12.5. Konvergenzbegriffe und Konvergenzsätze

Wie bisher liege stets ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zugrunde.

Eine Verallg. der mon. Kgz. nach B. Levi:

$\boxed{12.33.\ \text{Satz}}$ Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$ und $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei $g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ mit $g \leq f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt, mit $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ (messb.)

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

(Die Integrale hier im Sinne von Bem. 12.23(3), da

$\int f_+ d\mu = +\infty$ möglich; $\int f_- d\mu < \infty$)

Beweis: O.E.: $g < \infty$ (sonst: ändere g auf $\{g = +\infty\}$ zu 0. Erfüllt immer noch Voraus.). Analog Bsp. 12.29(a):

$f_n \geq g \in \overline{\mathcal{L}^1} \Rightarrow \{f_n = -\infty\}$ Nullmenge. O.E.: $f_n > -\infty$

(sonst: ändere f_n, f, g auf $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f_n = -\infty\}$ zu 0; ändert Voraus. & $\int f_n d\mu$ nicht). Analog für f. (d.h. auf $\{f = -\infty\}$).

Setze $h_n := f_n - g \in E^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $h := f - g \in E^*$; damit $h_n \nearrow h$, also (Satz 12.20 (mon. Kgz)):

$$\lim_{n\to\infty} \int \underbrace{h_n}_{f_n - g} d\mu = \int h \, d\mu \qquad (1)$$

Aus $g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ und $(f_n)_- \leq g_-$ folgt $(f_n)_- \in \mathcal{L}^1$ und damit (Bmk. 12.23(c)): $\int f_n \, d\mu$ exist. Aus (1) also

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int h \, d\mu + \int g \, d\mu \qquad (2).$$

1. Fall: $\int h \, d\mu < \infty$. Also, $h \in \overline{\mathcal{L}^1}$. Dann ist

$f = h + g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ und $\int f\,d\mu = \int h\,d\mu + \int g\,d\mu \overset{(2)}{\Rightarrow}$ Beh.

<u>2. Fall</u> $\int h\,d\mu = \infty$. Aus $g \leq f$ (da $g \leq f_n \uparrow f$)

folgt $f_- \leq g_-$, also $\int f_-\,d\mu < \infty$

$\overset{h = f_+ - f_- - g}{\Rightarrow}$ $\int f_+\,d\mu = \infty \Rightarrow \infty = \int f\,d\mu = \int h\,d\mu + \int g\,d\mu \overset{(2)}{\Rightarrow}$ Beh. ∎

Verzichtet man auf Isotonie, so gilt immer noch:

$\boxed{\text{12.34. Satz}}$ (Lemma von Fatou)

Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$, sei $g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ mit $f_n \geq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Mit $f := \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \geq \int f\,d\mu \quad \left(= \int \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \right)$$

(Die Integrale wieder wie im Sinn von Bem. 12.23 (3))

<u>Beweis</u>: Da $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf\limits_{n:n\geq m} f_n}_{=:g_m}$ messbar

$\Rightarrow g_m \geq g$ und $g_m \nearrow f \overset{\text{Satz 12.33}}{\Rightarrow}$

$$\int f\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int g_m\,d\mu = \liminf_{m\to\infty} \int \underbrace{g_m}_{\leq f_m}\,d\mu$$ ∎

<u>12.35. Bemerkung</u>

(1) Analog gilt für $f_n \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$ ($g \in \overline{\mathcal{L}}^1$):

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

(ersetze $f_n \to -f_n$ in Fatou)

(2) Auf die Bed. $f_n \geq g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ kann nicht verzichtet werden!

12.36. Satz (von der majorisierten (oder dominierten) Konvergenz von H. Lebesgue)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{L}}^*$, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $h \in \overline{\mathcal{L}}^1$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ f.ü.,

und $|f_n| \leq h$ f.ü. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann $\exists \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ mit $\tilde{f} = f$ f.ü. und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$$

Ist f auch messbar, so folgt: $f \in \overline{\mathcal{L}}^1$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \qquad \left(= \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu \right)$$

Beweis: Sei $A := \{ \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n \} \in \mathcal{A}$ (da f_n messbar)

und: $(f_n)_n$ konv. auf A, d.h. $\mu(A^c) = 0$.

$\exists \tilde{h} \in \overline{\mathcal{L}}^1$, $\tilde{h} = h$ f.ü. mit $|f_n| \leq \tilde{h}$ (überall!) $\forall n \in \mathbb{N}$

Setze $\varphi := \lim_{n\to\infty} f_n \cdot \mathbb{1}_A \Rightarrow$ messbar und $|\varphi| \leq \tilde{h} \overset{12.25(v)}{\Longrightarrow} \varphi \in \overline{\mathcal{L}}^1$

$\Rightarrow \exists \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ mit $\varphi = \tilde{f}$ f.ü.

Nun: $\underbrace{\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu}$ $\underset{\text{Bem. 12.35(1)}}{\overset{f_n \leq \tilde{h}}{\leq}} \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu \overset{\mu(A^c)=0 \;\&\; 12.31}{=} \int \limsup_{n\to\infty} f_n \mathbb{1}_A \, d\mu$

$$= \underbrace{\int \varphi \, d\mu}_{\overset{12.31}{=} \int \tilde{f} d\mu} \underset{\text{Def. } \varphi \;\&\; A}{=} \int \liminf_{n\to\infty} f_n \mathbb{1}_A \overset{\mu(A^c)=0 \;\&\; 12.31}{=} \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu$$

$$\underset{f_n \geq -\tilde{h}}{\overset{\text{Fatou}}{\leq}} \underbrace{\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$$

Zusatz: Falls f messbar $\exists \mu$-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ mit

$f \mathbb{1}_{N^c} = \varphi \mathbb{1}_{N^c} \Rightarrow$ Beh. mit Satz 12.31 (b) ∎

12.37. Definition (Konvergenzbegriffe)

Seien $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Konvergenz (μ-) f.ü.: $f_n \xrightarrow[f.ü.]{n\to\infty} f \;:\Longleftrightarrow$

  $\exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert $\forall x \in X \setminus N$

  und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

  (schon bekannt!)

- (μ-) stochastische Konvergenz: (oder: Kgz. dem Maße nach)

  $f_n \xrightarrow[\mu]{n\to\infty} f :\Longleftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$ gilt:

  $$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

[Im Fall $\mu(X) < \infty$ genügt es $A = X$ zu betrachten!]

- Konvergenz in L^1 (-Norm): $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{n\to\infty} f \;:\Longleftrightarrow$

  $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, wobei $\|g\|_1 := \int |g| \, d\mu$ (L^1-Norm)

12.38. Satz

Konvergenz fast überall (f.ü.) $\Rightarrow$ stochastische Konvergenz

Konvergenz in L^1 $\Rightarrow$ stochastische Konvergenz

Hilfsmittel zum Beweis:

12.39. Lemma (Tschebyscheff-Ungleichung)

Sei $f \in \mathcal{L}^1$, $f \geq 0$, und $\varepsilon > 0$ bel. Dann gilt

$$\mu(\{f \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int f \, d\mu$$

Beweis: $f \geq f \cdot \mathbb{1}_{\{f \geq \varepsilon\}} \geq \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{\{f \geq \varepsilon\}}$

$\Rightarrow \int f \, d\mu \geq \varepsilon \mu(\{f \geq \varepsilon\})$ ☒

Beweis von Satz 12.38.

„$\Rightarrow$": Tschebyscheff mit $|f-f_n|$:

$$\mu(\{|f-f_n| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f-f_n\|_1$$

„$\Downarrow$": Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ bel. fest, sei $\varepsilon > 0$.

n.V. $\exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0$: $f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in X \setminus N$.

Setze $C_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$

$$B_n := \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N}: \\ m \geq n}} C_m = \{x \in X : \exists m \geq n : |f_m(x) - f(x)| > \varepsilon\}$$

$\Rightarrow B_n \downarrow B$ für $n \to \infty$ mit $B := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k \subseteq N$

$\Rightarrow 0 \leq \mu(A \cap C_n) \leq \mu(A \cap B_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Stetigkeit von oben ☒

12.40 Warnung: Es gelten keine Umkehrungen in Satz 12.38, auch nicht „$\Uparrow$" oder „$\Downarrow$".

Bsp. für $\not\Downarrow$: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mu = \lambda$,

$$f_n := \frac{n}{2} \mathbb{1}_{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[\text{f.ü.}]{n \to \infty} 0$, aber $\|f_n - 0\|_1 = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

(also hier keine Limitenvertauschung)

Für „$\Uparrow$" (und damit auch „$\Uparrow$") existiert Abschwächung:

$\boxed{\text{12.41. Satz}}$ Sei μ σ-endlich und seien $f_n, f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f_n \xrightarrow[\mu]{n\to\infty} f \iff \begin{cases} \forall \text{ Teilfolgen } (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ von } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}} \text{ mit } f_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{\ell\to\infty} f \end{cases}$$

(Satz gilt auch ohne Vorraus., dass μ σ-endlich; siehe Bauer)

$\boxed{\text{12.42. Korollar}}$ Unter den Vor. wie in 12.40 gilt

$$f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{n\to\infty} f \Rightarrow \begin{array}{l} \forall \text{ Teilfolgen } (f_{n_k})_k \text{ von } (f_n)_n \\ \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_{k_\ell}})_\ell \text{ mit } f_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{\ell\to\infty} f \end{array}$$

Beweis von Satz 12.41: O.E. sei $f = 0$!

„$\Leftarrow$": Ann.: $f_n \not\xrightarrow[\mu]{} 0 \Rightarrow \exists\, \varepsilon, \delta > 0,\ A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ und Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $\mu(\{x\in A : |f_{n_k}(x)| > \varepsilon\}) > \delta \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (*)

n.V. hat $(f_{n_k})_k$ f.ü. kgt.'e Teilfolge $(f_{n_{k_\ell}})_\ell$

$$\overset{\text{Satz 12.38}}{\Longrightarrow} \quad f_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\mu]{\ell\to\infty} 0 \quad \text{↯ zu (*)}.$$

„$\Rightarrow$": Ohne E. genügt es zu zeigen:

$$f_n \xrightarrow[\mu]{n\to\infty} 0 \Rightarrow \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_k})_k \text{ von } (f_n)_n \text{ mit } f_{n_k} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{k\to\infty} 0 \quad (**)$$

– denn, sei $(f_{m_k})_k$ bel. Teilfolge von $(f_n)_n \Rightarrow f_{m_k} \xrightarrow[\mu]{k\to\infty} 0$ (n.V.)

$\overset{(**)}{\Longrightarrow}$ $(f_{m_k})_k$ besitzt f.ü. kgt.'e Teilfolge.

zu (**): Sei $X_\ell \in \mathcal{A}$, $\mu(X_\ell) < \infty$ $\forall \ell \in \mathbb{N}$ und $X_\ell \nearrow X$ (σ-endlich)

Sei ℓ fix. N.V. gilt: $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_k \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_k:$

$$\mu(\{x\in X_l : |f_n(x)| > \tfrac{1}{k}\}) = \mu(\{|f_n \mathbb{1}_{X_l}| > \tfrac{1}{k}\}) \le \frac{1}{2^k}$$

O.E.: wähle n_k so $n_{k+1} > n_k$ $\forall k\in\mathbb{N}$; setze

$$A_k^l := \{|f_{n_k}\mathbb{1}_{X_l}| > \tfrac{1}{k}\} \text{ und } A^l := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N}:\\ k\ge j}} A_k^l$$

(NB: $x\in A^l \Leftrightarrow x\in A_k^l$ für unend. viele $k\in\mathbb{N}$).

Dann gilt: (l fix)

- $x\notin A^l \Rightarrow \underbrace{x\in X\setminus A_k^l}_{\Leftrightarrow\ |f_{n_k}(x)\mathbb{1}_{X_l}(x)| \le \frac{1}{k}}$ für schließlich alle k

$$\Rightarrow (f_{n_k}\mathbb{1}_{X_l})(x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

- $\mu(A^l) \le \mu\Big(\bigcup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\ge j}} A_k^l\Big) \le \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ $\underline{\forall j\in\mathbb{N}}$

$$\overset{j\to\infty}{\Rightarrow} \mu(A^l) = 0$$

$\Rightarrow A := \bigcup_{l\in\mathbb{N}} A^l$ ist Nullmenge und $\forall x\in X\setminus A_l$ gilt

$$(f_{n_k}\mathbb{1}_{X_l})(x) \xrightarrow{k\to\infty} 0 \quad \forall l\in\mathbb{N} \underset{J}{\Rightarrow} f_{n_k}(x) \xrightarrow{k\to\infty} 0$$

wähle l, so $x\in X_l$ ($X_l \uparrow X$)

d.h. $f_{n_k} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{k\to\infty} 0$

Nun noch zu „$\Leftarrow$" in Satz 12.38.:

$\boxed{\text{12.43. Definition}}$ Sei $f_j\in\mathcal{L}^1$ $\forall j\in J$ (Indexmenge)

$$\left.\begin{array}{c}(f_j)_{j\in J} \text{ gleichgradig} \\ \text{integrierbar}\end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\forall \varepsilon>0\ \exists h\in\mathcal{L}^1,\ h\ge 0: \\ \int |f_j|\cdot \mathbb{1}_{\{|f_j|\ge h\}}\,d\mu < \varepsilon \quad \forall j\in J\end{array}\right.$$

12.44. Bemerkung: Ist μ endlicher Maß (z.B. W.-Raum) ist gleichgradig int.-bar. äquiv. zu def. als

$$(f_j)_{j\in J} \text{ gleichgradig int.-bar} \iff \sup_{j\in J} \int |f_j| \cdot \mathbb{1}_{\{|f_j|\geq N\}} \, d\mu \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

12.45. Beispiel: Es gebe $g \in \mathcal{L}^1$ mit $|f_j| \leq g$ f.ü. $\forall j \in J$ (insbesondere erfüllt, falls J endlich: Wähle $g := \max_j |f_j|$) $\Rightarrow$ $(f_j)_{j\in J}$ gleichgradig integrierbar. (wähle z.B. $h = 2g$).

$\boxed{12.46.\text{ Satz}}$ Seien $f, f_n \in \mathcal{L}^1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(i) $f_n \xrightarrow[\mu]{n\to\infty} f$ und $(f_n)_n$ gleichgradig integrierbar

(ii) $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{n\to\infty} f$.

Beweis. Siehe z.B. Bauer.

12.47. Bemerkung

(1) Sei $f_n \xrightarrow[\text{f.ü.}]{n\to\infty} f$, $|f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1$ $\Rightarrow$ Satz 12.38, Bsp. 12.45 & Satz 12.46 (Teil „(i) $\Rightarrow$ (ii)"): $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$

(2) Da $\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f| \, d\mu \geq \left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right|$

ist (1) eine Verschärfung von Satz 12.36 (maj. Konv.)

Wir beweisen (1) später auf andere Weise...

Am Ende 2 wichtige Anwendungen von maj. Konv.:

12-48. Satz (Stetigkeit & Diff.barkeit von Parameterintegralen)

Sei (M,d) metrischer Raum, $(X,\mathcal{A},\mu)$ Maßraum, $f: M\times X \to \mathbb{R}$ eine Abb. so daß:

(1) $\forall t\in M$: $f(t,\cdot)$ ist integrierbar

Sei $F: M\to\mathbb{R}$, $t\mapsto F(t) := \int_X f(t,x)\,d\mu(x)$

(a) Sei $t_0\in M$; angenommen (zusätzlich zu (1)):

(2) $\forall x\in X$: $f(\cdot,x)$ ist stetig in t_0

(3) $\exists g: X\to[0,\infty]$ integrierbar mit $|f(t,x)|\le g(x)$ $\forall t\in M$ $\forall x\in X$

Dann gilt: F ist stetig in t_0

(b) Sei $M=I\subseteq\mathbb{R}$ offenes Intervall. Es gelte (1) und

(2') $\forall x\in X$: $f(\cdot,x)$ diff.bar auf I

(3') $\exists g: X\to[0,\infty]$ integrierbar mit $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right|\le g(x)$ $\forall t\in I$, $\forall x\in X$

Dann ist F diff.bar, $\forall t\in I$ ist $\frac{\partial f}{\partial t}(t,\cdot)$ integrierbar, und es gilt

$$F'(t) = \frac{dF}{dt}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\,d\mu(x).$$

Beweis: (a) Sei $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ Folge in M mit $t_k\to t_0$, $k\to\infty$.

Dann, $\forall x\in X$: $f_k(x) := f(t_k,x) \xrightarrow[k\to\infty]{(2)} f(t_0,x)$,

$\forall k$: $f_k\in\mathcal{L}^1(\mu)$ wegen (1), und $|f_k|\le g$ aus (3)

maj.Konv. $\Longrightarrow$ $\underbrace{\int f_k(x)\,d\mu(x)}_{= F(t_k)} \xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{\int f(t_0,x)\,d\mu(x)}_{= F(t_0)} \Rightarrow F$ folgenstetig in t_0 ✓

(b) Seien $t \in I$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge mit $t+h_n \in I \ \forall n \in \mathbb{N}$ und setze

$$f_n : x \longmapsto \frac{f(t+h_n, x) - f(t,x)}{h_n}.$$

Es gilt, $\forall x \in X$: $\quad f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ (wegen (2'))

Nach dem MWS: $\forall x, n \ \exists \theta_{x,n} \in]0,1[$ mit

$$f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t + \theta h_n, x)$$

Nach (3') gilt $\quad |f_n| \leq g \ \forall n \in \mathbb{N}$,

und damit

$$F'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x)\, d\mu(x)$$

$$\underset{12\text{-}36}{\overset{\text{maj.-Konv.}}{=}} \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x) \qquad \blacksquare$$