12. Integration bzgl. eines Maßes

12.1. Messbare Abbildungen

12.1. Definition Seien $(X,\mathcal{A})$, $(X',\mathcal{A}')$ Messräume und $f: X \to X'$ eine Abb.

f $\underbrace{(\mathcal{A}\text{-}\mathcal{A}')\text{ messbar}}$ $:\iff \forall A' \in \mathcal{A}' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$

d.h. $\sigma(f) := f^{-1}(\mathcal{A}') := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\} \subseteq \mathcal{A}$

↑ σ-Alg. nach Lemma 11.6(a)

- speziell für $(X', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ heißt f $(\mathcal{A}\text{-})$ messbare Funktion
- speziell für $(X', \mathcal{A}') = (\overline{\mathbb{R}}, \overbrace{\sigma(\mathcal{B} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\})}^{=:\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})})$ heißt f $(\mathcal{A}\text{-})$ messbare numerische Funktion
- speziell für $(X, \mathcal{A}, P)$ W. Raum heißt f (X'-wertige) Zufallsvariable.

12.2. Beispiel

Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $A \subseteq X$ und $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

die Indikatorfkt. (oder: Charakt. Fkt.) von A. Dann gilt

- $\mathbb{1}_A$ messbar $\iff$ A messbar (d.h. $A \in \mathcal{A}$)
- $A \subseteq B \iff \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{\bigcup_{j\in J} A_j} = \sup_{j \in J} \mathbb{1}_{A_j}$, $\mathbb{1}_{\bigcap_{j\in J} A_j} = \inf_{j\in J} \mathbb{1}_{A_j}$

12.3. Satz

(a) Seien $(X,\mathcal{A})$, $(X',\mathcal{A}')$ Messräume, sei $\mathcal{E}'$ Erzeuger von $\mathcal{A}'$. Dann gilt:

$$f: X \to X' \text{ messbar} \iff f^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{A}$$

(b) Seien $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ topologische Räume und $f: X \to X'$! Dann gilt

$$f \text{ stetig} \Rightarrow \begin{cases} f \ \text{Borel-messbar, d.h.} \\ f \ \ \sigma(\mathcal{T})\text{-}\sigma(\mathcal{T}')\text{-messbar} \end{cases}$$

(c) Seien $(X_j,\mathcal{A}_j)$, $j=1,2,3$, Messräume und $f_1: X_1 \to X_2$, $f_2: X_2 \to X_3$ messbare Abb. Dann gilt

$$f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3 \text{ messbar.}$$

Beweis (a) „$\Rightarrow$" klar.

„$\Leftarrow$": Betrachte $\tilde{\mathcal{A}} := \{A' \in \mathcal{P}(X') : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ (das feinste – d.h. grösste – Mengensystem in X', so dass f $\mathcal{A}$-$\tilde{\mathcal{A}}$ messbar ist)

n.V.: $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{E}'$. Beh: $\tilde{\mathcal{A}}$ ist σ-Alg. in X'

($\Rightarrow \tilde{\mathcal{A}} \supseteq \sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{A}' \Rightarrow f$ messbar ✓)

(i) $f^{-1}(X') = X \in \mathcal{A}$, (ii) $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow f^{-1}(\tilde{A}^c) = (f^{-1}(\tilde{A}))^c \in \mathcal{A}$

(iii) $(\tilde{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A}_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\tilde{A}_n) \in \mathcal{A}$. $\Rightarrow$ Beh.

(b) Folgt aus (a), denn n.V. gilt $f^{-1}(\mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T}$.

(c) Klar, da $\forall A_3 \in \mathcal{A}_3$: $(f_2 \circ f_1)^{-1}(A_3) = f_1^{-1}(\underbrace{f_2^{-1}(A_3)}_{\in \mathcal{A}_2}) \in \mathcal{A}_1$ ∎

12.4. Definition Sei X Menge, seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$, $j \in J$, Messräume und $f_j : X \to X_j$ $\forall j \in J$.

$\sigma(f_j, j \in J) := \sigma\left(\bigcup_{j \in J} f_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$ ist kleinste σ-Algebra auf X, bzgl. der alle f_j, $j \in J$, messbar,

die von $\{f_j\}_{j \in J}$ erzeugte σ-Algebra auf X.

12.5. Beispiel Sei $A \subseteq X \Rightarrow \sigma(\mathbb{1}_A) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$

12.6. Lemma Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum. Dann gilt:

(a) $f : X \to \mathbb{R}$ messbar $\Leftrightarrow \underbrace{\{x \in X : f(x) \leq a\}}_{=: \{f \leq a\}} \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

(b) $\Leftrightarrow \{f < a\} \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

(c) $\Leftrightarrow \{f \underset{(>)}{\geq} a\} \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

(d) $\Leftrightarrow \{f \overset{\geq}{\underset{(\leq)}{}} a\} \in \mathcal{A}$ $\forall a \in D$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ dicht.

(e) $\Leftrightarrow \{f \in U\} \in \mathcal{A}$ $\forall U \subseteq \mathbb{R}$ offen

(f) $\Leftrightarrow \{f \in G\} \in \mathcal{A}$ $\forall G \subseteq \mathbb{R}$ abgeschl.

(g) $\Leftrightarrow \{a \leq f < b\} \in \mathcal{A}$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

(analog mit $\overline{\mathbb{R}}$ statt $\mathbb{R}$)

Beweis: Satz 12.3(a), da alles Erzeuger von $\mathcal{B}$ ∎

12.7. Satz Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $f, f_n, g : X \to \mathbb{R}$, alle messbar für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\{f \lessgtr g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{A}$

(b) Für $c \in \mathbb{R}$ sind

Min Max

$cf, f \pm g, fg, f \wedge g, f \vee g, |f|$ messbar

(c) $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n, \inf\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n, \limsup\limits_{n \to \infty} f_n, \liminf\limits_{n \to \infty} f_n$ messbar

(d) falls $\forall x \in X \ \lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ existiert (pkt.weise)

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f_n$ messbar

(analog mit $\overline{\mathbb{R}}$ statt $\mathbb{R}$, fordere $f \pm g$ wohldef.)

Beweis. (a) folgt aus $\{f < g\} = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{q < g\})$

$\{f \leq g\} = \{g < f\}^c$

$\{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\}$

$\{f \neq g\} = \{f = g\}^c$, und Lemma 12.6.

(b) $\left.\begin{array}{l} f : X \to \mathbb{R} \text{ messbar} \\ \gamma : \begin{array}{l}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ r \mapsto cr\end{array} \text{ stetig} \overset{\text{Satz 12.3(b)}}{\Longrightarrow} \text{messbar} \end{array}\right\} \overset{12.3(c)}{\Longrightarrow} \begin{array}{l}\gamma \circ f = cf \\ \text{messbar}\end{array}$

Rest: Übung!

(c) • $\left\{\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a\right\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq a\}$ messbar $(a \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Beh. mit Lemma 12.6

• $\inf\limits_n f_n = -\sup\limits_n (-f_n)$ messbar nach obigem & (b)

- $\limsup_{n\to\infty} f_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} f_m$

  $\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} f_m$

  Beh. nach eben gezeigten

(d) $\lim_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n$ ∎

Zentrale Rolle in der Integrationstheorie:

$\boxed{\text{12.8. Definition}}$ Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $f: X \to \mathbb{R}$

$$f \text{ Treppenfunktion} :\Leftrightarrow \begin{cases} \exists N \in \mathbb{N}\ \exists A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}, \\ \exists a_1, \dots, a_N \in \mathbb{R} : \quad f = \sum_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{A_n} \end{cases}$$

- stets messbar, da end. Linearkomb. von messbaren Indikatorfkt.'en.

$\boxed{\text{12.9. Satz}}$ Sei $(X, \mathcal{A})$ und $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt:

$$f \text{ messbar} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \text{ Folge } (f_n)_n \text{ von Treppenfunktionen} \\ f_n: X \to \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f = \lim_{n\to\infty} f_n \\ \qquad \text{existiert pkt.wise} \end{cases}$$

Falls $f \geq 0$, kann $(f_n)_n$ isoton gewählt werden, $f_n \nearrow f$.
Falls f beschränkt, kann $(f_n)_n$ so gewählt werden, dass die Konvergenz sogar gleichmäsig ist.

Beweis: "$\Leftarrow$" Satz 12.7(d), da Treppenfkt.'en messbar

"$\Rightarrow$": $f_\pm := \max\{\pm f, 0\}$ messbar nach Satz 12.7. $(0 = \mathbb{1}_\emptyset)$

und $f = \underbrace{f_+}_{\geq 0} - \underbrace{f_-}_{\geq 0}$ Positiv-, Negativteil von f

$\Rightarrow$ es genügt $f \geq 0$ zu betrachten, denn

aus $f_n^{\pm} \nearrow f_{\pm} \Rightarrow f_n^+ - f_n^- \to f_+ - f_- = f$

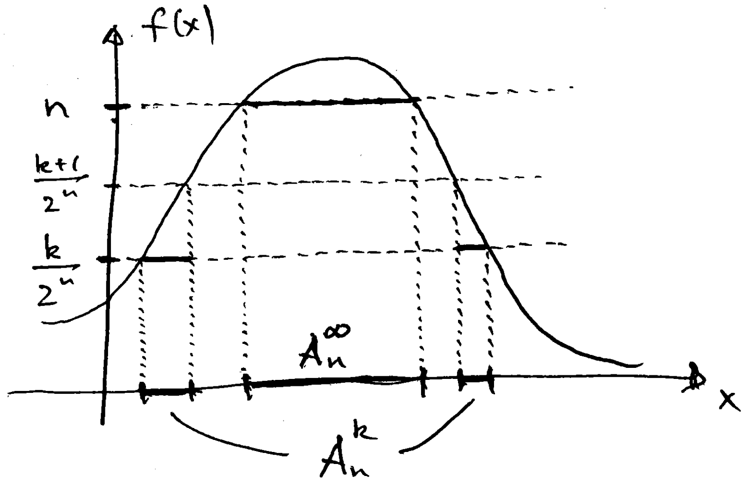
(beachte: $\{f_+ \neq 0\} \cap \{f_- \neq 0\} = \emptyset$)

Sei also $f \geq 0$, setze

$A_n^k := \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right\} \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, \dots, n2^n - 1\}$

$A_n^\infty := \{ f \geq n \} \in \mathcal{A}$

$f_n := n \mathbb{1}_{A_n^\infty} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{A_n^k}$

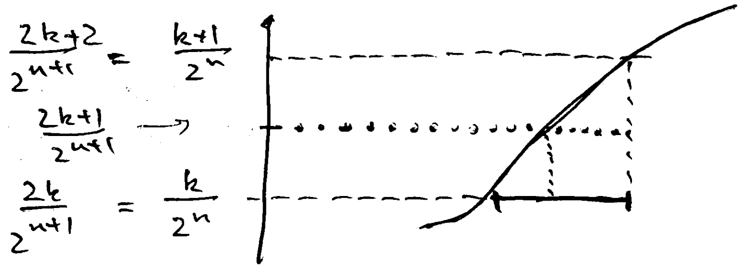


Treppenfkt. $\forall n \in \mathbb{N}$ mit

- $f_n \leq f_{n+1} \leq f \quad \forall n \in \mathbb{N}$

  klar

  da Unterteilung $\{A_{n+1}^k\}$ eine Verfeinerung von $\{A_n^k\}_k$



- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

  da 1. Fall: $f(x) = \infty \Rightarrow x \in A_n^\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

  $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{f_n(x)}_{n} = \infty$

  2. Fall: $f(x) < \infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : f(x) < n_0$

  $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \ \exists k_n$ mit $x \in A_n^{k_n}$

  $\Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n} \Rightarrow$ Kgz. (*)

Falls f beschränkt: Nur 2. Fall möglich

& n_0 unabh. von $x \stackrel{(*)}{\Rightarrow}$ gleichm. Konv. ∎