13.3. Dichte Unterräume von L^p

Hier: $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$

13.12. Definition

Sei $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ messbar

- (wesentlicher) Träger: $\operatorname{ess\,supp} f := \operatorname{supp} f := \Big(\bigcup_{\substack{A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen} \\ f|_A = 0 \ \lambda^d\text{-f.ü.}}} A \Big)^c$

[NB: (i) supp f abgeschlossen.
(ii) $f = g$ f.ü. $\Rightarrow \operatorname{supp} f = \operatorname{supp} g \Rightarrow$ wohldef für $f \in L^p$]

- $C(\mathbb{R}^d) := \{ f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} : f \text{ stetig} \}$ Vektorraum der $\mathbb{K}$-wertigen stetigen Fkt'en über $\mathbb{R}^d$

für $k \in \mathbb{N}$: $C^k(\mathbb{R}^d) := \{ f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} : f \text{ } k\text{-mal stetig partiell diff-bar} \}$

$C^\infty(\mathbb{R}^d) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\mathbb{R}^d)$ beliebig oft diff-bare Fkt.

$C_c(\mathbb{R}^d) := \{ f \in C(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt} \}$

$C_c^k(\mathbb{R}^d) := \{ f \in C^k(\mathbb{R}^d) : \operatorname{supp} f \text{ kompakt} \}, \ k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

13.13. Lemma

(a) $f \in C(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \operatorname{supp} f = \overline{\{ x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0 \}}$ - topologischer Träger von f

(b) $\forall p \in [1, \infty]$ $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq C_c^k(\mathbb{R}^d) \subseteq C_c(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$$

identifiziere $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit Äquiv.kl. $\{ g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) : g = f \text{ f.ü.} \} \in L^p$

Beweis: (a) Übung.

(b) nur rechte Inklusion nicht trivial. Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$.

f stetig auf Kompaktum $\Rightarrow$ messbar (Satz 12.3(b)) und beschränkt (Satz 7.50)

$\Rightarrow f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$\forall p \in [1,\infty[$: $\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, d\lambda^d \le \|f\|_\infty^p \cdot \lambda^d(\operatorname{supp} f) < \infty \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ∎

13.14. Beispiel : $d = 1$, $f = 1\!\!1_{\mathbb{Q}}$

$\Rightarrow$ wesentlicher Träger $= \emptyset$ (da $f = 0$ λ-f.ü. in $\mathbb{R}$)

topologischer Träger $= \mathbb{R}$ (da $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$).

13.15. Satz $\forall p \in [1,\infty[$ (nicht ∞) gilt:

$C_c(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ (bzgl. $\|\cdot\|_p$)

Beweis: Zu zeigen: $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^d)$:

$$\|f - g\|_p < \varepsilon$$

o.E. reicht es dies für $f \ge 0$ zu tun (sonst zerlege f in $(\operatorname{Re} f)_\pm$ und $(\operatorname{Im} f)_\pm$).

o.E. darf man auch noch $\operatorname{supp} f$ kompakt annehmen,

denn $\|f 1\!\!1_{[-n,n]^d} - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$ nach major. Kgz. 13.8.

Sei also $\varepsilon > 0$ und $0 \le f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp} f$ kpt.

$\overset{f \in E^*}{\Longrightarrow}$ $\exists (\varphi_n)_n \subseteq E$ Treppenfkt. mit $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq \operatorname{supp} f$ $\forall n$ und $\varphi_n \uparrow f$

$\overset{\text{Satz 12.9.}}{\Longrightarrow}$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \ge n_0$: $\|\underbrace{\varphi_n}_{\sum_{j=1}^{J} \underbrace{\alpha_j}_{>0} 1\!\!1_{A_j}} - f\|_p < \varepsilon$ $(*)$

$A_j \in \mathcal{B}^d$ & beschränkt

Beh: $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$ $\forall A \in \mathcal{B}^d$ beschränkt $\exists h \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit $\|1\!\!1_A - h\|_p < \tilde{\varepsilon}$ (Beweis später)

Beh.

$\Rightarrow \exists h_j \in C_c(\mathbb{R}^d) : \| \mathbb{1}_{A_j} - h_j \|_p < \frac{\varepsilon}{J \alpha_j}$

$\Rightarrow h := \sum_{j=1}^{J} \alpha_j h_j \in C_c(\mathbb{R}^d)$ und mit (*). $\Rightarrow$

$$\|h-f\|_p \le \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \| \mathbb{1}_{A_j} - h_j \|_p + \|\varphi_n - f\| < 2\varepsilon$$

Also folgt Satz 13.15 aus Beh.!

Beweis der Beh.: Aus Regularität von λ^d (Satz 11.42): $\exists\, \mathcal{U}, K \subseteq \mathbb{R}^d$, K kpt., $\mathcal{U}$ offen mit $K \subseteq A \subseteq \mathcal{U}$ und $\lambda^d(\mathcal{U} \setminus K) < \tilde{\varepsilon}^p$; da A beschränkt, kann man auch $\mathcal{U}$ beschränkt wählen!

1. Fall: $K = \emptyset$; wähle $h = 0$ (stetig!) $\Rightarrow \| \mathbb{1}_A - h \|_p = \| \mathbb{1}_A \|_p \le (\lambda^d(\mathcal{U}))^{1/p} < \tilde{\varepsilon}$

2. Fall: $K \neq \emptyset$: $\forall x \in K \subseteq \mathcal{U}\ \exists \delta_x > 0 : B_{\delta_x}(x) \subseteq \mathcal{U}$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c) \ge \delta_x > 0 \quad \forall x \in K$; hier, $\operatorname{dist}(x,\mathcal{U}^c) := \inf_{y \in \mathcal{U}^c} |x-y|$

Beh: $\begin{array}{l} K \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c) \end{array}$ ist stetig (sogar Lipschitz-stetig)

– denn: $\operatorname{dist}(\tilde{x}, \mathcal{U}^c) = \inf_{y \in \mathcal{U}^c} \underbrace{|\tilde{x} - y|}_{\le |\tilde{x}-x| + |x-y|} \le |x - \tilde{x}| + \operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c)$

zusammen mit $x \leftrightarrow \tilde{x} \Rightarrow |\operatorname{dist}(x,\mathcal{U}^c) - \operatorname{dist}(\tilde{x}, \mathcal{U}^c)| \le |x - \tilde{x}|$

Satz 7.50 $\Rightarrow$ (K kpt.) $\quad 0 < \min_{x \in K} \operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c) =: \operatorname{dist}(K, \mathcal{U}^c)$

Setze $h: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to [0,1] \\ x \mapsto \min\left\{ 1, \dfrac{\operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c)}{\operatorname{dist}(K, \mathcal{U}^c)} \right\} \end{array}$

$\Rightarrow h$ stetig, $h|_K = 1$, $h|_{\mathcal{U}^c} = 0 \Rightarrow \operatorname{supp} h$ kpt., da $\subseteq \mathcal{U}$

– also $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$ und

$$\underbrace{\| h - \mathbb{1}_A \|_p}_{(h - \mathbb{1}_A)\mathbb{1}_{\mathcal{U} \setminus K}} \le \underbrace{\| h - \mathbb{1}_A \|_\infty}_{\le 1} \underbrace{\| \mathbb{1}_{\mathcal{U} \setminus K} \|_p}_{\lambda^d(\mathcal{U} \setminus K)^{1/p}} < \tilde{\varepsilon}$$

∎

13.16. Bemerkung

Man kann zeigen, dass $C_c(\mathbb{R}^d)$ eine abzählbare dichte Teilmenge bzgl. $\|\cdot\|_p$ (sogar bzgl. $\|\cdot\|_\infty$!) besitzt (z.B. mittels Approximationssatz von Weierstraß; siehe "Numerik I"), d.h.
$C_c(\mathbb{R}^d)$ ist separabel; $\Rightarrow L^p(\mathbb{R}^d)$ separabel $\forall p \in [1,\infty[$ //.

$\boxed{\text{13.17. Korollar}}$ (a) $\forall p \in [1,\infty]$ gilt:

$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $C_c(\mathbb{R}^d)$ (bzgl. $\|\cdot\|_p$; d.h.
$\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d), \forall \varepsilon > 0 \; \exists \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) : \|f - \varphi\|_p < \varepsilon$)

(b) Insbes.: $\forall p \in [1,\infty[$ gilt:

$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

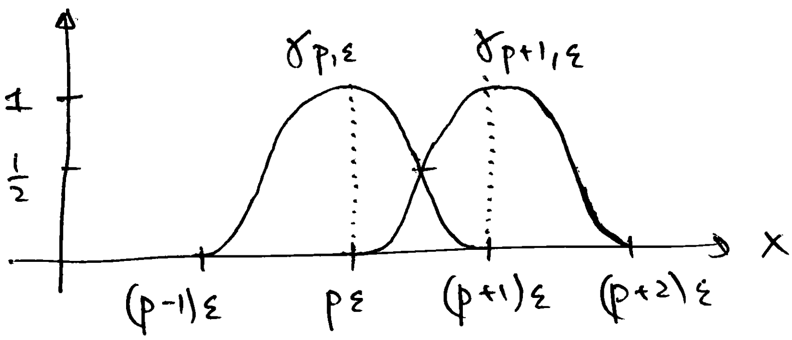
Zum Beweis, Hilfsmittel: „Teilung der Eins":

$\boxed{\text{13.18. Definition}}$ Sei $\varepsilon > 0$.

$\{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p \in \mathbb{Z}^d}$ (C^∞-) Teilung der Eins (von $\mathbb{R}^d$) $:\Leftrightarrow$ $\forall p \in \mathbb{Z}^d$ sei $\gamma_{p,\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit

- $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} = \bigtimes_{j=1}^{d} [\varepsilon p_j - \varepsilon, \varepsilon p_j + \varepsilon]$
- $\gamma_{p,\varepsilon} \geq 0$
- $\sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\varepsilon}(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Illustration für $d=1$:



13.19. Beispiel

Für $\psi : \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,1] \\ t \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right), & |t| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{cases}$

gilt $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \psi = [-1,1]$ (d.h. $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \neq \{0\}$)
(Beweis: Analog zu Üb. 4.1, Ana 2)

Sei $\gamma(t) := \dfrac{\psi(t)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(t-k)}$ $\Rightarrow$
- $\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R})$
- $\operatorname{supp}\gamma = [-1,1]$
- $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(t-k) = 1$

$\neq 0 \ \forall t$

Für $x\in\mathbb{R}^d$, $p\in\mathbb{Z}^d$, $\varepsilon>0$ sei

$$\gamma_{p,\varepsilon}(x) := \prod_{j=1}^{d} \gamma\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - p_j\right) \Rightarrow \{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p\in\mathbb{Z}^d} \text{ ist Teilung der Eins}$$

Beweis von Kor. 13.17: Es reicht (a) zu zeigen (denn (b) folgt aus (a) & Satz 13.15.)

Um (a) zu zeigen reicht es zu zeigen:

Beh: Für alle $f\in C_c(\mathbb{R}^d)$, mit $\operatorname{supp} f \subseteq \overline{B_R(0)}$, $R>0$, und $\forall \tilde\varepsilon>0$
$\exists\, \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{B_{R+1}(0)}$ und

$$\underbrace{\sup_{x\in \overline{B_{R+1}(0)}} |\varphi(x)-f(x)|}_{=:\ \|\varphi-f\|_{\infty,\overline{B_{R+1}}}} < \tilde\varepsilon$$

denn: Beh $\Rightarrow$ $\|\varphi-f\|_\infty < \tilde\varepsilon$ & $\forall p\in[1,\infty[$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi-f|^p\, d\lambda^d \leq \|\varphi-f\|^p_{\infty,\overline{B_{R+1}}} \cdot \lambda^d(\overline{B_{R+1}(0)})$$
$$< \tilde\varepsilon^p \lambda^d(\overline{B_{R+1}(0)}) \equiv \varepsilon^p \Rightarrow 13.17.(a). \checkmark$$

Beweis Beh: Sei $\{\gamma_{p,\delta}\}_{p\in\mathbb{Z}^d}$ Teil. der Eins aus 13.19. ($\delta>0$)

setze
$$f_\delta := \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} f(p\delta)\gamma_{p,\delta} \quad \Big(\text{d.h. } f_\delta(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} f(p\delta)\gamma_{p,\delta}(x)\Big)$$

- endliche Summe, da $f\in C_{\underset{\cong}{c}}(\mathbb{R}^d)$, d.h. $f_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. ($\forall\delta>0$)

Bem.: $f(p\delta)\gamma_{p,\delta}(x) \neq 0 \Rightarrow p\delta \in \overline{B_R(0)}$ & $|x_\nu - p_\nu\delta| \leq \delta$, $\nu = 1,\dots,d$

wähle $\delta < \frac{1}{\sqrt{d}}$; $\Rightarrow$ $\operatorname{supp} f_\delta \subseteq \overline{B_{R+1}(0)}$.

Da f gleichm. stetig auf $\overline{B_{R+1}(0)}$ (kpt! Satz 7.52.):

$$\forall \tilde\varepsilon>0\ \exists\tilde\delta>0: \ |x_\nu - y_\nu| \leq \tilde\delta \ \forall \nu=1,\dots,d \ (x,y\in\overline{B_{R+1}(0)}) \Rightarrow |f(x)-f(y)| \leq \tilde\varepsilon \quad (*)$$

Für $\tilde{\varepsilon} > 0$, sei $\tilde{\delta} > 0$ ($\lambda \tilde{\delta} < \frac{1}{\sqrt{d}}$), so $(*)$ gilt.

Dann: $\gamma_{p,\tilde{\delta}}(x) \neq 0 \underset{\text{supp}\,\gamma_{p,\tilde{\delta}}\,!}{\Rightarrow} |x_\nu - p_\nu \tilde{\delta}| \le \tilde{\delta} \overset{y = p\tilde{\delta}}{\Rightarrow} |f(x) - f(p\tilde{\delta})| \le \tilde{\varepsilon}$

$\nu = 1, \dots, d$

$$\Rightarrow |f_{\tilde{\delta}}(x) - f(x)| \underset{1 = \sum_p \gamma_{p,\tilde{\delta}}\ (!)}{=} \Big| \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \big(f(p\tilde{\delta}) - f(x)\big) \gamma_{p,\tilde{\delta}}(x) \Big|$$

$$\underset{\gamma_{p,\tilde{\delta}} \ge 0}{\le} \tilde{\varepsilon} \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\tilde{\delta}}(x) \underset{1 = \sum_p \gamma_{p,\tilde{\delta}}}{=} \tilde{\varepsilon}.$$

Wähle $\varphi := f_{\tilde{\delta}} \Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

13.20. Bemerkung

(a) $C_c(\mathbb{R}^d)$ (und damit auch nicht $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$) ist nicht dicht in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ (Üb.!).

(b) Nach 13.17(b) ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ nicht abgeschlossen bzg. $\|\cdot\|_p$ für $p \in [1, \infty[$.
Da endl. dim. Unterräume immer abgesch.
$\Rightarrow \dim C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = +\infty$.
