13. Lebesgue-Räume und der Satz von Radon-Nikodym

Grundlegende Konzepte für verschiedene Zweige der Mathematik!

13.1. L^p als normierter Raum

Im folgende sei stets $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

13.1. Definition

(a) • $f: X \to \mathbb{C}$ messbar $:\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ messbar

• $f: X \to \mathbb{C}$ (μ-)integrierbar $:\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{L}^1(X,\mu)$

in diesem Fall: $\int_X f\,d\mu := \int_X \operatorname{Re}(f)\,d\mu + i \int_X \operatorname{Im}(f)\,d\mu$

(b) Sei $f: X \to \mathbb{K}$ (oder $\overline{\mathbb{R}}$) messbar, sei $p \in [1,\infty]$

$p \in [1,\infty[$: $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{1/p}$ p-Norm

$p = \infty$: $\|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in X} |f(x)|$

$:= \inf\{\alpha > 0 : \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0\}$

$= \inf_{\substack{N \in \mathcal{A} \\ \mu(N)=0}} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)|$ (μ-) wesentliches Supremum

(c) $\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X,\mu) := \{f: X \to \mathbb{K} : f \text{ messbar und } \|f\|_p < \infty\}$

p-fach integrierbare Fkt'en

13.2. Lemma (a) Alle bisherigen Eigenschaften des Integrals, die nicht von der Ordnung auf $\mathbb{R}$ (bzw. $\overline{\mathbb{R}}$) abhängen, gelten auch für $\mathbb{C}$-wertige Integranden (vor allem: $\int$ ist $\mathbb{C}$-Linearform)

(b) Auch für $f \in \mathcal{L}^1$ $\mathbb{C}$-wertig gilt Dreiecks Ung.

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$$

Beweis: (a) Zerlege in Real- und Imaginärteil

(b) Wähle $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, so dass

$$\begin{aligned} 0 \leq \left| \int f \, d\mu \right| &= \alpha \int f \, d\mu = \int \alpha f \, d\mu \\ &= \operatorname{Re} \int \alpha f \, d\mu \quad (+ \underbrace{i \operatorname{Im} \int \alpha f \, d\mu}_{=0}) \\ &= \int \underbrace{\operatorname{Re}(\alpha f)}_{\leq |\alpha f| = |f|} d\mu \leq \int |f| \, d\mu \end{aligned}$$ $\square$

13.3. Satz Seien $f, g : X \to \mathbb{K}$ (oder $\overline{\mathbb{R}}$) messbar. Dann gilt

(a) $\forall r, p, q \in [1, \infty]$: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \Rightarrow$

$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ (verallg. Hölder-Ungleichung)

(b) $\forall p \in [1, \infty]$:

$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Minkowski-Ungleichung)

(c) Falls $\mu(X) < \infty$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$, dann

$$\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p \quad \text{und} \quad \|f\|_p \leq [\mu(X)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

13.4. Bemerkung

(1) Aus (b) $\Rightarrow$ $\|\cdot\|_p$ ist Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$, d.h.

$$\underset{\uparrow\, 0\text{-Fkt}}{\|0\|_p = 0}, \quad \underset{(\alpha \in \mathbb{K})}{\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p}, \quad \|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

Klar: aus $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ f.ü., also keine Norm

(2) Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ wesentlich in (c):

Bsp.: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mu = \lambda$

$\Rightarrow$ $\underset{\uparrow \text{ konstante Fkt} = 1}{1 \in \mathcal{L}^\infty}$ aber $1 \notin \mathcal{L}^p$ $\forall p \in [1, \infty[$

Beweis von Satz 13.3.

(a) mit $r = 1$ & (b): analog zu Satz 7.7. in Ana2

ersetze lediglich $\sum_{j=1}^{\nu}$ durch $\int_X d\mu$ im letzten Schritt.

Verallg. Hölder $(r \ge 1)$: aus Hölder $(r = 1)$:

$$\|fg\|_r = \big(\underbrace{\|\,|f|^r |g|^r\|_1}_{\substack{\text{Hölder mit}\\ \le \||f|^r\|_{\tilde p} \||g|^r\|_{\tilde q},\ \frac{1}{\tilde p} + \frac{1}{\tilde q} = 1}}\big)^{1/r} \le \underbrace{\|\,|f|^r\|_{\tilde p}^{1/r}}_{\|f\|_p} \underbrace{\|\,|g|^r\|_{\tilde q}^{1/r}}_{\|g\|_q}$$

mit $p := r\tilde p$, $q := r\tilde q$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ ✓

(c): aus (a) mit $g = 1$: Sei $1 \le p < q \le \infty$ ($p = q$: klar)

(a) mit $r = p$ und $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ gibt

$$\|f\|_p = \|1 \cdot f\|_p \le \underbrace{\|1\|_{p'}}_{\mu(X)^{\frac{1}{p'}}} \cdot \|f\|_q = \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

D.h. $f \in \mathcal{L}^q \Rightarrow f \in \mathcal{L}^p$ ∎

13.5. Korollar Sei $\mu(X) < \infty$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$.

Dann ist $\mathcal{L}^q$ dicht in $\mathcal{L}^p$ (bzgl. $\|\cdot\|_p$).

Genauer: $\forall f \in \mathcal{L}^p \ \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^q : \|f - f_n\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Beweis: Wegen Satz 13.3.(c) genügt es zu zeigen:

$\mathcal{L}^\infty$ dicht in $\mathcal{L}^p$ für $p \in [1,\infty[$.

Sei also $f \in \mathcal{L}^p$. O.E. sei $f \geq 0$ (sonst zerlege in Re, Im, und $+,-$ - Anteile).

Setze $f_n := \min(f, n) \in \mathcal{L}^\infty$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \|f - f_n\|_p^p = \int_X |f - \min(f,n)|^p \, d\mu = \int_{\{f \geq n\}} (f - \min(f,n))^p \, d\mu$$

$$\leq \int_{\{f\geq n\}} f^p \, d\mu = \int_X f^p \, d\mu - \int_{\{f<n\}} f^p \, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

da $\displaystyle\int_{\{f<n\}} f^p = \int_X f^p \, \mathbb{1}_{\{f<n\}} \xrightarrow[\text{monot. Kgz.}]{n\to\infty} \int_X f^p$ $\square$

13.6. Definition Sei $p \in [1,\infty]$ und $\sim$ die Äquiv. rel. ($f \sim g :\Leftrightarrow f = g$ f.ü.) auf $\mathcal{L}^p$. Dann ist

$$L^p := L^p(\mu) := L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p/\sim$$

ein normierter Vektorraum bzgl. $\|\cdot\|_p$.

Zudem definiert $\displaystyle\langle f, g\rangle := \int_X \bar{f} g \, d\mu = \int_X \overline{f(x)}\, g(x) \, d\mu(x)$

ein Skalarprodukt auf L^2, das $\|\cdot\|_2$ induziert.

13.7. Konvention

(a) Üblicherweise schreibt man $f \in L^p$ für die Äquivalenzklasse $\{g : X \to \mathbb{K} : g = f \text{ f.ü.}\}$ von $f \in \mathcal{L}^p$

(b) $f \in L^p$ hat Eigenschaft $\mathcal{E}$

$$:\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall \text{ Repräsentanten } g \text{ der Äquiv.klasse } f \text{ gilt:} \\ \quad g \text{ hat Eigenschaft } \mathcal{E} \text{ f.ü.} \end{cases}$$

$\boxed{\text{13.8. Satz}}$ (Majorisierte Kgz. – L^p-Version)

Sei $p \in [1, \infty[$, sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq L^p$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} f_n$ ex. pkt.weis

(d.h. für bel. Wahl von Repräsentanten $\tilde{f}_n$ von f_n, $n \in \mathbb{N}$, $\exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0 :$ $\lim\limits_{n \to \infty} \tilde{f}_n(x)$ ex. $\forall x \in X \setminus N$).

Es gebe $g \in L^p$ mit $|f_n| \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $f := \lim\limits_{n \to \infty} f_n \in L^p$ und $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\|_p = 0$

(vgl. Bem. 12.47.(2) für $p = 1$).

Beweis: Wir unterscheiden nicht zwischen f_n und $\tilde{f}_n$!

Also setze
$$f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) &, x \in X \setminus N \\ 0 &, x \in N \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f messbar und, da $|f(x)|^p \leq g(x)^p$ für f.a. $x \in X$ (Repräsentant) mit $|g|^p \in \mathcal{L}^1$

$\overset{\text{Kor. 12.32.}}{\Longrightarrow}$ $|f|^p \in \mathcal{L}^1$, also $f \in L^p$ (Äquiv.klasse!)

Betrachte $h_n := |f_n - f|^p$ $\Rightarrow$ • $h_n \xrightarrow[\text{f.ü.}]{n \to \infty} 0$

• $0 \leq h_n \leq (\underbrace{|f_n|}_{\leq g} + \underbrace{|f|}_{\leq g})^p \overset{\text{f.ü.}}{\leq} 2^p g^p \in \mathcal{L}^1$

$\overset{\text{Satz 12.36.}}{\underset{\text{(maj. Kgz.)}}{\Longrightarrow}}$ $\lim\limits_{n \to \infty} \int_X h_n \, d\mu = 0$ ∎