal{A}_n$.

Da $(\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ (Lem. 14.5.)

und $\pi'(A_1 \times \dots \times A_{n-1}) = \prod_{j=1}^{n-1} \mu_j(A_j) \Rightarrow$ Ind.ann. für $n+1$ ∎

14.11. Bemerkung

Zusammen mit Lemma 14.5. folgt $\forall n,m \in \mathbb{N}$, $n > m$:

$$\Big(\bigotimes_{j=1}^m \mu_j\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{j=m+1}^n \mu_j\Big) = \bigotimes_{j=1}^n \mu_j .$$

Als Anwendung:

Noch ausstehender Beweis von Satz 11.38 für $d \geq 2$:

$\boxed{\text{14.12. Korollar}}$ (Neufassung von Satz 11.38.).

$\exists!$ Maß λ^d auf $\mathcal{B}^d$, das Produktmaß $\lambda^d = \bigotimes_{j=1}^{d} \lambda = \lambda \otimes \ldots \otimes \lambda$,

mit
$$\lambda^d \underbrace{\Big(\bigtimes_{j=1}^{d} [a_j, b_j[\Big)}_{\in \mathcal{I}^d} = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j)$$

$\forall -\infty < a_j \leq b_j < \infty$, $j = 1, \ldots, d$.

Beweis (geg. der schon bewiesene Fall für $d=1$ in 11.38).

- λ σ-endlich auf $\mathcal{B}$
- $\mathcal{I}$ $\cap$-stabil; für $I_n := [-n, n[\in \mathcal{I}$ gilt
  $I_n \nearrow \mathbb{R}$ $(n \to \infty)$, $\lambda(I_n) = 2n < \infty$
  und $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}$ (also, $\mathcal{I}$ ist Erzeuger wie in 14.10 gefordert)
- $\prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j) = \prod_{j=1}^{d} \lambda([a_j, b_j[)$

$\Rightarrow$ Beh. aus Kor. 14.10. $\blacksquare$