13. Lebesgue-Räume und der Satz von Radon-Nikodym

Grundlegende Konzepte für verschiedene Zweige der Mathematik!

13.1. L^p als normierter Raum

Im folgende sei stets $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

13.1. Definition

(a) • $f: X \to \mathbb{C}$ messbar $:\Leftrightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ messbar

• $f: X \to \mathbb{C}$ (μ-) integrierbar $:\Leftrightarrow \operatorname{Re} f, \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$

in diesem Fall: $\int_X f \, d\mu := \int_X \operatorname{Re}(f) \, d\mu + i \int_X \operatorname{Im}(f) \, d\mu$

(b) Sei $f: X \to \mathbb{K}$ (oder $\overline{\mathbb{R}}$) messbar, sei $p \in [1, \infty]$

$p \in [1, \infty[$: $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$ p-Norm

$p = \infty$: $\|f\|_\infty := \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$

$:= \inf \{ \alpha > 0 : \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0 \}$

$= \inf_{\substack{N \in \mathcal{A} \\ \mu(N) = 0}} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)|$ (μ-) wesentliches Supremum

(c) $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu) := \left\{ f: X \to \mathbb{K} : \begin{array}{l} f \text{ messbar und} \\ \|f\|_p < \infty \end{array} \right\}$

p-fach integrierbare Fkt'en

13.2. Lemma (a) Alle bisherigen Eigenschaften des Integrals, die nicht von der Ordnung auf $\mathbb{R}$ (bzw. $\overline{\mathbb{R}}$) abhängen, gelten auch für $\mathbb{C}$-wertige Integranden (vor allem: $\int$ ist $\mathbb{C}$-Linearform)

(b) Auch für $f \in \mathcal{L}^1$ $\mathbb{C}$-wertig gilt Dreiecks Ung.

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$$

Beweis: (a) Zerlege in Real- und Imaginärteil

(b) Wähle $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, so dass

$$0 \leq \left| \int f \, d\mu \right| = \alpha \int f \, d\mu = \int \alpha f \, d\mu$$

$$= \operatorname{Re} \int \alpha f \, d\mu \quad (+ \underbrace{i \operatorname{Im} \int \alpha f \, d\mu}_{=0})$$

$$= \int \underbrace{\operatorname{Re}(\alpha f)}_{\leq |\alpha f| = |f|} d\mu \leq \int |f| \, d\mu \qquad \blacksquare$$

13.3. Satz Seien $f, g : X \to \mathbb{K}$ (oder $\overline{\mathbb{R}}$) messbar. Dann gilt

(a) $\forall r, p, q \in [1, \infty]$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \Rightarrow$

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad \text{(verallg. Hölder-Ungleichung)}$$

(b) $\forall p \in [1, \infty]$:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{(Minkowski-Ungleichung)}$$

(c) Falls $\mu(X) < \infty$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$, dann

$$\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p \quad \text{und} \quad \|f\|_p \leq [\mu(X)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

13.4. Bemerkung

(1) Aus (b) $\Rightarrow$ $\|\cdot\|_p$ ist Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$, d.h.

$$\underset{\substack{\uparrow\\ 0\text{-Fkt}}}{\|0\|_p = 0}, \quad \underset{(\alpha\in\mathbb{K})}{\|\alpha f\|_p = |\alpha|\cdot\|f\|_p}, \quad \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

Klar: aus $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ f.ü., also keine Norm

(2) Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ wesentlich in (c):

Bsp.: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mu = \lambda$

$\Rightarrow$ $\underset{\substack{\uparrow\\ \text{konstante Fkt} = 1}}{1} \in \mathcal{L}^\infty$ aber $1 \notin \mathcal{L}^p$ $\forall p \in [1,\infty[$

Beweis von Satz 13.3.

(a) mit $r=1$ & (b): analog zu Satz 7.7. in Ana2

ersetze lediglich $\sum\limits_{j=1}^{\nu}$ durch $\int_X d\mu$ im letzten Schritt.

Verallg. Hölder ($r \ge 1$): aus Hölder ($r=1$):

$$\|fg\|_r = \Big(\underbrace{\| |f|^r |g|^r \|_1}_{\le \| |f|^r\|_{\tilde p} \| |g|^r\|_{\tilde q} \text{ Hölder mit } \frac{1}{\tilde p}+\frac{1}{\tilde q}=1}\Big)^{1/r} \le \underbrace{\| |f|^r \|_{\tilde p}^{1/r}}_{\|f\|_p} \underbrace{\| |g|^r \|_{\tilde q}^{1/r}}_{\|g\|_q}$$

mit $p := r\tilde p$, $q := r\tilde q$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ ✓

(c): aus (a) mit $g = 1$: Sei $1 \le p < q \le \infty$ ($p = q$: klar)

(a) mit $r = p$ und $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ gibt

$$\|f\|_p = \|1\cdot f\|_p \le \underbrace{\|1\|_{p'}}_{\mu(X)^{\frac{1}{p'}}} \cdot \|f\|_q = \mu(X)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \|f\|_q$$

D.h. $f \in \mathcal{L}^q \Rightarrow f \in \mathcal{L}^p$ ∎

$\boxed{\text{13.5. Korollar}}$ Sei $\mu(X) < \infty$ und $1 \le p \le q \le \infty$

Dann ist $\mathcal{L}^q$ dicht in $\mathcal{L}^p$ (bzgl. $\|\cdot\|_p$).

Genauer: $\forall f \in \mathcal{L}^p \; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^q : \; \|f - f_n\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Beweis: Wegen Satz 13.3.(c) genügt es zu zeigen:

$\mathcal{L}^\infty$ dicht in $\mathcal{L}^p$ für $p \in [1, \infty[$.

Sei also $f \in \mathcal{L}^p$. O.E. sei $f \ge 0$ (sonst zerlege in Re, Im, und $+,-$ - Anteile).

Setze $f_n := \min(f, n) \in \mathcal{L}^\infty$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \|f - f_n\|_p^p = \int_X |f - \min(f,n)|^p d\mu = \int_{\{f \ge n\}} (f - \min(f,n))^p d\mu$$

$$\le \int_{\{f\ge n\}} f^p d\mu = \int_X f^p d\mu - \int_{\{f<n\}} f^p d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\text{da } \int_{\{f<n\}} f^p = \int_X f^p \, \mathbb{1}_{\{f<n\}} \xrightarrow[\text{monot. Kgz.}]{n\to\infty} \int_X f^p \qquad \blacksquare$$

$\boxed{\text{13.6. Definition}}$ Sei $p \in [1, \infty]$ und $\sim$ die Äquiv. rel. ($f \sim g :\Leftrightarrow f = g$ f.ü.) auf $\mathcal{L}^p$. Dann ist

$$L^p := L^p(\mu) := L^p(X, \mu) := \mathcal{L}^p/\sim$$

ein normierter Vektorraum bzgl. $\|\cdot\|_p$.

Zudem definiert $\langle f, g\rangle := \int_X \bar{f} g \, d\mu = \int_X \overline{f(x)} g(x) \, d\mu(x)$

ein Skalarprodukt auf L^2, das $\|\cdot\|_2$ induziert.

13.7. Konvention

(a) Üblicherweise schreibt man $f \in L^p$ für die Äquivalenzklasse $\{g : X \to \mathbb{K} : g = f \text{ f.ü.}\}$ von $f \in \mathcal{L}^p$

(b) $f \in L^p$ hat Eigenschaft $\mathcal{E}$

$:\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{\forall} \text{ Repräsentanten } g \text{ der Äquiv.klasse } f \text{ gilt:} \\ \quad g \text{ hat Eigenschaft } \mathcal{E} \text{ f.ü.} \end{cases}$

$\boxed{\text{13.8. Satz}}$ (Majorisierte Kgz. – L^p-Version)

Sei $p \in [1, \infty[$, sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p$ mit $\lim_{n\to\infty} f_n$ ex. pkt.weis (d.h. für bel. Wahl von Repräsentanten $\tilde{f}_n$ von f_n, $n \in \mathbb{N}$, $\exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0 :$ $\lim_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x)$ ex. $\forall x \in X \setminus N$).

Es gebe $g \in L^p$ mit $|f_n| \le g$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in L^p$ und $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$

(vgl. Bem. 12.47.(2) für $p = 1$).

Beweis: Wir unterscheiden nicht zwischen f_n und $\tilde{f}_n$!

Also setze $$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & x \in X \setminus N \\ 0, & x \in N \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f messbar und, da $|f(x)|^p \le g(x)^p$ für f.a. $x \in X$ (Repräsentant)
mit $|g|^p \in \mathcal{L}^1$

$\overset{\text{Kor. 12.32.}}{\Rightarrow}$ $|f|^p \in \mathcal{L}^1$, also $f \in L^p$ (Äquiv.klasse!)

Betrachte $h_n := |f_n - f|^p$ $\Rightarrow$ • $h_n \xrightarrow[\text{f.ü.}]{n\to\infty} 0$

• $0 \le h_n \le (\underbrace{|f_n|}_{\le g} + \underbrace{|f|}_{\le g})^p \overset{\text{f.ü.}}{\le} 2^p g^p \in \mathcal{L}^1$

$\overset{\text{Satz 12.36.}}{\underset{\text{(maj. Kgz.)}}{\Longrightarrow}}$ $\lim_{n\to\infty} \int_X h_n \, d\mu = 0$ ∎

13.2. Vollständigkeit von L^p

zur Vorbereitung:

$\boxed{13.9.\ \text{Lemma}}$ Sei $p \in [1, \infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$, $f_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $$\Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \Big\|_p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$$

Insbes. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < \infty \implies \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in L^p$ (messbar klar!)

Beweis: Moral: Minkowski-Ungl.!

Sei $N \in \mathbb{N}$; da $f_n \geq 0$ messbar $\forall n \in \mathbb{N} \implies \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)^p \in \overline{E}^*$ existiert, isoton in N

monot. Kgz. $\implies$ $$\lim_{N\to\infty} \int \Big(\sum_{n=1}^{N} f_n\Big)^p d\mu = \int \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)^p d\mu$$

$$\implies \Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big\|_p = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\Big\|\sum_{n=1}^{N} f_n\Big\|_p}_{\overset{\text{Minkowski}}{\leq} \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$$ ■

$\boxed{13.10.\ \text{Satz}}$ (Riesz-Fischer)

L^p ist Banach-Raum $\forall p \in [1, \infty]$.

Insbes. ist L^2 Hilbertraum bzgl. Skalarprodukt
$$\langle f, g\rangle := \int_X \overline{f(x)}\, g(x)\, d\mu \quad \left(\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle \right)$$

Beweis: Nur die Vollständigkeit bzgl. $\|\cdot\|_p$ ist zu zeigen.

1. Fall: $p \in [1, \infty[$

1. Schritt: Zeige: $\exists$ Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $(f_{n_k}(x))_k \subseteq \mathbb{K}$ Cauchy in $\mathbb{K}$ für f.a. $x \in X$

Also: $(f_n)_n \subseteq L^p$ Cauchy (bzg. $\|\cdot\|_p$) $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_k \in \mathbb{N}$, $n_k < n_{k+1}\ \forall k$, mit $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}\quad \forall k \in \mathbb{N}$

setz $h := |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \overset{\text{Lemma 13.9.}}{\Longrightarrow} h \in L^p$,

da $\|f_{n_1}\|_p + \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p}_{< 2^{-k}} < \infty$

$\overset{f_{n_1} \in L^p}{\Longrightarrow} \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^p \Rightarrow$ für f.a. $x \in X$ gilt:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \infty$$

$\Rightarrow \forall k, k' \in \mathbb{N},\ k' \geq k$

$$|f_{n_{k'}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{j=k}^{k'-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \xrightarrow[\text{glm. in } k' \geq k]{k\to\infty} 0$$

$\Rightarrow$ Beh.

2. Schritt: verwende Vollständigkeit von $\mathbb{K}$, um einen Kandidaten für gesuchten Grenzwert (in L^p) zu konstruieren.

Also: 1. Schritt & $\mathbb{K}$ vollst $\Rightarrow \exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0\ \forall x \in X \setminus N$:

$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) =: f(x)$ exist.; setze $f(x) := 0$ für $x \in N$

$\Rightarrow f : X \to \mathbb{K}$ messbar ✓

3. Schritt: Zeige $f \in L^p$ und $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$

Also: da $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) \Rightarrow |f_{n_k}| \leq h\quad \forall k$

$\overset{\text{Satz 13.8}}{\Longrightarrow}$ (maj.-Kgz. in L^p) $f \in L^p$ und $\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0$

$(f_n)_n$ Cauchy (in L^p) & $f_{n_k} \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{k\to\infty} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{n\to\infty} f$ ✓

2. Fall: $p = \infty$.

Sei $(f_n)_n$ Cauchy in L^∞, d.h. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{1}{k}$$

Per def. $\|\cdot\|_\infty$: es folgt

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N\ \exists \mathcal{N}_{n,k,m} \in \mathcal{A}$ Nullmenge

mit
$$\sup_{x \in X \setminus \mathcal{N}_{n,k,m}} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}$$

Setze $\mathcal{N} := \bigcup_{n,m,k \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_{n,m,k}$ Nullmenge (abz. Vereir. Nullm.)

Dann:

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N$:
$$\sup_{x \in X \setminus \mathcal{N}} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k} \quad (*)$$

- also ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Cauchy für alle $x \in X \setminus \mathcal{N}$

$\mathbb{K}$ vollst. $\Rightarrow \exists f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in X \setminus \mathcal{N}$

Setze
$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & x \in X \setminus \mathcal{N} \\ 0, & x \in \mathcal{N} \end{cases}$$
- messbar (12.9 (d))

Aus $(*)$, durch $m \to \infty$, folgt

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \quad \sup_{x \in X \setminus \mathcal{N}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$
$(N = N(k))$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{n\to\infty} f, \quad \sup_{x \in X \setminus \mathcal{N}} |f(x)| \leq 1 + \|f_{N(1)}\|_\infty < \infty$

$\Rightarrow f \in L^\infty$ ∎

13.11. Korollar Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$, $f \in L^p$ $(p \in [1,\infty[)$ mit $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{n\to\infty} f$. Dann $\exists$ Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $f_{n_k} \xrightarrow[f.\ddot{u}.]{k\to\infty} f$.

Beweis: Folgt aus Bew. von Satz 13.10. ∎

13.3. Dichte Unterräume von L^P

Hier:

$$(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$$

13.12. Definition

Sei $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ messbar

- (wesentlicher) Träger: $\operatorname{ess\,supp} f := \operatorname{supp} f := \Big(\bigcup_{\substack{A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen} \\ f|_A = 0 \ \lambda^d\text{-f.ü.}}} A \Big)^c$

[NB: (i) supp f abgeschlossen.
(ii) $f = g$ f.ü. $\Rightarrow \operatorname{supp} f = \operatorname{supp} g \Rightarrow$ wohldef für $f \in L^P$]

- $C(\mathbb{R}^d) := \{ f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} : f \text{ stetig} \}$ Vektorraum der $\mathbb{K}$-wertigen stetigen Fkt'en über $\mathbb{R}^d$

für $k \in \mathbb{N}$: $C^k(\mathbb{R}^d) := \{ f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} : f \ k\text{-mal stetig partiell diff-bar} \}$

$C^\infty(\mathbb{R}^d) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\mathbb{R}^d)$ beliebig oft diff-bare Fkt.

$C_c(\mathbb{R}^d) := \{ f \in C(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt} \}$

$C_c^k(\mathbb{R}^d) := \{ f \in C^k(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt} \}, \ k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

13.13. Lemma

(a) $f \in C(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \operatorname{supp} f = \overline{\{ x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0 \}}$ - topologischer Träger von f

(b) $\forall p \in [1, \infty]$ $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq C_c^k(\mathbb{R}^d) \subseteq C_c(\mathbb{R}^d) \subseteq L^P(\mathbb{R}^d)$$

identifiziere $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit Äquivkl. $\{ g \in \mathcal{L}^P(\mathbb{R}^d) : g = f \text{ f.ü.} \} \in L^P$

Beweis: (a) Übung.

(b) nur rechte Inklusion nicht trivial. Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$.

f stetig auf Kompaktum $\Rightarrow$ messbar (Satz 12.3(b)) und beschränkt (Satz 7.50)

$\Rightarrow f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$\forall p \in [1,\infty[: \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, d\lambda^d \leq \|f\|_\infty^p \cdot \lambda^d(\operatorname{supp} f) < \infty \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ■

13.14. Beispiel: $d = 1$, $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

$\Rightarrow$ wesentlicher Träger $= \emptyset$ (da $f = 0$ λ-f.ü. in $\mathbb{R}$)

topologischer Träger $= \mathbb{R}$ (da $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$).

13.15. Satz $\forall p \in [1,\infty[$ (nicht ∞) gilt:

$C_c(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ (bzgl. $\|\cdot\|_p$)

Beweis: Zu zeigen: $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^d)$:

$$\|f - g\|_p < \varepsilon$$

o.E. reicht es dies für $f \geq 0$ zu tun (sonst zerlege f in $(\operatorname{Re} f)_\pm$ und $(\operatorname{Im} f)_\pm$).

o.E. darf man auch noch $\operatorname{supp} f$ kompakt annehmen, denn $\|f \mathbb{1}_{[-n,n]^d} - f\|_p \xrightarrow{n \to \infty} 0$ nach major. Kgz. 13.8.

Sei also $\varepsilon > 0$ und $0 \leq f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp} f$ kpt.

$\overset{f \in E^*}{\Rightarrow}$ $\exists (\varphi_n)_n \subseteq E$ Treppenfkt. mit $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq \operatorname{supp} f$ $\forall n$ und $\varphi_n \nearrow f$

$\overset{\text{Satz 12.9.}}{\Rightarrow}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$: $\|\underbrace{\varphi_n}_{\sum_{j=1}^{J} \underbrace{\alpha_j}_{>0} \mathbb{1}_{A_j}} - f\|_p < \varepsilon$ $(*)$

$A_j \in \mathcal{B}^d$ beschränkt

Beh: $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$ $\forall A \in \mathcal{B}^d$ beschränkt $\exists h \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\|\mathbb{1}_A - h\|_p < \tilde{\varepsilon}$ (Beweis später)

Beh.

$\Rightarrow \exists h_j \in C_c(\mathbb{R}^d): \|\mathbb{1}_{A_j} - h_j\|_p < \frac{\varepsilon}{J\alpha_j}$

$\Rightarrow h := \sum_{j=1}^{J} \alpha_j h_j \in C_c(\mathbb{R}^d)$ und mit (*). $\Rightarrow$

$$\|h-f\|_p \leq \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \|\mathbb{1}_{A_j} - h_j\|_p + \|\varphi_n - f\| < 2\varepsilon$$

Also folgt Satz 13.15 aus Beh.!

Beweis der Beh.: Aus Regularität von λ^d (Satz 11.42): $\exists \mathcal{U}, K \subseteq \mathbb{R}^d$, K kpt., $\mathcal{U}$ offen mit $K \subseteq A \subseteq \mathcal{U}$ und $\lambda^d(\mathcal{U} \setminus K) < \tilde{\varepsilon}^p$; da A beschränkt, kann man auch $\mathcal{U}$ beschränkt wählen!

1. Fall: $K = \emptyset$; wähle $h = 0$ (stetig!) $\Rightarrow \|\mathbb{1}_A - h\|_p = \|\mathbb{1}_A\|_p \leq (\lambda^d(\mathcal{U}))^{1/p} < \tilde{\varepsilon}$

2. Fall: $K \neq \emptyset$: $\forall x \in K \subseteq \mathcal{U} \; \exists \delta_x > 0: B_{\delta_x}(x) \subseteq \mathcal{U}$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c) \geq \delta_x > 0 \quad \forall x \in K$; hier, $\operatorname{dist}(x,\mathcal{U}^c) := \inf_{y \in \mathcal{U}^c} |x-y|$

Beh: $\begin{aligned} K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c) \end{aligned}$ ist stetig (sogar Lipschitz-stetig)

denn: $\operatorname{dist}(\tilde{x}, \mathcal{U}^c) = \inf_{y \in \mathcal{U}^c} \underbrace{|\tilde{x} - y|}_{\leq |\tilde{x}-x| + |x-y|} \leq |x - \tilde{x}| + \operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c)$

zusammen mit $x \leftrightarrow \tilde{x} \Rightarrow |\operatorname{dist}(x,\mathcal{U}^c) - \operatorname{dist}(\tilde{x}, \mathcal{U}^c)| \leq |x - \tilde{x}|$

Satz 7.50 $\Rightarrow$ (K kpt.) $\quad 0 < \min_{x \in K} \operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c) =: \operatorname{dist}(K, \mathcal{U}^c)$

Setze $h: \begin{aligned} \mathbb{R}^d &\to [0,1] \\ x &\mapsto \min\left\{1, \frac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{U}^c)}{\operatorname{dist}(K,\mathcal{U}^c)}\right\} \end{aligned}$

$\Rightarrow h$ stetig, $h|_K = 1$, $h|_{\mathcal{U}^c} = 0 \Rightarrow \operatorname{supp} h$ kpt., da $\subseteq \mathcal{U}$

also $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$ und

$$\underbrace{\|h - \mathbb{1}_A\|_p}_{(h-\mathbb{1}_A)\mathbb{1}_{\mathcal{U}\setminus K}} \leq \underbrace{\|h - \mathbb{1}_A\|_\infty}_{\leq 1} \underbrace{\|\mathbb{1}_{\mathcal{U}\setminus K}\|_p}_{\lambda^d(\mathcal{U}\setminus K)^{1/p}} < \hat{\varepsilon}$$

$\blacksquare$

13.16. Bemerkung

Man kann zeigen, dass $C_c(\mathbb{R}^d)$ eine abzählbare dichte Teilmenge bzgl. $\|\cdot\|_p$ (sogar bzgl. $\|\cdot\|_\infty$!) besitzt (z.B. mittels Approximationssatz von Weierstraß; siehe "Numerik I"), d.h.

$C_c(\mathbb{R}^d)$ ist separabel; $\Rightarrow$ $L^p(\mathbb{R}^d)$ separabel $\forall p \in [1,\infty[$ //.

13.17. Korollar

(a) $\forall p \in [1,\infty]$ gilt:

$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $C_c(\mathbb{R}^d)$ (bzgl. $\|\cdot\|_p$; d.h.

$$\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d),\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) : \|f - \varphi\|_p < \varepsilon)$$

(b) Insbes.: $\forall p \in [1,\infty[$ gilt:

$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

Zum Beweis, Hilfsmittel: „Teilung der Eins":

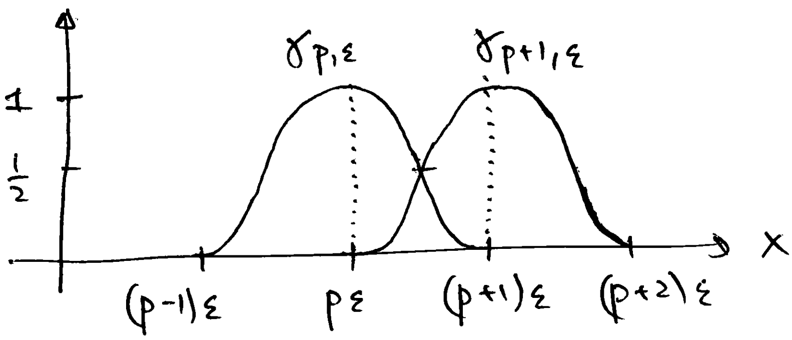
13.18. Definition

Sei $\varepsilon > 0$.

$\{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p\in\mathbb{Z}^d}$ (C^∞-)Teilung der Eins (von $\mathbb{R}^d$) $:\Leftrightarrow$ $\forall p \in \mathbb{Z}^d$ sei $\gamma_{p,\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit

- $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} = \bigtimes_{j=1}^d [\varepsilon p_j - \varepsilon, \varepsilon p_j + \varepsilon]$
- $\gamma_{p,\varepsilon} \geq 0$
- $\sum_{p\in\mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\varepsilon}(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Illustration für $d=1$:



13.19. Beispiel

Für
$$\psi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0,1] \\ t \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right), & |t|<1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

gilt $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\psi = [-1,1]$ (d.h. $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \neq \{0\}$)

(Beweis: Analog zu Üb. 4.1, Ana 2)

Sei $\gamma(t) := \dfrac{\psi(t)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(t-k)}$ $\Rightarrow$
- $\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R})$
- $\operatorname{supp}\gamma = [-1,1]$
- $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(t-k) = 1$

$\neq 0 \ \forall t$

Für $x \in \mathbb{R}^d$, $p \in \mathbb{Z}^d$, $\varepsilon > 0$ sei

$$\gamma_{p,\varepsilon}(x) := \prod_{j=1}^{d} \gamma\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - p_j\right) \Rightarrow \{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p\in\mathbb{Z}^d} \text{ ist Teilung der Eins}$$

Beweis von Kor. 13.17: Es reicht (a) zu zeigen (denn (b) folgt aus (a) & Satz 13.15.)

Um (a) zu zeigen reicht es zu zeigen:

Beh: Für alle $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, mit $\operatorname{supp} f \subseteq \overline{B_R(0)}$, $R > 0$, und $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$ $\exists\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{B_{R+1}(0)}$ und

$$\underbrace{\sup_{x\in \overline{B_{R+1}(0)}} |\varphi(x) - f(x)|}_{=: \|\varphi - f\|_{\infty, \overline{B_{R+1}}}} < \tilde{\varepsilon}$$

denn: Beh $\Rightarrow$ $\|\varphi - f\|_\infty < \tilde{\varepsilon}$ & $\forall p \in [1,\infty[$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi - f|^p \, d\lambda^d \leq \|\varphi - f\|^p_{\infty, \overline{B_{R+1}}} \cdot \lambda^d(\overline{B_{R+1}(0)})$$
$$< \tilde{\varepsilon}^p \lambda^d(\overline{B_{R+1}(0)}) \equiv \varepsilon^p \Rightarrow 13.17.(a). \checkmark$$

Beweis Beh: Sei $\{\gamma_{p,\delta}\}_{p\in\mathbb{Z}^d}$ Teil. der Eins aus 13.19. ($\delta > 0$)

setze

$$f_\delta := \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} f(p\delta)\gamma_{p,\delta} \quad \left(\text{d.h. } f_\delta(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} f(p\delta)\gamma_{p,\delta}(x)\right)$$

- endliche Summe, da $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$, d.h. $f_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. ($\forall \delta > 0$)

Bem.: $f(p\delta)\gamma_{p,\delta}(x) \neq 0 \Rightarrow p\delta \in \overline{B_R(0)}$ & $|x_\nu - p_\nu\delta| < \delta$, $\nu = 1,\dots,d$

wähle $\delta < \frac{1}{\sqrt{d}}$; $\Rightarrow \operatorname{supp} f_\delta \subseteq \overline{B_{R+1}(0)}$.

Da f gleichm. stetig auf $\overline{B_{R+1}(0)}$ (kpt! Satz 7.52.):

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \ \exists \tilde{\delta} > 0: \ \begin{array}{l} |x_\nu - y_\nu| \leq \tilde{\delta} \\ \forall \nu = 1,\dots,d \\ (x, y \in \overline{B_{R+1}(0)}) \end{array} \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \tilde{\varepsilon} \quad (*)$$

Für $\tilde{\varepsilon} > 0$, sei $\tilde{\delta} > 0$ $\left(\lambda \tilde{\delta} < \frac{1}{\sqrt{d}} \right)$, so $(*)$ gilt.

Dann: $\gamma_{p,\tilde{\delta}}(x) \neq 0 \Rightarrow |x_\nu - p_\nu \tilde{\delta}| \leq \tilde{\delta} \overset{y = p\tilde{\delta}}{\Rightarrow} |f(x) - f(p\tilde{\delta})| \leq \tilde{\varepsilon}$

$\operatorname{supp} \gamma_{p,\tilde{\delta}}$! $\quad \nu = 1, \dots, d$

$$\Rightarrow |f_{\tilde{\delta}}(x) - f(x)| = \Big| \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \left(f(p\tilde{\delta}) - f(x) \right) \gamma_{p,\tilde{\delta}}(x) \Big|$$

$1 = \sum_p \gamma_{p,\tilde{\delta}}$ (!) $\qquad 1 = \sum_p \gamma_{p,\tilde{\delta}}$

$$\leq \tilde{\varepsilon} \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\tilde{\delta}}(x) = \tilde{\varepsilon}.$$

$\gamma_{p,\tilde{\delta}} \geq 0$

Wähle $\varphi := f_{\tilde{\delta}} \Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

13.20. Bemerkung

(a) $C_c(\mathbb{R}^d)$ (und damit auch nicht $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$) ist nicht dicht in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ (Üb.!).

(b) Nach 13.17(b) ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ nicht abgeschlossen bzg. $\|\cdot\|_p$ für $p \in [1, \infty[$.
Da endl. dim. Unterräume immer abgesch.
$\Rightarrow \dim C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

13.4. Geometrie in Hilbert-Räumen

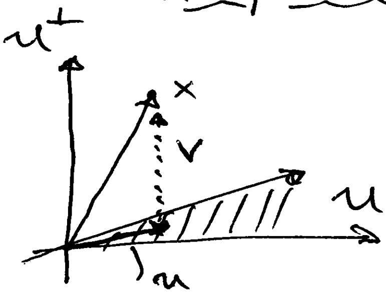
Hier: $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

($\Rightarrow$ Norm: $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle \ \forall x \in \mathcal{H}$; $d(x,y) := \|x-y\|$ Metrik; $(\mathcal{H},d)$ vollständig). (Bsp.: L^2)

13.21. Definition Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$ ein (lin.) Unterraum.

$\mathcal{U}^\perp := \{y \in \mathcal{H} : \langle x,y\rangle = 0 \ \forall x \in \mathcal{U}\}$ orthogonales Komplement von $\mathcal{U}$

13.22. Bemerkung



$\mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp = \{0\}$, denn sei

$x \in \mathcal{U} \cap \mathcal{U}^\perp \Rightarrow 0 = \langle x,x\rangle = \|x\|^2$

$\Rightarrow x = 0$

13.23. Lemma Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum und $x \in \mathcal{H}$. Dann $\exists!\, u \in \mathcal{U}$ und $\exists!\, v \in \mathcal{U}^\perp$ mit

$$x = u + v$$

Beweis: Sei $x \in \mathcal{H}$, sei $(y_n)_n \subseteq \mathcal{U}$: $\lim_{n\to\infty} \|x-y_n\| = \inf_{y\in\mathcal{U}} \|x-y\| =: \delta \geq 0$

$\forall a,b \in \mathcal{H}$ gilt Parallelogrammidentität: (nachrechnen!)

$$\frac{1}{2}\left(\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2\right) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle - \langle a,b\rangle - \langle b,a\rangle\right)}_{0}$$

also für $a := x - y_m$, $b := x - y_n$:

$$\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2 - 2\underbrace{\Big\|x - \underbrace{\frac{y_m+y_n}{2}}_{\in\,\mathcal{U}}\Big\|^2}_{\geq\,\delta^2} = \frac{1}{2}\|y_m-y_n\|^2$$

$\Rightarrow \limsup_{m,n\to\infty} \frac{1}{2}\|y_m - y_n\|^2 \leq \delta^2 + \delta^2 - 2\delta^2 = 0 \Rightarrow \underbrace{(y_n)_n}_{\text{Cauchy}} \subseteq \mathcal{U}$

$\mathcal{H}$ vollständig $\Rightarrow \exists u \in \mathcal{H}$ mit $y_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{n\to\infty} u$;

$\mathcal{U}$ abgeschlossen $\Rightarrow u \in \mathcal{U}$.

Nun für $t \in \mathbb{R}$ und $u' \in \mathcal{U}$ bel. betrachte

$$f(t) := \|x - \underbrace{u - tu'}_{\in \mathcal{U}}\|^2 = \|x-u\|^2 + t^2\|u'\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle x-u, u'\rangle$$

per. def. von u ist $t=0$ globale Minimalstelle von f

$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} f(t)\Big|_{t=0} = -2\,\mathrm{Re}\langle x-u, u'\rangle$

analog mit $f(it)$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\langle x-u, u'\rangle = 0$

$\Rightarrow v := x - u \in \mathcal{U}^\perp$.

Eindeutigkeit: sei $u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2$

$\Rightarrow \underbrace{u_1 - u_2}_{\in \mathcal{U}} = \underbrace{v_2 - v_1}_{\in \mathcal{U}^\perp} \overset{13.22}{\Longrightarrow} u_1 = u_2 \wedge v_1 = v_2$ ∎

13.24. Satz (Riesz-Darstellung stetiger linearer Funktionale)

Sei $\ell : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ stetig, linear (d.h. $\ell(\alpha x + \beta y) = \alpha \ell(x) + \beta \ell(y)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$)

Dann $\exists!\, x_\ell \in \mathcal{H}$: $\ell(x) = \langle x_\ell, x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

<u>Beweis</u>: $\mathcal{U} := \ker \ell = \{x \in \mathcal{H} : \ell(x) = 0\} = \ell^{-1}(\{0\})$

ist abgeschlossener (lin.) Unterraum von $\mathcal{H}$

↑ da ℓ stetig.

o.E. sei $\ell \neq 0$ (sonst tut es $x_\ell = 0$!).

$\Rightarrow \mathcal{U} \subsetneq \mathcal{H} \Rightarrow \exists y \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{U} \overset{\text{Lem.}}{\underset{13.23}{\Rightarrow}} \underset{\mathcal{U}}{\underset{\Uparrow}{y = u}} + \underset{\mathcal{U}^\perp}{\underset{\Uparrow}{v}}$ und $v \neq 0$

Sei $v_1 := \frac{v}{\|v\|} \Rightarrow \ell(v_1) = \frac{1}{\|v\|} \ell(v) \neq 0$

$\Rightarrow \quad \forall x \in \mathcal{H}$ gilt: $x - \frac{\ell(x)}{\ell(v_1)} v_1 \in \mathcal{U}$ (rechnen!)

$\overset{v_1 \in \mathcal{U}^\perp}{\Rightarrow} \quad 0 = \langle v_1, x - \frac{\ell(x)}{\ell(v_1)} v_1 \rangle = \langle v_1, x \rangle - \frac{\ell(x)}{\ell(v_1)} \underbrace{\|v_1\|^2}_{1}$

$\Rightarrow \quad \ell(x) = \langle x_\ell, x \rangle$ mit $x_\ell := \overline{\ell(v_1)}\, v_1 \in \mathcal{H}$

Eindeutigkeit: gelte $\langle x_\ell^1, x \rangle = \ell(x) = \langle x_\ell^2, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow \langle x_\ell^1 - x_\ell^2, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$

$\overset{\text{wähle } x = x_\ell^1 - x_\ell^2}{\Rightarrow} \quad x_\ell^1 = x_\ell^2$ $\blacksquare$

13.5. Satz von Radon – Nikodym

Jetzt wieder $(X, \mathcal{A})$ bel. Messraum!

13.25. Definition Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$.

(i) ν absolut stetig bzgl. μ (in Zeichen: $\nu \ll \mu$) $:\Leftrightarrow$ $\forall A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ gilt auch $\nu(A) = 0$ $(\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0)$

(ii) ν hat Dichte bzgl. μ $:\Leftrightarrow$ $\exists f \in E^* : \nu(A) = \int_A f \, d\mu$ $\forall A \in \mathcal{A}$

Notation: $f =: \frac{d\nu}{d\mu}$ μ-Dichte von ν oder Radon-Nikodym-Ableitung von ν bzgl. μ

(Falls μ σ-endlich! Siehe auch 13.26(b))

13.26. Bemerkung

(a) μ Maß auf $\mathcal{A}$, $f \in E^*$, $\nu(A) := \int_A f \, d\mu$, $A \in \mathcal{A}$

$\Rightarrow$ ν ist Maß auf $\mathcal{A}$ (Üb!).

(b) Falls f und g beide μ-Dichten von ν, und μ σ-endlich, gilt $f = g$ μ-f.ü. Also ist Dichte wohldef. (f.ü.) und in diesem Fall eindeutig. Notation „$\frac{d\nu}{d\mu}$" hat also Sinn.

13.27 Satz (Radon-Nikodym) Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$.

Dann gilt

(a) ν hat eine μ-Dichte $\frac{d\nu}{d\mu}$ $\Rightarrow$ $\nu \ll \mu$

(b) Falls μ σ-endlich ist, gilt auch

$$\nu \ll \mu \Rightarrow \nu \text{ hat } \mu\text{-Dichte } \frac{d\nu}{d\mu}$$

(die μ-f.ü. eindeutig ist; siehe 13.26(b)).

Beweis

(a) Klar, da für $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0 \Rightarrow f\mathbb{1}_A = 0$ μ-f.ü.
$\Rightarrow \nu(A) = 0$.

(b) Wir beweisen nur Spezialfall μ, ν endliche Maße.
(siehe z. B. Elstrodt VII.2 für den allg. Fall, oder Bauer)

$\forall A \in \mathcal{A}$ setze $\eta(A) := \mu(A) + \nu(A) \Rightarrow \eta$ ist endliches Maß auf $\mathcal{A}$ und $\underbrace{L^2(X, \eta; \mathbb{R})}_{\text{reellwertige Fkt'en}} =: L^2(\eta) \subseteq L^2(\nu) \underset{\nu \text{ endlich! (13.3(c))}}{\subseteq} L^1(\nu)$

$$\ell : L^2(\eta) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \ell(f) := \int_X f \, d\nu$$
stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H} = L^2(\eta)$

denn $|\ell(f)| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int f^2 d\nu \right)^{1/2} [\nu(X)]^{1/2} \leq \|f\|_{L^2(\eta)} \sqrt{\nu(X)}$

$\Rightarrow$ für $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_{L^2(\eta)}]{n\to\infty} f \Rightarrow \underbrace{|\ell(f_n) - \ell(f)|}_{\ell(f_n - f)} \leq (\nu(X))^{1/2} \|f_n - f\|_{L^2(\eta)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Somit Riesz-Darstellung (Satz. 13.24.):

$$\exists! f_0 \in L^2(\eta) : \ell(f) = \langle f_0, f \rangle_{L^2(\eta)} = \int_X f_0 f \, d\eta \quad (*)$$

$\Rightarrow$
- $\forall A \in \mathcal{A}$ gilt: $\int_A f_0 \, d\eta = \int_X f_0 \mathbb{1}_A \, d\eta \overset{(*)}{=} \ell(\mathbb{1}_A) = \nu(A) \geq 0 \quad (**)$

$\Rightarrow f_0 \geq 0$ η-f.ü. (denn wähle $A_- := \{f_0 < 0\} \Rightarrow f_0 \mathbb{1}_{A_-} = -(f_0)_-$

$\Rightarrow 0 \leq \int (f_0)_- \, d\eta = -\int_{A_-} f_0 \, d\eta \overset{(**)}{=} -\nu(A_-) \leq 0$

$\Rightarrow \int (f_0)_- \, d\eta = 0 \underset{\text{Satz 12.30.}}{\Rightarrow} (f_0)_- = 0$ η-f.ü.)

- $\forall A \in \mathcal{A}$ gilt: $\int_A (1-f_0)\,d\eta \overset{(**)}{=} \eta(A) - \nu(A) = \mu(A) \geq 0$

wie oben
$\Rightarrow \quad 1 - f_0 \geq 0 \quad \eta$ - f.ü.

Also $\exists$ Repräsentant von f_0 (wird auch mit f_0 bezeichnet) mit $\quad 0 \leq f_0(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$ und es gilt (*).

Setze $X_1 := \{f_0 = 1\}$, $X_2 := \{0 < f_0 < 1\}$, $X_3 := \{f_0 = 0\}$

$\Rightarrow X_j \in \mathcal{A},\ j = 1,2,3$, und $X_1 \dot\cup X_2 \dot\cup X_3 = X$

Es gilt:

(1): $\nu(X_3) = 0$ wegen (**)

(2): $\int_A (1-f_0)\,d\nu = \underbrace{\nu(A)}_{\int_A f_0\,d\eta\ (**)} - \int_A f_0\,d\nu \underset{\eta=\mu+\nu}{=} \int_A f_0\,d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$

$\Rightarrow$ (2a): $\mu(X_1) = 0$ (wähle $A = X_1$ in (2))

(2b): $\int_{X_2} f(1-f_0)\,d\nu = \int_{X_2} f f_0\,d\mu \quad \forall f: X_2 \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ messbar

denn: wahr für $f = \mathbb{1}_{A_2}$ $\forall A_2 \subseteq X_2$ messbar nach (2); $\Rightarrow$ wahr für Element. Fkt'en $\Rightarrow$ wahr für messbare Fkt'en (mon. Kgz. & $0 \leq f_0 \leq 1$)

Sei nun $A_2 \subseteq X_2$, $A_2 \in \mathcal{A}$, setze $f := \mathbb{1}_{A_2} \frac{1}{1-f_0}$ in (2b):

$\Rightarrow \quad (3): \nu(A_2) = \int_{A_2} \frac{f_0}{1-f_0}\,d\mu$

Schließlich, sei $A \in \mathcal{A} \Rightarrow$

$$\nu(A) \underset{(1),\,(2a)\ \&\ \nu \ll \mu}{=} \nu(A \cap X_2) \underset{(3)}{=} \int_A \mathbb{1}_{X_2} \frac{f_0}{1-f_0}\, d\mu = \int_A \underbrace{\frac{f_0}{1-f_0}}_{=:\ \frac{d\nu}{d\mu}\ \geq 0} d\mu$$

- (2a)
- $f_0(x) = 0 \ \forall x \in X_3$

Insbes. ist $\frac{d\nu}{d\mu}$ μ-f.ü.-eindeutig bestimmt ∎