12.2. Integral von Elementarfunktionen

12.10. Definition Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum

(a) $E := \{ f : X \to \mathbb{R} : f \geq 0$ Treppenfunktion $\}$
also insbes. messbar!

Raum der Elementarfkt.'en

(b) Sei $f \in E$

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$$ Normaldarstellung

$:\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_j \geq 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \text{und} \\ \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{A} \text{ paarw. disjunkt.} \end{cases}$

12.11. Bemerkung

(a) Normaldarstellung nicht eindeutig, es sei denn alle $\alpha_j > 0$ und paarw. verschieden

(b) Für $f, g \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow \alpha f, f+g, f \vee g, f \wedge g \in E$

12.12 Lemma

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $f \in E$ mit 2 Normaldarstellungen

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} = f = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$$

Dann gilt $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(B_k)$$

Beweis: Sei $W := \{ w \in]0, \infty[: f^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset \}$

(Wertebereich von f ohne $\{0\}$; $\# W < \infty$)

$$\Rightarrow \dot{\bigcup_{j:\alpha_j=w}} A_j = f^{-1}(\{w\}) = \dot{\bigcup_{k:\beta_k=w}} B_k$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{w\in W} w \underbrace{\sum_{j:\alpha_j=w} \mu(A_j)}_{\mu(\dot{\bigcup}_{j:\alpha_j=w} A_j)} = \sum_{w\in W} w\,\mu(f^{-1}(\{w\})) \overset{\text{analog}}{=} \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(B_k) \quad \blacksquare$$

<u>Im folgenden liege immer ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zugrunde</u>

12.13. Definition (*Integral von Elementarfkt'en*)

Sei $E \ni f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ eine Normaldarstellung

Dann heißt
$$\int_X f(x)\,d\mu(x) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

das *(μ-) Integral von f über X*

12.14. Bemerkung

(1) Name "x" der Integrationsvariablen beliebig.

(2) Wohldef. wegen Lemma 12.13 (unabh. von Wahl der Normaldarstellung!)

(3) Gebräuchl. Alternativschreibweisen

$$\int_X d\mu(x)\, f(x), \quad \int_X f\,d\mu, \quad \int_X f(x)\,\mu(dx), \ \ldots$$

speziell für $\mu = \overset{(-)}{\lambda^d}$: $d\mu(x) = d^dx$ oder dx

(4) $f \mapsto \int f\,d\mu$ def. Abb. $E \to [0,\infty]$

12.15. Lemma Seien $f, g \in E$, $a \in [0,\infty[$, $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

(1) $\int_X \mathbb{1}_A(x)\, d\mu(x) = \mu(A)$

$$\left.\begin{array}{ll}(2) & \int_X af\, d\mu = a\int_X f\, d\mu \\ (3) & \int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu\end{array}\right\} \text{(Linearität)}$$

(4) $f \leq g \Rightarrow \int_X f\, d\mu \leq \int_X g\, d\mu$ (Monotonie)

Beweis: (1), (2) klar! (3), (4): Übung!

12.16. Lemma (Vorstufe des mon. Kgz.-satzes von Beppo Levi)

Sei $(f_n)_n \subseteq E$, $f \in E$ und $f_n \nearrow f$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu \qquad \left(= \int_X (\lim_{n\to\infty} f_n)\, d\mu \right)$$

Beweis 1. Fall: $\mu(\{f \neq 0\}) = \infty$

wobei $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ $\Rightarrow$ o.E. kann man $\alpha_1 > 0$ & $\mu(A_1) = \infty$ annehmen.

Sei $A_1^{(n)} := \{f_n > \frac{\alpha_1}{2}\} \Rightarrow A_1^{(n)} \overset{(f_n)_n \text{ isoton}}{\subseteq} A_1^{(n+1)}$ und $A_1 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_1^{(n)}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\, d\mu\right) \overset{12.15(4)}{\geq} \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{\alpha_1}{2}\mu(\underbrace{A_1^{(n)}}_{\bigcup_{j=1}^n A_1^{(j)}})\Big)$$

existiert in $\overline{\mathbb{R}}$, da mon. wachs. Folge

$$\overset{\text{Stetigkeit von unten}}{=} \frac{\alpha_1}{2}\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_1^{(j)}\Big) \overset{\text{Monotonie } \mu}{\geq} \frac{\alpha_1}{2}\mu(A_1) = \infty$$

andererseits: $\int_X f\, d\mu \geq \alpha_1 \mu(A_1) = \infty$, also $\infty = \infty$ ✓

2. Fall: $\mu(\{f \neq 0\}) < \infty$

$f_n \leq f \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu$ (*)

Umgekehrt sei $\varepsilon > 0$, $C_n := \{f - f_n > \varepsilon\}$, $\overset{\text{EVt u.V.}}{\Rightarrow} C_n \downarrow \emptyset$

und $\mu(C_n) < \infty$, da $C_n \subseteq \{f \neq 0\}$ $\forall n$

Stetigkeit von oben

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \mu(C_n) = 0$

Nun setze $f_{max} := \max\limits_{x \in X} f(x) < \infty$ (Treppenfkt.)

$$\Rightarrow \int_X f \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_{C_n} \underbrace{(f - f_n)}_{\leq f_{max}} d\mu + \int_X \underbrace{\mathbb{1}_{C_n^c} (f - f_n)}_{\leq \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{\{f \neq 0\} \cap C_n^c}} d\mu$$

$$\leq f_{max} \, \mu(C_n) + \varepsilon \underbrace{\mu(\{f \neq 0\})}_{=: M < \infty}$$

$\Rightarrow \int_X f \, d\mu - \lim\limits_{n \to \infty} \int f_n \, d\mu \leq \varepsilon M$; da $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow$

$\int_X f \, d\mu \leq \lim\limits_{n \to \infty} \int_X f_n \, d\mu \Rightarrow$ Beh. mit (*) $\blacksquare$