12.4. Eigenschaften fast überall

$\boxed{\text{12.28. Definition}}$ Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $\forall x \in X$ sei $Q(x)$ eine mathem. Aussage.

$Q(x)$ gilt für $(\mu$-$)$ fast alle $x \in X$ $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \exists N \in \mathcal{A},\ \mu(N) = 0 \\ \text{(Nullmenge!) und} \\ Q(x) \text{ gilt } \forall x \in N^c. \end{cases}$

[Q gilt $(\mu$-$)$ fast überall; $(\mu$-$)$ f.ü.]

12.29. Beispiele

(i) $f \in \mathcal{L}^1 \begin{matrix} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{matrix} \begin{cases} f \text{ ist f.ü. endlich} \\ (\text{d.h.: } |f(x)| < \infty \ \forall x \in X \setminus N) \end{cases}$ (Übung!)

(ii) $f = g$ f.ü., d.h. $f(x) = g(x)$ $\forall x \in X \setminus N$
falls auch $g = h$ f.ü. $\Rightarrow$ $f = h$ f.ü. ($\Rightarrow$ "= f.ü." ist Äquival.relation!)

$\boxed{\text{12.30. Satz}}$ Sei $f \in E^*$. Dann gilt

$$\int_X f \, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ f.ü.} \qquad (f \geq 0 \text{ wesentlich!})$$

Beweis: „$\Rightarrow$": $A_n := \{f > \frac{1}{n}\}$ $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A_n \uparrow \{f > 0\}$

$$\overset{\text{Stetigkeit}}{\underset{\text{von unten}}{\Rightarrow}} \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\{f > 0\}) \qquad (*)$$

Andererseits: $\frac{1}{n} \mathbb{1}_{A_n} \leq f \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{n} \mu(A_n) \leq \int_X f \, d\mu = 0$ $\forall n$
(da $f \geq 0$!)

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \mu(\{f > 0\}) = 0$$

„$\Leftarrow$": $\exists (f_n)_n \subseteq E$, $f_n \uparrow f$ mit $\mu(\{f_n > 0\}) \leq \mu(\{f > 0\}) = 0$

$$\overset{\text{Treppenfkt.}}{\Rightarrow} \int_X f_n \, d\mu = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{Beh. mit}$$
Def. Integral für $f \in E^*$

$\boxtimes$

12.31. Satz Seien $f, g : X \to \underbrace{\overline{\mathbb{R}}}_{\text{messbar}}$ und $f = g$ μ-f.ü.

Dann gilt

(a) $f, g \in E^*$ $\Rightarrow$ $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

(b) $f \in \overline{\mathcal{L}}^1$ $\Rightarrow$ $g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ und $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

Beweis. (a) Zerlege $f = f \cdot \mathbb{1}_{\{f=g\}} + f \, \mathbb{1}_{\{f \neq g\}}$

$$g = g \cdot \mathbb{1}_{\{f=g\}} + g \, \mathbb{1}_{\{f \neq g\}}.$$

- Satz 12-30 $\Rightarrow$ $\int \underbrace{f \cdot \mathbb{1}_{\{f \neq g\}}}_{=0 \text{ f.ü.}} d\mu = 0 = \int \underbrace{g \cdot \mathbb{1}_{\{f \neq g\}}}_{=0 \text{ f.ü.}} d\mu$
- $f \cdot \mathbb{1}_{\{f=g\}} = g \cdot \mathbb{1}_{\{f=g\}}$

$\Rightarrow$ Beh. ✓

(b) $f = g$ f.ü. $\Rightarrow$ $f_+ = g_+$ f.ü. und $f_- = g_-$ f.ü. $\overset{(a)}{\Rightarrow}$ Beh. ∎

12.32. Korollar Seien $f : X \to \mathbb{R}$ messbar, $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $|f| \leq g$ μ-f.ü. Dann gilt auch $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Beweis: Setze $g' := |f| \vee g$ $\Rightarrow$ g' messbar und $g' = g$ f.ü. $\overset{\text{Satz 12-31(b)}}{\Rightarrow}$ $g' \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Da $|f| \leq g'$ (überall!)

$\Rightarrow$ Beh. mit Satz 12-25. ∎