13.2. Vollständigkeit von L^p

zur Vorbereitung:

$\boxed{\text{13.9. Lemma}}$ Sei $p \in [1, \infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$, $f_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt $$\Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \Big\|_p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$$

Insbes. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < \infty \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in L^p$ (messbar klar!)

Beweis: Moral: Minkowski-Ungl.!

Sei $N \in \mathbb{N}$; da $f_n \geq 0$ messbar $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty} \Big(\sum_{n=1}^N f_n\Big)^p \in \mathcal{E}^*$ existiert, isoton in N

monot. Kgz.

$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \int \Big(\sum_{n=1}^N f_n\Big)^p d\mu = \int \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)^p d\mu$$

$$\Rightarrow \Big\|\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big\|_p = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\Big\|\sum_{n=1}^N f_n\Big\|_p}_{\overset{\text{Minkowski}}{\leq} \sum_{n=1}^N \|f_n\|_p} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$$

∎

$\boxed{\text{13.10. Satz}}$ (Riesz-Fischer)

L^p ist Banach-Raum $\forall p \in [1, \infty]$.

Insbes. ist L^2 Hilbertraum bzgl. Skalarprodukt
$$\langle f, g\rangle := \int_X \overline{f(x)}\, g(x)\, d\mu \quad (\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle)$$

Beweis: Nur die Vollständigkeit bzgl. $\|\cdot\|_p$ ist zu zeigen.

1. Fall: $p \in [1, \infty[$

1. Schritt: Zeige: $\exists$ Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $(f_{n_k}(x))_k \subseteq \mathbb{K}$ Cauchy in $\mathbb{K}$ für f.a. $x \in X$

Also: $(f_n)_n \subseteq L^p$ Cauchy (bzg. $\|\cdot\|_p$) $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_k \in \mathbb{N}$,

$n_k < n_{k+1}\ \forall k$, mit $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}\quad \forall k \in \mathbb{N}$

setz $h := |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \overset{\text{Lemma 13.9.}}{\Rightarrow} h \in L^p$,

da $\|f_{n_1}\|_p + \sum_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p}_{< 2^{-k}} < \infty$

$f_{n_1} \in L^p$

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^p \Rightarrow$ für f.a. $x \in X$ gilt:

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \infty$$

$\Rightarrow \forall k, k' \in \mathbb{N},\ k' \geq k$

$$|f_{n_{k'}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{j=k}^{k'-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

glm. in $k' \geq k$

$\Rightarrow$ Beh.

2. Schritt: verwende Vollständigkeit von $\mathbb{K}$, um einen Kandidaten für gesuchten Grenzwert (in L^p) zu konstruieren.

Also: 1. Schritt & $\mathbb{K}$ vollst $\Rightarrow \exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0\ \forall x \in X \setminus N$:

$\lim_{k \to \infty} f_{n_k}(x) =: f(x)$ exist.; setze $f(x) := 0$ für $x \in N$

$\Rightarrow\ f : X \to \mathbb{K}$ messbar ✓

3. Schritt: Zeige $f \in L^p$ und $\lim_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0$

Also: da $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) \Rightarrow |f_{n_k}| \leq h\quad \forall k$

Satz 13.8 $\Rightarrow$ (maj.-Kgz. in L^p) $\quad f \in L^p$ und $\lim_{k \to \infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0$

$(f_n)_n$ Cauchy (in L^p) & $f_{n_k} \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{k\to\infty} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{n\to\infty} f$ ✓

2. Fall: $p = \infty$.

Sei $(f_n)_n$ Cauchy in L^∞, d.h. $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}$:

$$\|f_n - f_m\|_\infty < \frac{1}{k}$$

Per def. $\|\cdot\|_\infty$: es folgt

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n, m \geq N\ \exists \mathcal{N}_{n,k,m} \in \mathcal{A}$ Nullmenge

mit
$$\sup_{x \in X \setminus \mathcal{N}_{n,k,m}} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k}$$

Setze $\mathcal{N} := \bigcup_{n,m,k \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_{n,m,k}$ Nullmenge (abz. Vereir. Nullm.)

Dann:

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N$:

$$\sup_{x \in X \setminus \mathcal{N}} |f_n(x) - f_m(x)| < \frac{1}{k} \quad (*)$$

- also ist $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ Cauchy für alle $x \in X \setminus \mathcal{N}$

$\mathbb{K}$ vollst. $\Rightarrow \exists f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x \in X \setminus \mathcal{N}$

Setze
$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & x \in X \setminus \mathcal{N} \\ 0, & x \in \mathcal{N} \end{cases}$$
- messbar (12.9(d))

Aus $(*)$, durch $m \to \infty$, folgt

$\forall k \in \mathbb{N}\ \exists N \in \mathbb{N}: \forall n \geq N \quad \sup_{x \in X \setminus \mathcal{N}} |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{1}{k}$
$(N = N(k))$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{n\to\infty} f$, $\quad \sup_{x \in X \setminus \mathcal{N}} |f(x)| \leq 1 + \|f_{N(1)}\|_\infty < \infty$

$\Rightarrow f \in L^\infty$ ∎

13.11. Korollar Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$, $f \in L^p$ ($p \in [1,\infty[$) mit $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{n\to\infty} f$. Dann $\exists$ Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $f_{n_k} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{k\to\infty} f$.

Beweis: Folgt aus Bew. von Satz 13.10. $\blacksquare$