13.5. Satz von Radon – Nikodym

Jetzt wieder $(X, \mathcal{A})$ bel. Messraum!

13.25. Definition Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$.

(i) ν absolut stetig bzgl. μ (in Zeichen: $\nu \ll \mu$) $:\iff$ $\forall A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ gilt auch $\nu(A) = 0$ ($\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0$)

(ii) ν hat Dichte bzgl. μ $:\iff$ $\exists f \in E^* : \nu(A) = \int_A f \, d\mu$ $\forall A \in \mathcal{A}$

Notation: $f =: \frac{d\nu}{d\mu}$ μ-Dichte von ν oder Radon-Nikodym-Ableitung von ν bzgl. μ

(Falls μ σ-endlich! Siehe auch 13.26(b))

13.26. Bemerkung

(a) μ Maß auf $\mathcal{A}$, $f \in E^*$, $\nu(A) := \int_A f \, d\mu$, $A \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow$ ν ist Maß auf $\mathcal{A}$ (Üb!).

(b) Falls f und g beide μ-Dichten von ν, und μ σ-endlich, gilt $f = g$ μ-f.ü. Also ist Dichte wohldef. (f.ü.) und in diesem Fall eindeutig. Notation „$\frac{d\nu}{d\mu}$" hat also Sinn.

13.27 Satz (Radon-Nikodym) Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$.

Dann gilt

(a) ν hat eine μ-Dichte $\frac{d\nu}{d\mu}$ $\Rightarrow$ $\nu \ll \mu$

(b) Falls μ σ-endlich ist, gilt auch

$$\nu \ll \mu \Rightarrow \nu \text{ hat } \mu\text{-Dichte } \frac{d\nu}{d\mu}$$

(die μ-f.ü. eindeutig ist; siehe 13.26(b)).

Beweis

(a) Klar, da für $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A)=0 \Rightarrow f\mathbb{1}_A = 0$ μ-f.ü.
$\Rightarrow \nu(A)=0$.

(b) Wir beweisen nur Spezialfall μ, ν endliche Maße.
(siehe z.B. Elstrodt VII.2 für den allg. Fall, oder Bauer)

$\forall A \in \mathcal{A}$ setze $\eta(A) := \mu(A) + \nu(A) \Rightarrow \eta$ ist endliches Maß auf $\mathcal{A}$ und $\underbrace{L^2(X,\eta;\mathbb{R})}_{\text{reellwertige Fkt'en}} =: L^2(\eta) \subseteq L^2(\nu) \underset{\nu \text{ endlich! (13.3(c))}}{\subseteq} L^1(\nu)$

$$\ell: L^2(\eta) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \ell(f) := \int_X f\,d\nu$$
stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H} = L^2(\eta)$

denn $|\ell(f)| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int f^2 d\nu\right)^{1/2} [\nu(X)]^{1/2} \leq \|f\|_{L^2(\eta)} \sqrt{\nu(X)}$

$\Rightarrow$ für $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_{L^2(\eta)}]{n\to\infty} f \Rightarrow \underbrace{|\ell(f_n)-\ell(f)|}_{\ell(f_n-f)} \leq (\nu(X))^{1/2} \|f_n - f\|_{L^2(\eta)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Somit Riesz-Darstellung (Satz 13.24.):

$\exists! f_0 \in L^2(\eta): \ell(f) = \langle f_0, f\rangle_{L^2(\eta)} = \int_X f_0 f\,d\eta \quad (*)$

$\Rightarrow$

- $\forall A \in \mathcal{A}$ gilt: $\int_A f_0\,d\eta = \int_X f_0 \mathbb{1}_A\,d\eta \overset{(*)}{=} \ell(\mathbb{1}_A) = \nu(A) \geq 0 \quad (**)$

$\Rightarrow f_0 \geq 0$ η-f.ü. (denn wähle $A_- := \{f_0 < 0\} \Rightarrow f_0 \mathbb{1}_{A_-} = -(f_0)_-$

$\Rightarrow 0 \leq \int (f_0)_-\,d\eta = -\int_{A_-} f_0\,d\eta \overset{(**)}{=} -\nu(A_-) \leq 0$

$\Rightarrow \int (f_0)_-\,d\eta = 0 \underset{\text{Satz 12.30.}}{\Rightarrow} (f_0)_- = 0$ η-f.ü.)

- $\forall A \in \mathcal{A}$ gilt: $\int_A (1-f_0)\,d\eta \overset{(**)}{=} \eta(A) - \nu(A) = \mu(A) \geq 0$

wie oben
$\Rightarrow \quad 1-f_0 \geq 0 \quad \eta$ - f.ü.

Also $\exists$ Repräsentant von f_0 (wird auch mit f_0 bezeichnet) mit $\quad 0 \leq f_0(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$ und es gilt (*).

Setze $X_1 := \{f_0 = 1\}$, $X_2 := \{0 < f_0 < 1\}$, $X_3 := \{f_0 = 0\}$

$\Rightarrow X_j \in \mathcal{A}$, $j = 1,2,3$, und $X_1 \dot\cup X_2 \dot\cup X_3 = X$

Es gilt:

(1): $\nu(X_3) = 0$ wegen (**)

(2): $\int_A (1-f_0)\,d\nu = \underbrace{\nu(A)}_{\int_A f_0 d\eta \,(**)} - \int_A f_0\,d\nu \underset{\eta = \mu + \nu}{=} \int_A f_0\,d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}.$

$\Rightarrow$ (2a): $\mu(X_1) = 0$ (wähle $A = X_1$ in (2))

(2b): $\int_{X_2} f(1-f_0)\,d\nu = \int_{X_2} f f_0\,d\mu \quad \forall f: X_2 \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ messbar

denn: wahr für $f = \mathbb{1}_{A_2}$ $\forall A_2 \subseteq X_2$ messbar nach (2); $\Rightarrow$ wahr für Element. Fkt'en $\Rightarrow$ wahr für messbare Fkt'en (mon. Kgz. & $0 \leq f_0 \leq 1$)

Sei nun $A_2 \subseteq X_2$, $A_2 \in \mathcal{A}$, setze $f := \mathbb{1}_{A_2} \frac{1}{1-f_0}$ in (2b):

$\Rightarrow$ (3): $\nu(A_2) = \int_{A_2} \frac{f_0}{1-f_0}\,d\mu$

Schließlich, sei $A \in \mathcal{A} \Rightarrow$

$$\nu(A) \underset{(1),\,(2a)\ \&\ \nu \ll \mu}{=} \nu(A \cap X_2) \underset{(3)}{=} \int_A \mathbb{1}_{X_2} \frac{f_0}{1-f_0}\, d\mu \underset{\substack{\bullet\ (2a) \\ \bullet\ f_0(x) = 0\ \forall x \in X_3}}{=} \int_A \underbrace{\frac{f_0}{1-f_0}}_{=: \frac{d\nu}{d\mu} \geq 0} d\mu$$

Insbes. ist $\frac{d\nu}{d\mu}$ μ-f.ü.-eindeutig bestimmt ∎