14. Produktmaße und der Satz von Fubini

Hier: nur endliche Produkte!

14.1. Produkt-σ-Algebren

14.1. Definition Seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$, $j=1,\dots,n$ Messräume

$$X := \mathop{\times}_{j=1}^{n} X_j \quad (\text{kartes. Produkt}) \text{ und } \forall j \in \{1,\dots,n\}$$

$$p_j : \begin{array}{l} X \to X_j \\ (x_1,\dots,x_n) \mapsto x_j \end{array} \qquad \text{Projektion auf } j\text{'te Koordinate}$$

Produkt-σ-Algebra (auf X): $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j := \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := \sigma(p_1,\dots,p_n)$

- kleinste σ-Algebra auf X, bzgl. der alle p_j messbar (siehe Def. 12.4.)

14.2. Satz Für $j=1,\dots,n$ sei $\mathcal{E}_j$ Erzeuger von $\mathcal{A}_j$ in X_j, zudem $\exists (E_j^k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}_j$ mit $E_j^k \uparrow X_j$ für $k\to\infty$.

Dann gilt

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\{\underbrace{A_1 \times \dots \times A_n}_{\text{„Produktmenge"}} : A_j \in \mathcal{E}_j \ \forall j=1,\dots,n\})$$

Beweis: „$\supseteq$": $A_1 \times \dots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(A_n) \in \sigma(p_1,\dots,p_n)$ $\forall A \in \mathcal{E}_j$, $j=1,\dots,n$

„$\subseteq$": folgt aus: $\forall j=1,\dots,n$ ist p_j $\tilde{\mathcal{A}}$-$\mathcal{A}_j$-messbar

mit $\tilde{\mathcal{A}} := \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_l \in \mathcal{E}_l \ \forall l\})$.

Also: fixiere $j \in \{1,\dots,n\}$, o.E. $j=1$: Sei $A_1 \in \mathcal{E}_1$

$$\Rightarrow p_1^{-1}(A_1) = \underbrace{A_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n}_{\in \tilde{\mathcal{A}}} \overset{\text{n.V.}}{=} \bigcup_{k_2 \in \mathbb{N}} \cdots \bigcup_{k_n \in \mathbb{N}} \underbrace{A_1 \times E_2^{k_2} \times \ldots \times E_n^{k_n}}_{\in \tilde{\mathcal{A}}}$$

Da $\mathcal{E}_1$ Erzeuger von $\mathcal{A}_1$ $\overset{\text{Satz 12.3.(a)}}{\Longrightarrow}$ p_1 messbar ∎

14.3. Bemerkung: Die Voraussetzung $E_j^k \nearrow X_j$ $\forall j$ ist wesentlich (Übung!).

14.4. Beispiel $\mathcal{B}^d = \underbrace{\mathcal{B} \otimes \ldots \otimes \mathcal{B}}_{d \text{ Faktoren}}$ Borel-σ-Algebra in $\mathbb{R}^d$ ($\mathcal{B}$: " — " — $\mathbb{R}$)

da $\mathcal{B}^d = \sigma(\{ \bigtimes_{j=1}^{d} [a_j, b_j[\; : \; a_j \leq b_j \})$, $\mathcal{B} = \sigma(\{ [a,b[\; : \; a \leq b \})$

<u>und</u> $[-n, n[\; \nearrow \mathbb{R}$ für $n \to \infty$.

$\boxed{\text{14.5. Lemma}}$ Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt die Assoziativität:

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j\right) \otimes \left(\bigotimes_{j=n+1}^{m} \mathcal{A}_j\right) = \bigotimes_{j=1}^{m} \mathcal{A}_j$$

<u>Beweis</u>: Identifiziere $(X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$ und $X_1 \times \ldots \times X_n$ vermöge der Bijektion

$$((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n) \longmapsto (x_1, \ldots, x_n)$$

Mit Satz 14.2. folgt

$\{ A_1 \times \ldots \times A_{n-1} : A_j \in \mathcal{A}_j \text{ für } j = 1, \ldots, n-1 \}$ ist Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_{n-1}$

Damit ist

$$\mathcal{E} := \{ (A_1 \times \ldots \times A_{n-1}) \times A_n : A_j \in \mathcal{A}_j, \; j = 1, \ldots, n \}$$

Erzeuger von $(\mathcal{A}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n$ in $(X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$.

$\mathcal{E}$ ist zu identifizieren mit $\{A_1 \times \dots \times A_n : A_j \in \mathcal{A}_j, j = 1, \dots, n\}$, was ein Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ in $X_1 \times \dots \times X_n$ ist. Dies liefert

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathcal{A}_j\right) \otimes \mathcal{A}_n = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und somit das Lemma nach sukzess. Anw. $\blacksquare$