13.4. Geometrie in Hilbert-Räumen

Hier: $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

($\Rightarrow$ Norm: $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle \;\forall x\in\mathcal{H}$; $d(x,y) := \|x-y\|$ Metrik; $(\mathcal{H},d)$ vollständig). (Bsp.: L^2)

13.21. Definition Sei $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{H}$ ein (lin.) Unterraum.

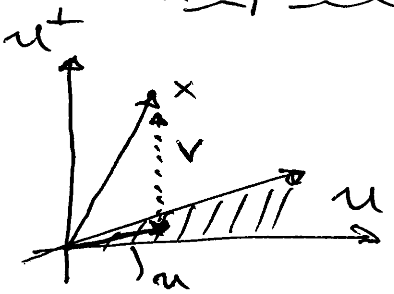
$$\mathcal{U}^\perp := \{y\in\mathcal{H} : \langle x,y\rangle = 0 \;\forall x\in\mathcal{U}\}$$ orthogonales Komplement von $\mathcal{U}$

13.22. Bemerkung

$\mathcal{U}\cap\mathcal{U}^\perp=\{0\}$, denn sei

$x\in\mathcal{U}\cap\mathcal{U}^\perp \Rightarrow 0=\langle x,x\rangle=\|x\|^2$

$\Rightarrow x=0$



13.23. Lemma Sei $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum und $x\in\mathcal{H}$. Dann $\exists!\, u\in\mathcal{U}$ und $\exists!\, v\in\mathcal{U}^\perp$ mit

$$x = u+v$$

Beweis: Sei $x\in\mathcal{H}$, sei $(y_n)_n\subseteq\mathcal{U}$: $\lim\limits_{n\to\infty}\|x-y_n\| = \inf\limits_{y\in\mathcal{U}}\|x-y\| =: \delta \geq 0$

$\forall a,b\in\mathcal{H}$ gilt Parallelogrammidentität: (nachrechnen!)

$$\frac12\left(\|a+b\|^2+\|a-b\|^2\right) = \|a\|^2+\|b\|^2 + \frac12\underbrace{\left(\langle a,b\rangle+\langle b,a\rangle - \langle a,b\rangle - \langle b,a\rangle\right)}_{0}$$

also für $a := x-y_m$, $b := x-y_n$:

$$\|x-y_m\|^2+\|x-y_n\|^2 - 2\underbrace{\Big\|x - \underbrace{\frac{y_m+y_n}{2}}_{\in\mathcal{U}}\Big\|^2}_{\geq\delta^2} = \frac12\|y_m-y_n\|^2$$

$\Rightarrow \limsup_{m,n\to\infty} \frac{1}{2}\|y_m - y_n\|^2 \le \delta^2 + \delta^2 - 2\delta^2 = 0 \Rightarrow (y_n)_n \subseteq \mathcal{U}$ $\underline{\underline{\text{Cauchy}}}$

$\mathcal{H}$ vollständig $\Rightarrow \exists u \in \mathcal{H}$ mit $y_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{n\to\infty} u$;

$\mathcal{U}$ abgeschlossen $\Rightarrow u \in \mathcal{U}$.

Nun für $t \in \mathbb{R}$ und $u' \in \mathcal{U}$ bel. betrachte

$$f(t) := \|x - \underbrace{u - tu'}_{\in \mathcal{U}}\|^2 = \|x-u\|^2 + t^2\|u'\|^2 - 2t\,\mathrm{Re}\langle x-u, u'\rangle$$

per. def. von u ist $t=0$ globale Minimalstelle von f

$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} f(t)\Big|_{t=0} = -2\,\mathrm{Re}\langle x-u, u'\rangle$

analog mit $f(it)$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\langle x-u, u'\rangle = 0$

$\Rightarrow v := x - u \in \mathcal{U}^\perp$.

Eindeutigkeit: sei $u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2$

$\Rightarrow \underbrace{u_1 - u_2}_{\in \mathcal{U}} = \underbrace{v_2 - v_1}_{\in \mathcal{U}^\perp} \overset{13.22}{\Rightarrow} u_1 = u_2 \wedge v_1 = v_2$ ∎

$\boxed{\text{13.24. Satz}}$ (Riesz-Darstellung stetiger linearer Funktionale)

Sei $\ell : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ stetig, linear (d.h. $\ell(\alpha x + \beta y) = \alpha \ell(x) + \beta \ell(y)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$)

Dann $\exists!\ x_\ell \in \mathcal{H}$: $\ell(x) = \langle x_\ell, x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

Beweis: $\mathcal{U} := \ker \ell = \{x \in \mathcal{H} : \ell(x) = 0\} = \ell^{-1}(\{0\})$

ist abgeschlossener (lin.) Unterraum von $\mathcal{H}$

da ℓ stetig.

o.E. sei $\ell \neq 0$ (sonst tut es $x_\ell = 0$!).

$\Rightarrow \mathcal{U} \subsetneq \mathcal{H} \Rightarrow \exists y \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{U} \overset{\text{Lem.}}{\underset{13.23}{\Longrightarrow}} y = \underset{\mathcal{U}}{\underset{\Uparrow}{u}} + \underset{\mathcal{U}^\perp}{\underset{\Uparrow}{v}}$ und $v \neq 0$

Sei $v_1 := \frac{v}{\|v\|} \Rightarrow \ell(v_1) = \frac{1}{\|v\|} \ell(v) \neq 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathcal{H}$ gilt: $x - \frac{\ell(x)}{\ell(v_1)} v_1 \in \mathcal{U}$ (rechnen!)

$\overset{v_1 \in \mathcal{U}^\perp}{\Longrightarrow} 0 = \langle v_1, x - \frac{\ell(x)}{\ell(v_1)} v_1 \rangle = \langle v_1, x \rangle - \frac{\ell(x)}{\ell(v_1)} \underbrace{\|v_1\|^2}_{1}$

$\Rightarrow \ell(x) = \langle x_\ell, x \rangle$ mit $x_\ell := \overline{\ell(v_1)}\, v_1 \in \mathcal{H}$

Eindeutigkeit: gelte $\langle x_\ell^1, x \rangle = \ell(x) = \langle x_\ell^2, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow \langle x_\ell^1 - x_\ell^2, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$

$\overset{\text{wähle } x = x_\ell^1 - x_\ell^2}{\Longrightarrow} \quad x_\ell^1 = x_\ell^2$ $\blacksquare$