12.3. Integration messbarer Funktionen

Generalvoraus. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum

12.17. Definition

(1) $E^* := \{ f : X \to [0,\infty] : f \text{ messbar} \}$
nicht-neg. numerische Fkt.'en

Satz 12.9.
$\Longleftrightarrow \quad E^* = \{ f : X \to [0,\infty] : \exists (f_n)_n \subseteq E \text{ isoton mit } \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n}_{\sup_n f_n} = f \}$

(2) Sei $f \in E^*$ und $(f_n)_n \subseteq E$ eine appr. Folge nach Satz 12.9.
Dann heißt

$$\int_X f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right)$$ (μ-) Integral von f

(stimmt für $f \in E$ mit Def. 12.14 überein).

12.18. Lemma

$\int_X f \, d\mu$ ist wohldefiniert, da unabh. von Wahl der approx. Folge $(f_n)_n$.

Beweis: Sei $(g_k)_k \subseteq E$, $g_k \uparrow f$ zweite approx. Folge.
Aus Symmetriegründen reicht es $\lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$ zu zeigen.

Sei $\varphi_{k,n} := g_k \overset{\text{min.}}{\wedge} f_n \in E \quad \forall k,n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ für festes $n \in \mathbb{N}$: $\varphi_{k,n} \uparrow f_n \in E$ (da $g_k \uparrow f \geq f_n$)

$$\overset{\forall n}{\Rightarrow} \quad \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu \geq \lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_{k,n} \, d\mu \underset{\text{Lemma 12.}}{=} \int f_n \, d\mu$$

$\Rightarrow$ Beh. ∎

12.19. Lemma Seien $f, g \in E^*$, $a \in [0,\infty[$. Dann gilt:

(1) $af,\ f+g,\ f\cdot g,\ f\wedge g,\ f\vee g \in E^*$

(2) $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$

(3) $\int_X af\,d\mu = a\int_X f\,d\mu$

(4) $f \le g \Rightarrow \int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$ (Monotonie)

Beweis: (1) Satz 12.7. (2)-(4) Lemma 12.15. + Limes ☒

Ein erster Höhepkt.:

12.20. Satz (Monotone Kgz. nach Beppo Levi)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E^*$ mit $0 \le f_n \le f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dann ist $f := \lim_{n\to\infty} f_n \in E^*$ (existiert, da isoton) und
$\uparrow$ Satz 12.7(d)

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu \qquad \left(= \int_X (\lim_{n\to\infty} f_n)\,d\mu \right)$$

Beweis: Zu $f_n \in E^*$ $\exists (f_n^m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq E$ mit $f_n^m \nearrow f_n$ für $m\to\infty$.

Setze $h_m := \max\{f_1^m, \dots, f_m^m\} \in \underline{E}$ (12.11(b))

$\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} \bullet\ h_m \le \max\{f_1,\dots,f_m\} = f_m \le f \quad (*) \\ \bullet\ h_m \le h_{m+1} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} h_m \le f$ (insbes. ex. limes!) $(**)$

Andererseits: $f_n^m \le h_m$ $\forall n = 1,\dots,m$

$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} h_m \ge \lim_{m\to\infty} f_n^m \overset{n.V.}{=} f_n$; mit $n\to\infty \overset{(**)}{\Longrightarrow}$

$(h_m)_m \subseteq E$ und $h_m \uparrow f$ und

$$\int_X f \, d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_X h_m \, d\mu$$

Schließlich, da $f_n \le f \Rightarrow \int_X f_n \, d\mu \le \int_X f \, d\mu$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_X \underbrace{h_m}_{(*) \le f_m} d\mu \le \lim_{m\to\infty} \int_X f_m \, d\mu$$

$\Rightarrow$ Beh. mit $n \to \infty$ ∎

12.21. Korollar Sei $(f_n)_n \subseteq E^*$. Dann ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in E^*$

und

$$\int_X \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n \, d\mu$$

Beweis: Aus mon. Kgz. mit $g_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$ ∎

Erinnerung: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $f_\pm := \max\{\pm f, 0\}$ $(\Rightarrow f = f_+ - f_-)$

dann gilt: f messbar $\Leftrightarrow$ (f_+ und f_- messbar)

12.22. Definition Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$

f (μ-) integrierbar (über X) $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} f \text{ messbar und} \\ \int_X f_+ \, d\mu < \infty, \ \int_X f_- \, d\mu < \infty \end{cases}$

In diesem Fall heißt

$$\int_X f \, d\mu := \int_X f_+ \, d\mu - \int_X f_- \, d\mu \ (\in \mathbb{R})$$

das (μ-) Integral von f (über X). Für $A \in \mathcal{A}$ sei

$$\int_A f \, d\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

12.23. Bemerkung

(1) Alternativschreibweisen wie in Bem. 12.14(3).

(2) Def. 12.22 stimmt für $f \in E^*$ mit Def. 12.17(2) überein

(3) Allgemeiner könnte man auch $\int_X f_+ \, d\mu = \infty$ oder $\int_X f_- \, d\mu = \infty$ (aber **nicht** beide!) erlauben — machen wir in Kap 12.5!

(4) Falls $(X, \mathcal{A}, \mu)$ W.-Raum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar Zufallsvariable $\Rightarrow$
- $\mathbb{E}(f) := \int_X f \, d\mu$ Erwartungswert von f
- $\operatorname{Var}(f) := \mathbb{E}\left((f - \mathbb{E}(f))^2 \right)$ — Varianz von f.

12.24. Definition

$$\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(\mu) := \mathcal{L}^1(X, \mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} : f \ \mu\text{-integrierbar} \}$$

$$\overline{\mathcal{L}^1} := \overline{\mathcal{L}^1}(\mu) := \overline{\mathcal{L}^1}(X, \mu) := \{ f : X \to \underset{!\uparrow}{\overline{\mathbb{R}}} : f \ \mu\text{-integrierbar} \}.$$

12.25. Satz

Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind äquivalent

(i) $f \in \overline{\mathcal{L}^1}$

(ii) $f_+, f_- \in \overline{\mathcal{L}^1}$

(iii) $|f| \in \overline{\mathcal{L}^1}$

(iv) $\exists u, v \in \overline{\mathcal{L}^1} : f_+ \le u, \ f_- \le v$

(v) $\exists g \in \overline{\mathcal{L}^1} : \ |f| \le g$

(Analog für $\mathbb{R}$ & $\mathcal{L}^1$)

Beweis: Übung.

12.26. Korollar

$\overline{\mathcal{L}^1}$ ist Vektorverband, d.h. $\forall f, g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ und $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} (1) \ \int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu \\ (2) \ \int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu \end{array}\right\} \text{linear} \\ (3) \ f \le g \Rightarrow \int f \, d\mu \le \int g \, d\mu \quad \text{Monotonie} \end{array}\right\} \begin{array}{l} \int d\mu \text{ ist} \\ \text{monotone} \\ \text{Linearform} \\ (f \mapsto \int_X f \, d\mu) \end{array}$$

(4) $\left|\int f \, d\mu\right| \leq \int |f| \, d\mu$ Dreiecks - Ungl.

(5) $f \vee g,\ f \wedge g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ Verbandseigenschaft

(Analog für $\mathbb{R}$ & $\mathcal{L}^1$)

Beweis: (1)-(3) aus Lemma 12.19 durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil.

(4) $\left|\int f \, d\mu\right| = \left|\underbrace{\int f_+ \, d\mu}_{\geq 0} - \underbrace{\int f_- \, d\mu}_{\geq 0}\right| \leq \int f_+ \, d\mu + \int f_- \, d\mu = \int \underbrace{(f_+ + f_-)}_{|f|} \, d\mu$

(5) Aus $|f \vee g| \leq |f| + |g|$ bzw. $|f \wedge g| \leq |f| + |g|$, Satz 12.25 & (b) ∎

12.27. Beispiele

(i) Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $a \in X$, $\{a\} \in \mathcal{A}$. und $\mu = \delta_a$ (Dirac-Maß bei a konz.)

$$\Rightarrow \overline{\mathcal{L}^1}(\delta_a) = \{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} : |f(a)| < \infty \}$$

da $\int_X f(x) \, d\delta_a(x) = f(a)$ (siehe Übung!)

(ii) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ endlicher Maßraum (z.B. W.-Raum).

Dann gilt:

$f : X \to \mathbb{R}$ messbar, beschränkt $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

da $\int_X |f(x)| \, d\mu \leq \left(\sup_{x \in X} |f(x)|\right) \mu(X) < \infty.$