11. Mengensysteme und Maße

11.1. Das Maßproblem

Archimedes (3. Jh. v. Chr.): Oberfläche und Volumen einer Kugel berechnet (im $\mathbb{R}^3$)

G. Cantor (1845–1918; Begründer der Mengenlehre)

Frage nach „Volumen" einer bel. Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$

E. Borel (1871–1956) & H. Lebesgue (1875–1941)

Formulieren das Maßproblem:

11.1. Definition (Maßproblem) Gesucht ist Maßfunktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ mit den Eigenschaften

(a) σ-Additivität: $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

(abzählbar unendlich)

aus paarws. disjunkten Teilmengen (d.h. $A_n \cap A_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$), gilt

$$\mu\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

($\dot{\cup}$ disj. ver.; siehe 1.22)

(b) Bewegungsinvarianz: $\forall$ Bewegung $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, d.h.

(Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$ – früher: $\|\cdot\|_2$)

$|\beta(x) - \beta(y)| = |x-y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^d$, und

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt: $\mu(\beta(A)) = \mu(A)$

(c) Normierung: $\mu([0,1]^d) = 1$

11.2. Satz (Vitali, 1905)

Für <u>kein</u> $d \in \mathbb{N}$ besitzt das Maßproblem 11.1 eine Lösung

- folgt z.B. aus Paradoxon von

11.3. Satz (Banach u. Tarski, 1924)

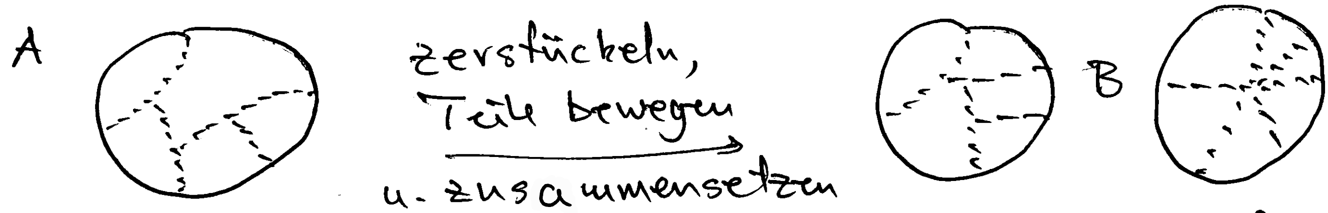
Sei $d \in \mathbb{N}$ und $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ mit nicht-leeren Inneren.
Dann $\exists\, C_k \subseteq \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$, und Bewegungen $\beta_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit

$$A = \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} C_k \quad \text{und} \quad B = \dot{\bigcup_{k\in\mathbb{N}}} \beta_k(C_k)$$

[siehe z.B. Elstrodt für Referenzen]

11.4. Bemerkungen

(a) $A :=$ Kugel von Radius 1, $B := 2$ <u>disj.</u> Kugeln von Rad. 1



[Teile sind sehr(!) kompliziert – Auswahlaxiom zur Konstruktion]

(b) Für $d \geq 3$ und A, B zusätzlich beschränkt kommt man sogar mit <u>endlich</u> vielen Teilstücken C_k aus!

$\Rightarrow$ Inhaltsproblem (:= Maßproblem mit nur <u>endlicher</u> Additivität statt σ-Additivität) nicht lösbar für $d \geq 3$.

(c) <u>Ausweg aus Dilemma</u>: Schränke Def.bereich von μ auf <u>echte</u> Teilmenge („messbare Mengen") von $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ein, d.h. Teilstücke von Banach & Tarski dürfen nicht messbar sein.

11.2. Mengensysteme

11.5. Definition Sei X Menge, sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Menge (auch: Familie) von Teilmengen von X.

- $\mathcal{A}$ ist ^{c}-stabil $:\Leftrightarrow (A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A})$
(komplementstabil)

- Sei Υ eine der Mengenoperationen $\cup, \cap, \setminus, \Delta$

sym. Differenz: $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$\mathcal{A}$ ist Υ-stabil
$:\Leftrightarrow (A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \,\Upsilon\, B \in \mathcal{A})$

- $\mathcal{A}$ ist $\setminus_{\supseteq}$-stabil $:\Leftrightarrow (A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \supseteq B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A})$

- $\mathcal{A}$ ist $\dot{\cup}$-stabil $:\Leftrightarrow (A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \dot{\cup} B \in \mathcal{A})$

- $\mathcal{A}$ ist $\cup_\infty$-stabil $:\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_n \in \mathcal{A} \;\forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \end{array} \right.$
(stabil bzgl. abz. Vereinigung)

analog: $\cap_\infty$-, $\dot{\cup}_\infty$-stabil

11.6. Lemma Seien X, X' Mengen, sei Υ eine Mengenoperation aus Def. 11.5.

(a) Sei $T: X' \to X$ eine Abb., $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$,

$$\mathcal{A}' := T^{-1}(\mathcal{A}) := \{\underbrace{T^{-1}(A)}_{:= \{x' \in X' : T(x') \in A\}} : A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{P}(X')$$

Dann gilt:

$$\mathcal{A} \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil} \Rightarrow \mathcal{A}' \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil}$$

(b) Sei $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $\forall j \in J$ sei $\mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}_j \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil } \forall j \in J) \Rightarrow (\bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil})$$

Beweis. Nachrechnen,

(a) z. B. sei $\mathcal{A}$ $\cup$-stabil und sei $A', B' \in \mathcal{A}'$

$\Rightarrow \exists A, B \in \mathcal{A}$ mit $A' = T^{-1}(A)$, $B' = T^{-1}(B)$

$\Rightarrow A' \cup B' = T^{-1}(A \cup B) \in \mathcal{A}'$, usw ...

(b) z. B. seien $\mathcal{A}_j$ $\cap$-stabil $\forall j \in J$.

Seien $A, B \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j \Rightarrow \underbrace{A, B \in \mathcal{A}_j}\ \forall j \in J$

$\overset{n.V.}{\Rightarrow} A \cap B \in \mathcal{A}_j$

$\Rightarrow A \cap B \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}$, usw... ∎

11.7. Korollar Sei $X' \subseteq X$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und

$\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cap X' := \{A \cap X' : A \in \mathcal{A}\}$ (Spur von $\mathcal{A}$ in X')

Dann gilt $\forall$ Mengenop. Υ aus Def. 11.5.:

$$\mathcal{A} \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil} \Rightarrow \mathcal{A}' \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil}$$

Beweis:

$$\mathcal{A}' = T^{-1}(\mathcal{A}) \text{ für Einbettung } T: \begin{array}{l} X' \to X \\ x' \mapsto x' \end{array}$$

und Lemma 11.6 (a). ∎

11.8. Korollar Sei Y eine Menge der in Def. 11.5. erklärten Mengenoperationen Υ, sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$.
Dann $\exists$ kleinstes Mengensystem $\mathcal{E}^Y \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit

- $\mathcal{E}^Y$ ist Υ-stabil $\forall\, \Upsilon \in Y$
- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^Y$

Erzeuger ↗ ↖ von $\mathcal{E}$ erzeugtes System (bzgl. Y)

Beweis Lemma 11.6 (b) und

$$\mathcal{E}^Y := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X):\, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}, \\ \mathcal{A} \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil } \forall \Upsilon \in Y}} \mathcal{A}$$

$\boxtimes$

11.9. Definition und Satz (Mengensysteme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$)

Definition: $\mathcal{A}$ ist		enthält $\emptyset$	enthält X	stabil unter $\cup$	$\dot\cup$	$\cap$	$\cup_\infty$	$\dot\cup_\infty$	$\cap_\infty$	$\setminus$	$\setminus_{\supseteq}$	Δ	c
Ring	• $\emptyset \in \mathcal{A}$ • $\setminus$-stabil • $\cup$-stabil	✓		✓	✓	✓				✓	✓	✓	
Algebra	• $X \in \mathcal{A}$ • ^{c}-stabil • $\cup$-stabil	✓	✓	✓	✓	✓				✓	✓	✓	✓
σ-Algebra	• $X \in \mathcal{A}$ • ^{c}-stabil • $\cup_\infty$-stabil	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Dynkin-System	• $X \in \mathcal{A}$ • $\setminus_{\supseteq}$-stabil • $\dot\cup_\infty$-stabil	✓	✓		✓			✓			✓		✓

Beweis: Verwende: $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

$A^c = X \setminus A$, $A \setminus B = A \cap B^c$, ...

11.10. Beispiele: (i) $\mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra

(ii) $\mathcal{A} := \{$endliche Teilmengen von $X\}$ ist Ring

(und (σ-) Algebra $\Leftrightarrow$ X endlich)

(iii) Topologie $\mathcal{T}$ auf X ist i.A. keines der Syst. aus 11.9

(iv) kleinste σ-Algebra, die $A \subseteq X$ enthält:

$$\sigma(A) := \sigma(\{A\}) := \{\emptyset, X, A, A^c\}$$

(v) Sei $\mathcal{I} := \{[a,b[\,:\, a \le b,\ a,b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$

Mengensystem rechtshalboffener Intervalle

$\Rightarrow \mathcal{F} := \left\{\bigcup_{j=1}^{n} A_j \,:\, A_j \in \mathcal{I},\ n \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ endl. Vereinig. davon

ist Ring (Übung!)

11.11 Satz (Alternative Charakterisierungen)

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gilt:

(a) $\mathcal{A}$ ist Ring $\Leftrightarrow$ ($\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist Δ- und $\cap$-stabil)

(b) $\mathcal{A}$ ist Ring $\Leftrightarrow$ ($\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist Δ- und $\cup$-stabil)

(c) $\mathcal{A}$ ist Algebra $\Leftrightarrow$ ($X \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist ^{c}- und $\cap$-stabil)

(d) $\mathcal{A}$ ist Algebra $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{A}$ ist Ring und $X \in \mathcal{A}$)

(e) $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{A}$ ist Dynkin-System und $\cap$-stabil).

Beweis: Übung! Für „$\Leftarrow$" von (e) verwende:

11.12. Lemma Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\dot\cup$-stabil, $\setminus$-stabil und sei $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists B_n \in \mathcal{A}$ mit

(i) $B_n \subseteq A_n$ $\forall n$

(ii) $B_n \cap B_m = \emptyset$, $\forall n \neq m$ (paarw. disj.)

(iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

Beweis: Setze $B_1 := A_1 \in \mathcal{A}$ und definiere induktiv

$$B_{n+1} := A_{n+1} \setminus \left(\dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j \right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

also: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $B_n \subseteq A_n$, und $B_{n+1} \cap B_j = \emptyset$ $\forall j \in \{1,..,n\}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \qquad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \left(\dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j \right) \in \mathcal{A}$$

außerdem $\forall n \in \mathbb{N}$: $\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j = \dot\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j$ ($n=0$: klar)

Bew. mit Ind.: $n=1$: $\underbrace{A_1}_{B_1} \cup A_2 = B_1 \cup \underbrace{(A_2 \setminus B_1)}_{B_2} = B_1 \dot\cup B_2$

$n \to n+1$: gelte $\dot\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j = A_{n+1} \cup \underbrace{\left(\dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j \right)}_{=:Z} = \underbrace{(A_{n+1} \setminus Z)}_{B_{n+1}} \dot\cup Z = \dot\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j \qquad \blacksquare$$

11.13. Definition

(a) Für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ-Algebra, die / $\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ das kleinste Dynkin-System, das $\mathcal{E}$ enthält (Existiert nach Kor. 11.8.).

Erzeuger

(b) Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum

$\sigma(\mathcal{T})$ heißt Borel-σ-Algebra auf X (zu $\mathcal{T}$)

$A \subseteq X$ Borel-Menge $:\Leftrightarrow A \in \sigma(\mathcal{T})$

Speziell für $X = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$: $\mathcal{B}^d := \sigma(\mathcal{T}_{\text{euklidische}})$

σ-Algebra der Borel-Mengen in $\mathbb{R}^d$ $(\mathcal{B} := \mathcal{B}^1)$

11.14. Satz $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{I}^d) = \sigma(\mathcal{F}^d)$, wobei

$$\mathcal{I}^d := \left\{ \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [a_\alpha, b_\alpha[\,:\, a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R} \text{ mit } a_\alpha \leq b_\alpha \ \forall \alpha = 1, \dots, d \right\}$$

$\mathcal{F}^d$: Ring der endl. Vereinigungen d-dim rechtshalb offener Quader $\in \mathcal{I}^d$

Beweis: mittels Lemma 11.16 (unten) $\rightsquigarrow$ Übung! ∎

11.15. Bemerkung

(a) Wo und ob Intervalle in Def. von $\mathcal{I}^d$ offen, ist für die Aussage von Satz 11.14 egal.

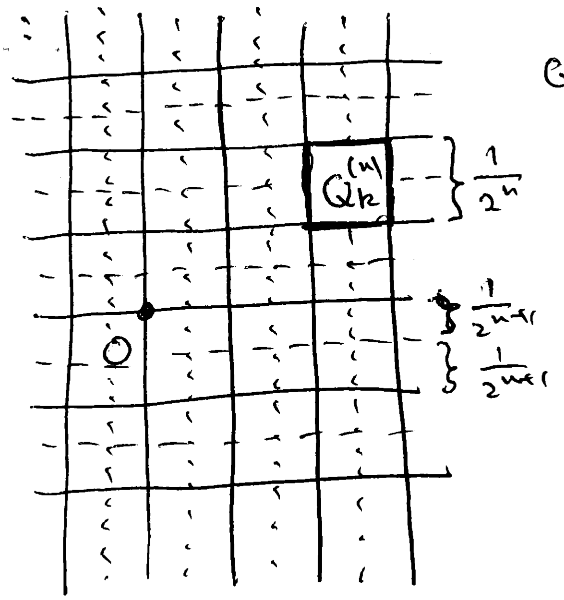
(b) $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\text{abgeschl. Mengen}) = \sigma(\text{Kompakta})$, siehe Üb.

$\uparrow$ X σ-kompakter Hausdorff-Raum. ($X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, K_n kpt.)

11.16. Lemma Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Dann ist U abzählbare Vereinigung abgeschlossener Quader $\bigtimes_{\alpha=1}^{d} [a_\alpha, b_\alpha]$ mit disjunkten Inneren.

Beweis:



n-Gitter im $\mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{N}_0$, mit Quadern $Q_k^{(n)} := \bigtimes_{\alpha=1}^{d} \left[\frac{k_\alpha}{2^n}, \frac{k_\alpha + 1}{2^n}\right]$, $k \in \mathbb{Z}^d$

wird verfeinert durch $(n+1)$-Gitter

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} Q_k^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

disjunktes Inneres.

Setze: $\mathcal{U}_0 := \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d:\\ Q_k^{(0)}\subset\mathcal{U}}} Q_k^{(0)}$; $\mathcal{U}_n := \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d:\, Q_k^{(n)}\subset\mathcal{U}\\ \wedge\, Q_k^{(n)}\not\subseteq \bigcup_{\nu=0}^{n-1}\mathcal{U}_\nu}} Q_k^{(n)}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow \mathcal{U} = \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{U}_n}_{=:\mathcal{U}'}$, denn $\mathcal{U}'\subseteq\mathcal{U}$ klar, und $\forall x\in\mathcal{U}$ gilt (da $\mathcal{U}$ offen): $\exists r>0$: Ball $B_r(x)\subset\mathcal{U}$,

da $|\cdot|_2$ u. $|\cdot|_\infty$-Norm äquiv. auf $\mathbb{R}^d$ $\Rightarrow$ $\exists k_0\in\mathbb{Z}^d$, $n_0\in\mathbb{N}_0$ mit $x\in Q_{k_0}^{(n_0)}\subset B_r(x)\subset\mathcal{U}$

($|\cdot|_p$ als $\|\cdot\|_p$ in Ana 2 notiert)

– also auch $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}'$ ∎

Die Nützlichkeit von Dynkin-Systemen beruht auf:

$\boxed{\text{11.17. Satz}}$ Sei $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ $\cap$-stabil. Dann gilt
$$\sigma(\mathcal{E}) = \mathrm{dyn}(\mathcal{E})$$

Beweis: $\sigma(\mathcal{E})\supseteq\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ klar, da $\sigma(\mathcal{E})\supseteq\mathcal{E}$ selbst Dynkin-System.

Für "$\subseteq$" genügt zu zeigen: $\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ ist $\cap$-stabil

– denn dann $\xRightarrow{\text{Satz 11.11(e)}}$ $\mathrm{dyn}(\mathcal{E})\supseteq\mathcal{E}$ ist σ-Algebra.

Also: Für $X'\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ setze $\mathcal{D}_{X'} := \{A\subseteq X : A\cap X'\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})\}$

Beh: $\mathcal{D}_{X'}$ ist Dynkin-System

Bew.: (i) $X\in\mathcal{D}_{X'}$

(ii) $\mathcal{D}_{X'}$ ist $\setminus_\supseteq$-stabil: Seien $A,B\in\mathcal{D}_{X'}$ mit $A\supseteq B$.

Da nach V. $A\cap X'\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$, $B\cap X'\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ und $B\cap X'\subseteq A\cap X'$, folgt $(A\setminus B)\cap X' = (A\cap X')\setminus(B\cap X')\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$,

d.h. $A\setminus B\in\mathcal{D}_{X'}$

(iii) $\mathcal{D}_{X'}$ ist $\dot{\bigcup}_\infty$-stabil: Sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{D}_{X'}$ paarweise disjunkt. N. Vor. $\{A_n\cap X'\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$

und paarweise disjunkt; damit

$$\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\Big) \cap X' = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} (A_n \cap X') \in dyn(\mathcal{E})$$

– also $\dot{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}} A_n \in \mathcal{D}_{X'}$ $\Rightarrow$ Beh.

Sei $B \in \mathcal{E}$ bel. fix $\overset{\mathcal{E}\ \cap\text{-stabil}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_B$ $\overset{\mathcal{D}_B \text{ Dyn.-sys}}{\Longrightarrow}$ $dyn(\mathcal{E}) \subseteq \underset{\mathcal{D}_B}{\underset{\shortparallel}{dyn(\mathcal{D}_B)}}$

d.h. es gilt: $A \in dyn(\mathcal{E}) \wedge B \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow A \cap B \in dyn(\mathcal{E})$; d.h. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_A$

also: $dyn(\mathcal{E}) \subseteq \underset{\mathcal{D}_A}{\underset{\shortparallel}{dyn(\mathcal{D}_A)}}$ $\forall A \in dyn(\mathcal{E})$

d.h. $A, C \in dyn(\mathcal{E}) \Rightarrow A \cap C \in dyn(\mathcal{E}) \Rightarrow \cap$-stabil ■

$\boxed{\text{11.18. Definition}}$ Seien $A, A_n \subseteq X$ (d.h. $A, A_n \in \mathcal{P}(X)$) $\forall n \in \mathbb{N}$

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folge $:\Leftrightarrow A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

  Notation: $A_n \uparrow A$, wobei $A := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallende Folge $:\Leftrightarrow A_n \supseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

  Notation: $A_n \downarrow A$, wobei $A := \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ monotone Klasse

  $:\Leftrightarrow \forall$ mon $\left\{\begin{matrix}\text{wachsenden}\\ \text{fallenden}\end{matrix}\right\}$ Folgen $(A_n)_n \subseteq \mathcal{M}$ gilt $\left\{\begin{matrix}\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}\\ \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}\end{matrix}\right.$

- Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$: $mon(\mathcal{E})$ ist kleinste monotone Klasse, die $\mathcal{E}$ enthält.

$\boxed{\text{Satz 11.19.}}$ Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra. Dann gilt:

$$mon(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$$

Beweis: Übung.

II.3. Inhalte und Maße

II.20. Definition Sei $\mathcal{R}$ ein Ring von Mengen

- $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ heißt Inhalt $:\Leftrightarrow$

  (i) $\mu(\emptyset) = 0$

  (ii) Additivität: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall j \in \{1,\dots,n\}\ \forall A_j \in \mathcal{R}$ mit $A_j \cap A_k = \emptyset\ \forall j \neq k$ gilt:

$$\mu\Big(\dot\bigcup_{j=1}^{n} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

- μ ist stetiger Inhalt (oder: Prämaß)

  $:\Leftrightarrow$ μ ist Inhalt und es gilt die über (ii) hinausgehende σ-Additivität:

  (iii) $\forall A_j \in \mathcal{R},\ j \in \mathbb{N}$, mit

  - $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$
  - $A_j \cap A_k = \emptyset\ \forall j \neq k$

  gilt: $\mu\Big(\dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j\Big) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$

- Falls $\mathcal{R}$ sogar eine σ-Algebra, und μ ein stetiger Inhalt auf $\mathcal{R}$, so heißt μ Maß (auf $\mathcal{R}$). [In diesem Fall ist Bed. $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$ in (iii) stets erfüllt!]

11.21. Konvention ! !

Abweichend von den bisherigen Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

(siehe Def. 3.5 & Zusatz zu Satz 3.6)

sei nun $\quad 0 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot 0 := 0$

<u>NB</u>: $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ sind weiter nicht definiert!

11.22. Definition

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $m : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abb. Dann heißt m

- <u>endlich</u> $:\Leftrightarrow |m(A)| < \infty \quad \forall A \in \mathcal{A}$
- <u>σ-endlich</u> $:\Leftrightarrow \exists$ Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ mit
  - $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$
  - $|m(X_k)| < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- <u>normiert</u> $:\Leftrightarrow X \in \mathcal{A}$ und $m(X) = 1$
- <u>Wahrscheinlichkeitsmaß</u> $:\Leftrightarrow \mathcal{A}$ ist σ-Algebra und m normiertes Maß

11.23. Beispiele

(a) X abzählbar, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$ [σ-Algebra!]

$$\mu(A) := |A| := \#\{x \in X : x \in A\} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$\rightsquigarrow$ <u>Zählmaß auf X</u>

(Details checken! Üb.).

(b) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra, $x \in X$, und

sei $\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ in x konzentriertes **Dirac-Maß** $\mu =: \delta_x$
W. Maß!
(Einheitsmasse in x)

(c) Sei $\mathcal{F}$ der Ring der endl. Vereinigungen rechtshalboffener Intervalle $[a,b[$ in $\mathbb{R}$ (vgl. Bsp. 11.10(v) und Satz 11.14). Sei $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ isoton u. linksseitig stetig. Die Zuordnung $[a,b[\;\mapsto G(b) - G(a)$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ induziert (Übung!) stetigen Inhalt μ_G auf Ring $\mathcal{F}$.

Speziell $\lambda := \mu_{id}$ heißt (1-dim.) **Lebesgue-Prämaß** (d.h. $\lambda([a,b[) = b-a$).

$\boxed{11.24.\ \text{Satz}}$ Sei μ Inhalt auf Ring $\mathcal{R}$, $A, B \in \mathcal{R}$ und $(A_n)_n \subseteq \mathcal{R}$. Dann gilt:

(a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

(b) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ **Monotonie**

(c) $A \subseteq B \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$
Subtraktivität

(d) $\forall n \in \mathbb{N}: \quad \mu\left(\bigcup_{j=1}^n A_j\right) \leq \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$ **Sub-Additivität**

(e) Falls $A_n \cap A_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$

$\Rightarrow \mu\left(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ **Super-σ-Additivität**

<u>Beweis</u>: (b), (c) aus $B = (B\setminus A) \dot\cup A \Rightarrow \mu(B) = \mu(B\setminus A) + \mu(A)$

(a) $A \cup B = A \dot\cup (B\setminus A) \Rightarrow \mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B\setminus A)$
$B = (A\cap B) \dot\cup (B\setminus A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A\cap B) + \mu(B\setminus A)$ $\Big\} \Rightarrow$ Beh.,

durch Auflösen 2. Glg. nach $\mu(B\setminus A)$, <u>falls</u> $\mu(A\cap B) < \infty$.
Falls $\mu(A\cap B) = \infty$ ($\Rightarrow \mu(A) = \infty$) ist Beh. trivial.

(d) Lemma 11.12. $\Rightarrow \exists B_1, .., B_n \in \mathcal{R}$, paarw. disjunkt mit

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \dot{\bigcup_{j=1}^n} B_j \quad \text{und} \quad B_j \subseteq A_j \quad \forall j \in \{1, .., n\}$$

(siehe Bew. von Lemma 11.12)

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{j=1}^n A_j\Big) = \mu\Big(\dot{\bigcup_{j=1}^n} B_j\Big) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\mu(B_j)}_{\overset{(b)}{\leq} \mu(A_j)} \quad ✓$$

(e) Sei $A := \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n$ ($\in \mathcal{R}$ n.V.); $\forall N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^N \mu(A_n) = \mu\Big(\underbrace{\dot{\bigcup_{n=1}^N} A_n}_{\subseteq A}\Big) \overset{(b)}{\leq} \mu(A)$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \leq \mu(A) \quad ✓$$

existiert in $[0,\infty]$ ∎

Charakterisierung der Stetigkeit von Inhalten:

11.25. Satz Sei $\mathcal{R}$ Ring, μ Inhalt auf $\mathcal{R}$. Definiere folgende Eigenschaften:

(i) μ ist stetiger Inhalt.

(ii) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) \quad (\text{Stetigkeit von unten})$$

(iii) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow A \in \mathcal{R}$

und $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) \qquad \text{(Stetigkeit von oben)}$$

(iv) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$

und $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0 \qquad \text{(Stetig in } \emptyset\text{)}$$

(v) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow A \in \mathcal{R}$ und

$\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N} : \mu(A_n) \geq \varepsilon$

gilt: $\qquad A \neq \emptyset$

Dann bestehen die Implikationen

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$$

Ist μ endlich, so gilt auch (iii) $\Rightarrow$ (ii).

11.26. Bemerkung

Die Bed. „$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{n_0}) < \infty$" in (iii) – (v) ist wesentlich:

Betrachte Zählmaß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ [Bsp. 11.23(a)]

und $A_n := \{n, n+1, \dots\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; $A_n \supseteq A_{n+1}$.

Somit $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, aber $\mu(A_n) = \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis von Satz 11.25.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$. Gemäß Lemma 11.12

$\left(A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$ $\exists (B_n)_n \subseteq \mathcal{R}$, $B_n \cap B_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$ mit

$$A_n = \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} B_j \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad A = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n$$

n. V. gilt $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)}_{\mu(A_n)}$ μ Inhalt ✓

$\underline{(ii) \Rightarrow (i)}$: Sei $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ Folge paarweise disjunkter Mengen mit $B := \dot{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}} B_j \in \mathcal{R}$. Setze $A_n := \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{R}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow A_n \nearrow B \in \mathcal{R} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \mu(B) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{\overset{\mu \text{ Inhalt}}{=} \sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)} = \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j)$

- also ist μ σ-additiv ✓

$\underline{(ii) \Rightarrow (iii)}$: Sei $A_n \searrow A \in \mathcal{R}$ mit o. E. $\mu(A_1) < \infty$

$\overset{\text{Satz 11.24(c)}}{\underset{A_n \subseteq A_1}{\Rightarrow}}$ $\forall n \in \mathbb{N}$: $\mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$

n. V. gilt $(A_1 \setminus A_n) \nearrow (A_1 \setminus A) \in \mathcal{R}$

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_1 \setminus A_n)}_{\mu(A_1) - \mu(A_n)} = \underbrace{\mu(A_1 \setminus A)}_{\mu(A_1) - \mu(A)}$ Satz 11.24(c) $\Rightarrow$ Beh. ✓ (benötigt $\mu(A_1) < \infty$.)

$\underline{(iii) \Leftrightarrow (iv)}$: "$\Rightarrow$" klar; "$\Leftarrow$" aus: $A_n \setminus A \in \mathcal{R}$
$\Rightarrow \underbrace{(A_n \setminus A)}_{\in \mathcal{R}} \searrow \emptyset$ ✓

$\underline{(iii) \Rightarrow (v)}$: Sei $A_n \searrow A \in \mathcal{R}$ und $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\mu(A_n) \geq \varepsilon$ $\forall n$

$\Rightarrow \mu(A) \overset{(iii)}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{\geq \varepsilon \text{ n. V. } \forall n} \geq \varepsilon > 0$

$\overset{\text{Def. 11.20(i)}}{\Rightarrow} A \neq \emptyset$

$\underline{(v) \Rightarrow (iv)}$: Sei $A_n \searrow \emptyset \in \mathcal{R}$, $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$

Ann.: $\mu(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ $\underline{\underline{\text{falsch}}}$.

Dann $\exists \varepsilon > 0 : \mu(A_n) \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$ (NB: $\mu(A_n)$ fallend!).

$$\overset{(v)}{\Longrightarrow} \quad A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset \quad \text{↯}.$$

Sei nun zusätzlich μ endlich! Dann:

(iv) => (ii): Sei $A_n \nearrow A \in \mathcal{R} \Rightarrow (A \setminus A_n) \downarrow \emptyset$

$$\underset{\& \text{ (iv)}}{\overset{\mu \text{ endlich}}{\Longrightarrow}} \quad 0 = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\mu(A \setminus A_n)}_{\mu(A) - \mu(A_n)} \quad \underset{\text{Satz 11.24(c)}}{\overset{\mu \text{ endlich}}{\Longrightarrow}} \quad \text{Beh.} \qquad \blacksquare$$

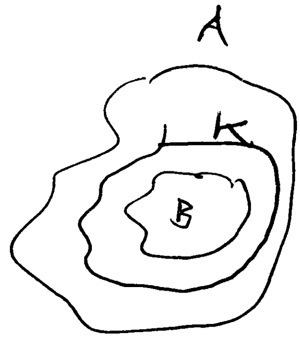
Satz 11.25 liefert handliches Stetigkeitskrit. für Anwendungen:

$\boxed{\text{11.27. Satz}}$ (Approximation mit Kompakta).

Sei X Hausdorff-Raum und μ endlicher Inhalt auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Falls: $\forall A \in \mathcal{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \subseteq X$ kompakt und $B \in \mathcal{R}$ mit

$$B \subseteq K \subseteq A \quad \text{und} \quad \mu(A \setminus B) < \varepsilon$$

dann ist μ stetiger Inhalt.



Beweis: Wir verifizieren Kriterium (v) in Satz 11.25.

Sei $A_n \downarrow A \in \mathcal{R}$ mit $\mu(A_n) \geq \varepsilon \ \forall n$ für ein $\varepsilon > 0$.

n.V. existiert zu jedem A_n ein $K_n \subseteq X$ kompakt und $B_n \in \mathcal{R}$ mit $B_n \subseteq K_n \subseteq A_n$ und $\mu(A_n \setminus B_n) < 2^{-(n+1)} \varepsilon$

Es gilt $B_n = A_n \setminus (A_n \setminus B_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\forall N \in \mathbb{N}: \bigcap_{n=1}^{N} B_n = \left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} (A_n \setminus B_n)\right)$$

$\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{N} B_n\Big) \geq \mu\Big(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{N} A_n}_{A_N}\Big) - \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{N} (A_n \setminus B_n)}_{\leq \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\mu(A_n \setminus B_n)}_{< \varepsilon 2^{-(n+1)}} < \frac{\varepsilon}{2}}\Big)$$

Subtraktivität, Monotonie (11.24(e), (b)) — Subadd. 11.24(d) — geom. Reihe

$$\underset{\text{n.V.}}{\geq} \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{N} B_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{N} K_n \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Mit endl. Durchschnittseigenschaft kpt'er Mengen $\overset{\text{Übung!}}{\Longrightarrow}$

$$\emptyset \neq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{K_n}_{\subseteq A_n} \subseteq A \text{ , d.h. Krit. (v) ist erfüllt } \blacksquare$$

$\boxed{\text{11.28 Satz}}$ (Eindeutigkeitssatz für Maß)

Sei $\mathcal{E}$ $\cap$-stabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\exists (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ mit $X_n \nearrow X$. Seien μ_1, μ_2 Maße auf $\mathcal{A}$ mit

(1) $\mu_1(A) = \mu_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{E}$

(2) $\mu_1(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $\mu_1 = \mu_2$, d.h. $\mu_1(A) = \mu_2(A) \quad \forall A \in \underline{\underline{\mathcal{A}}}$.

Beweis. Sei $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$ (Gibt es n.V.)

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}: \mu_1(A \cap E) < \infty$ & $\mu_2(A \cap E) < \infty$

Setze $\mathcal{D}_E := \{A \in \mathcal{A} : \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)\}$ ($\neq \emptyset$ da $E \in \mathcal{D}_E$!),

Beh: $\mathcal{D}_E$ ist Dynkin-System

Bew:
- $X \in \mathcal{D}_E$ klar
- $\setminus_{\supseteq}$-stabil: Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{D}_E$ mit $A_2 \subseteq A_1$

$\Rightarrow E \cap (A_1 \setminus_{\supseteq} A_2) = (E \cap A_1) \setminus_{\supseteq} (E \cap A_2)$

$\Rightarrow \mu_1(E \cap (A_1 \setminus A_2)) \underset{\text{Subtraktivität 11.24.(c)}}{=} \mu_1(E \cap A_1) - \mu_1(E \cap A_2)$

$\overset{A_1, A_2 \in \mathcal{D}_E}{=} \mu_2(E \cap A_1) - \mu_2(E \cap A_2) \overset{!}{=} \mu_2(E \cap (A_1 \setminus A_2))$ ✓

- $\dot{\cup}_\infty$-stabil: Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{D}_E$ paarweise disjunkt

$\Rightarrow E \cap (\dot{\bigcup_n} A_n) = \dot{\bigcup_n} (E \cap A_n)$

$\Rightarrow \mu_1(E \cap (\dot{\bigcup_n} A_n)) \overset{\mu_1 \text{ Maß}}{=} \sum_n \underbrace{\mu_1(E \cap A_n)}_{= \mu_2(E \cap A_n)} \overset{\mu_2 \text{ Maß}}{\underset{A_n \in \mathcal{D}_E}{=}} \mu_2(E \cap (\dot{\bigcup_n} A_n))$ ✓

$\Rightarrow$ Beh. $\Rightarrow \mathcal{D}_E \underset{\mathcal{D}_E \text{ enthält } \mathcal{E}}{\supseteq} dyn(\mathcal{E}) \underset{\substack{\text{Satz 11.17} \\ (\mathcal{E}\ \cap\text{-stabil!})}}{=} \sigma(\mathcal{E}) \underset{\text{n.V.}}{=} \mathcal{A}$

- also: (*) $\mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E) \quad \forall A \in \mathcal{A} \ \forall E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) < \infty$

Die Wahl $E = X_n, n \in \mathbb{N}$, ist n.V. erlaubt und, da $(A \cap X_n) \uparrow A$

$\xrightarrow[\text{unten, Satz 11.25}]{\text{Stetigkeit von}} \mu_1(A) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu_1(A \cap X_n)}_{= \mu_2(A \cap X_n)} \overset{(*)}{=} \mu_2(A) \quad \forall \mathcal{A}$ ∎

11.4. Fortsetzungssatz von Carathéodory

Ziel: setze stetigen Inhalt auf Ring fort zu einem Maß auf σ-Algebra (Eindeutigkeit: Satz 11.28)

Dazu Hilfsgröße:

11.29. Definition $m : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ist äußeres Maß (auf X)

$$:\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ m(\emptyset)=0 \\ (2)\ A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow m(A) \le m(B) \quad \text{(Monotonie)} \\ (3)\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \quad \text{(sub-σ-Additivität)} \end{cases}$$

11.30. Lemma Sei μ Inhalt auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\forall A \subseteq X$ setze $\mathcal{U}(A) := \{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R} : A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\}$

„Umgebungssystem von A aus abz.baren Überdeckungen in $\mathcal{R}$"

Dann ist $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$,

$$A \mapsto \mu^*(A) := \begin{cases} \inf\limits_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(A)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n), & \text{falls } \mathcal{U}(A) \ne \emptyset \\ +\infty, & \text{falls } \mathcal{U}(A) = \emptyset \end{cases}$$

ein äußeres Maß (das von μ induzierte äußere Maß)

Beweis: (1) $(\emptyset, \emptyset, \dots) \in \mathcal{U}(\emptyset)$, $\emptyset \in \mathcal{R}$ & $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{U}(B) \subseteq \mathcal{U}(A)$

(3) Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit o.E. $\mu^*(A_n) < \infty \ \forall n$ (andernfalls ist Beh. klar: $\infty \le \infty$)

Also $\mathcal{U}(A_n) \ne \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists (B_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A_n):$

$$(1) \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k^{(n)}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \qquad (\underline{\text{Def.}}\ \inf.)$$

Zudem gilt $(B_k^{(n)})_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}}} \subseteq \mathcal{U}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$

$$\Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{k,n\in\mathbb{N}} \mu(B_k^{(n)}) \overset{\text{Umordnen, (1)}}{\leq} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}}_{=1}$$

Da $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow$ Beh. ∎

$\boxed{\text{11.31. Definition}}$ Sei μ^* äußeres Maß auf X. Setze

$$\mathcal{A}^* := \{A \subseteq X : \mu^*(Q) \geq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A) \quad \forall Q \subseteq X\}$$

$\leftarrow$ stets nach Def. 11.29(3) sub-σ-Add. $\leq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A)$

$$= \{A \subseteq X : \mu^*(Q) = \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A) \quad \forall Q \subseteq X\}$$

System der μ^*-messbaren Mengen in X.

$\boxed{\text{11.32. Satz}}$ (Carathéodory, 1914)

Sei μ^* äußeres Maß auf X

(1) Dann ist $\mathcal{A}^*$ eine σ-Algebra in X und die Restriktion $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ ist ein Maß

(2) Sei zusätzlich μ^* induziert von stetigen Inhalt μ auf Ring $\mathcal{R}$. Dann gilt

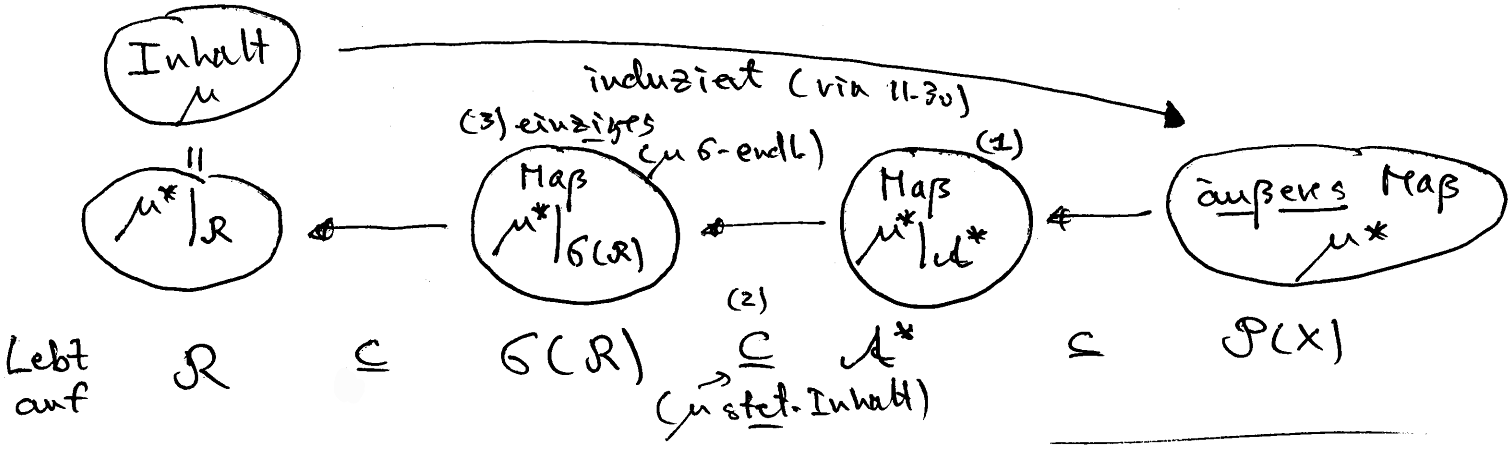
$$\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}^* \quad \text{und} \quad \mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$$

(3) Ist zusätzlich zu (2) μ noch σ-endlich auf $\mathcal{R}$, dann ist $\nu := \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ das einzige Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\nu|_{\mathcal{R}} = \mu$.

11.33. Bemerkung

(2) besagt, dass $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ Fortsetzung von μ auf $\sigma(\mathcal{R})$

(3) besagt, dass μ eindeutig fortsetzbar von $\mathcal{R}$ auf $\sigma(\mathcal{R})$



Constantin Carathéodory (13.9.1873 – 2.2.1950)

- Ingenieur → Bau von Staudämmen am Nil
- ab 1900 Studium Math. in Berlin
  (H.A. Schwarz, G. Frobenius, M. Planck).
- ab 1913 Nachfolger von Felix Klein in Göttingen
- 1918 Berlin
- 1920–22 Gründungsrektor in Smyrna (= Izmir)
- 1924–1950: LMU München
  (Nachfolger von F. Lindemann)

Hauptarbeitsgebiete: Variationsrechnung
Funkt.theorie
Maß- u. Integr.theorie

erhebliche Vereinfachung des Beweises des Riemannschen Abb.satzes.

Beweis von Satz 11.32

zu (1): $\boxed{(i)}$ $\mathcal{A}^*$ σ-Algebra $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^*$ $\cap$-stab. Dynkin-Syst. (Satz 11.11.(e))

Dazu Hilfsbeh.: $\mathcal{A}^*$ ist Algebra

- $X \in \mathcal{A}^*$ klar per def.
- c-stabil: da $Q \cap A = Q \setminus A^c$ und $Q \setminus A = Q \cap A^c$ (a)

  $\Rightarrow$ $(A \in \mathcal{A}^* \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{A}^*)$, also $\mathcal{A}^*$ c-stabil
- $\cup$-stabil: Seien $A, B \in \mathcal{A}^*$ $\Rightarrow$

$$\mu^*(\tilde{Q}) = \mu^*(\tilde{Q} \cap B) + \mu^*(\tilde{Q} \setminus B) \quad \forall \tilde{Q} \in \mathcal{P}(X) \qquad (b)$$

und, $\forall Q \in \mathcal{P}(X)$,

$$\mu^*(Q) = \underbrace{\mu^*(Q \cap A)}_{\substack{(b) \text{ mit } \tilde{Q} = Q \cap A \\ \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*((Q \cap A) \setminus B)}} + \underbrace{\mu^*(Q \setminus A)}_{\substack{(b) \text{ mit } \tilde{Q} = Q \setminus A \\ \mu^*((Q \setminus A) \cap B) + \mu^*((Q \setminus A) \setminus B)}}$$

$$\overset{(a)}{=} \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B^c) \quad (c)$$

Nun, (c) mit $Q \longrightarrow Q \cap (A \cup B)$:

$$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) = \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) \qquad (d)$$

(d) in (c)

$$\Rightarrow \quad \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*\big(\underbrace{Q \cap (A \cup B)^c}_{Q \setminus (A \cup B)}\big)_{(a)} \quad \checkmark$$

Beh: $\mathcal{A}^*$ ist $\cap$-stabiles Dynkin-System.

- $\cap$-, $\setminus_{\supseteq}$-stabil klar, da $\mathcal{A}^*$ Algebra (wie gezeigt) [siehe Def/Satz 11.9]
- $\dot{\bigcup}_\infty$-stabil: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$ paarw. disjunkt; sei $A := \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n$

(d) mit $A \to A_1$, $B \to A_2$:

$$\Rightarrow \mu^*(Q \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_2)$$

Induktion
$$\Rightarrow \mu^*\Big(Q\cap\big(\underbrace{\dot{\bigcup_{j=1}^n} A_j}_{=:B_n\in\mathcal{A}^*\ (\text{Algebra!})}\big)\Big) = \sum_{j=1}^n \mu^*(Q\cap A_j) \quad \forall n\in\mathbb{N}\ \forall Q\in\mathcal{P}(X)$$

$$\Rightarrow \mu^*(Q) = \mu^*(Q\cap B_n) + \mu^*(\underbrace{Q\setminus B_n}_{\supseteq Q\setminus A})$$

Monotonie 11.29(2)
$$\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(Q\cap A_j) + \mu^*(Q\setminus A) \quad \forall n\in\mathbb{N}.\ \forall Q\in\mathcal{P}(X)$$

$$\overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \mu^*(Q) \geq \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(Q\cap A_n)}_{\geq \mu^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(Q\cap A_n)\right)} + \mu^*(Q\setminus A) \qquad (e)$$

Sub-σ-Add 11.29(3)

also $\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A) \quad \forall Q\in\mathcal{P}(X) \qquad (f)$

$\Rightarrow A\in\mathcal{A}^*$ ✓

$\boxed{(ii)}$ μ^* ist Maß auf $\mathcal{A}^*$

- $\mu^*|_{\mathcal{A}^*} \geq 0$ und $\mu^*(\emptyset)=0$ klar, da μ^* äußeres Maß
- σ-Additiv: Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{A}^*$ paarw. disj., $A := \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n$

$\forall Q\subseteq X$
$$\Rightarrow \mu^*(Q) \overset{(e)}{\geq} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(Q\cap A_n) + \mu^*(Q\setminus A) \geq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A)$$
$$= \mu^*(Q) \quad (\text{da } A\in\mathcal{A}^*)$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(Q\cap A_n) + \mu^*(Q\setminus A) = \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A)$$

wähle $Q = A \Rightarrow$ Beh. ✓

<u>zu (2):</u> $\boxed{(i)}$ Zeige $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{A}^*$ ($\Rightarrow \sigma(\mathcal{R})\subseteq\mathcal{A}^*$, da $\mathcal{A}^*$ σ-Algebra)

Sei <u>$A\in\mathcal{R}$</u>, $Q\in\mathcal{P}(X)$ bel.; o.E. sei $\mu^*(Q) < \infty$

(sonst ist Bed. in Def. 11.31 eh erfüllt!)

- also $\mathcal{U}(Q)\neq\emptyset$, sei $\underset{\mathcal{R}}{\underset{\cap}{(A_n)_n}} \subseteq \mathcal{U}(Q)$ bel.

$\Rightarrow A_n \cap A \in \mathcal{R}$ und $A_n \setminus A \in \mathcal{R}$ disjunkt $\underset{\mu \text{ add.}}{\overset{\text{Inhalt}}{\Longrightarrow}}$ $\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A) \ \forall n$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \setminus A)$$

Da $(A_n \cap A)_n \in \mathcal{U}(Q \cap A)$ und $(A_n \setminus A)_n \in \mathcal{U}(Q \setminus A)$

$$\Rightarrow \mu^*(Q) = \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \geq \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)} \sum_n \mu(A_n \cap A) + \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)} \sum_n \mu(A_n \setminus A)$$

$$\geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$$

$\Rightarrow \underline{A \in \mathcal{A}^*}$ ✓

$\boxed{(ii)}$ $\mu(A) = \mu^*(A) \ \forall A \in \mathcal{R}$

$A \in \mathcal{R} \Rightarrow (A, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots) \in \mathcal{U}(A) \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu(A)$ (g)

Sei nun $(A_n)_n \in \mathcal{U}(A)$, d.h. $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underset{\mathcal{R}}{\underset{\Uparrow}{A_n}} \Rightarrow \left(\bigcup_{j=1}^n (A_j \cap A)\right) \uparrow A$

Stetigkeit von unten $\underset{\text{Satz 11.25(ii)}}{\Longrightarrow}$ $\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{j=1}^n (A_j \cap A)\right) \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^n (A_j \cap A)\right) \underset{\text{11.24(d)}}{\overset{\text{Subadd.}}{\leq}} \sum_{j=1}^n \mu(A_j \cap A), \qquad \mu(A_j \cap A) \underset{\text{11.24(b)}}{\overset{\text{Monotonie}}{\leq}} \mu(A_j)$$

$$\Rightarrow \mu(A) \leq \inf_{(A_n)_n \subseteq \mathcal{U}(A)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu^*(A) \quad (h)$$

(g) $\wedge$ (h) $\Rightarrow$ Beh. ✓

<u>zu (3)</u>: Aus Eindeutigkeitssatz 11.28, denn:

- $\mathcal{R}$ $\cap$-stabiler Erzeuger von $\sigma(\mathcal{R})$
- μ σ-endlich auf $\mathcal{R}$

∎

11.34. Definition Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra, μ Maß auf $\mathcal{A}$.

- $(X, \mathcal{A})$ Messraum (messbarer Raum)

  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum

  falls $\mu(X) = 1$: Wahrscheinlichkeitsraum
- $A \subseteq X$ messbar $:\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$
- $A \subseteq X$ (μ-)Nullmenge $:\Leftrightarrow A$ messbar und $\mu(A) = 0$
- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ [oder nur: μ] vollständig $:\Leftrightarrow$

$\forall$ Nullmengen $N \subseteq X$ $\forall A \subseteq N$: $A \in \mathcal{A}$ $(\Rightarrow \mu(A) = 0)$

„Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen"

11.35. Satz Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann $\exists$ kleinster vollständiger Maßraum $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$, die Vervollständigung von $(X, \mathcal{A}, \mu)$, mit $\bar{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$, $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ und $\bar{\mu}$ vollständig; d.h. $\forall (X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ vollständig mit $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$, $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ gilt $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \bar{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mu}|_{\bar{\mathcal{A}}} = \bar{\mu}$.

Beweis Folgt aus Üb.aufgabe 3.4 (Üb.blatt 3, Auf. 4)

11.36. Satz Sei μ^* äußeres Maß auf X und $\mathcal{A}^*$ das System der μ^*-messbaren Mengen. Dann gilt

(a) $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*|_{\mathcal{A}^*})$ ist vollständig

(b) Sei zudem μ^* induziert von stetigen, σ-endlichen Inhalt μ auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Dann gilt

$$\overline{(X, \sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})})} = \underbrace{(X, \mathcal{A}^*, \mu^*|_{\mathcal{A}^*})}$$

Carathéodory-Erweiterung von $(X, \sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})})$

Beweis: (a) Tut.aufgabe 2.4(i) (Tut-blatt 2, Aufg. 4(i)).
(b) Übung.

Für die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich ist:

II.37. Satz Sei $\mathcal{A}_0$ eine Algebra und μ ein endliches Maß auf $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{A}_0)$. Dann gilt:
$\forall A \in \mathcal{A}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}_0$, paarweise disjunkt, so daß

$$\mu\Big(A \,\Delta \Big(\dot{\bigcup_{n=1}^{N}} A_n\Big)\Big) < \varepsilon$$

Beweis: Siehe z.B. Bauer, Satz 5.7. $\boxtimes$

11.5. Lebesgue-(Borel-) Maß

Sei $d \in \mathbb{N}$.

11.38. Satz $\exists!$ Maß auf $\mathcal{B}^d$, das Lebesgue-Borel-Maß λ^d, so dass $\forall$ Quader $Q := \mathop{\times}\limits_{\alpha=1}^{d} [a_\alpha, b_\alpha[\in \mathcal{I}^d$, $-\infty < a_\alpha \le b_\alpha < \infty$ $\forall \alpha = 1,\dots,d$, gilt

$$\lambda^d(Q) = \prod_{\alpha=1}^{d} (b_\alpha - a_\alpha) \qquad (*)$$

Notation: $\lambda := \lambda^1$

Beweis: Hier nur $d=1$; $d \ge 2$ später (Kap. 14.2).

Üb. 3.2 $\Rightarrow$ $\exists!$ endlicher Inhalt μ auf $\mathcal{F}$ mit
$\mu([a,b[) = b-a$ $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a \le b$.

Üb. 3.3 $\Rightarrow$ μ stetig $\underset{\text{Satz 11.32}}{\Longrightarrow}$ $\exists!$ Maß λ auf $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$ mit $\lambda|_{\mathcal{F}} = \mu$ ∎

(In Üb.: wähle $G = \mathrm{id}$)

11.39 Definition Die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$ ist $(\mathbb{R}^d, \overline{\mathcal{B}^d}, \overline{\lambda^d})$

$\overline{\mathcal{B}^d}$: Lebesgue-messbare Mengen im $\mathbb{R}^d$

$\overline{\lambda^d}$: d-dim. Lebesgue-Maß

Üb. 3.4: $\overline{\mathcal{B}^d} = \left\{ B \cup \tilde{N} \subseteq \mathbb{R}^d : B \in \mathcal{B}^d, \exists N \in \mathcal{B}^d \text{ mit } \lambda^d(N) = 0 \text{ und } \tilde{N} \subseteq N \right\}$

11.40 Lemma Sei $B \in \mathcal{B}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$

$\Rightarrow$ $x + B := \{ x + b \in \mathbb{R}^d : b \in B \} \in \mathcal{B}^d$

Beweis:
- $Q \in \mathcal{I}^d \Rightarrow x + Q \in \mathcal{I}^d$
- $\mathcal{A}_x := \{ B \in \mathcal{B}^d : x + B \in \mathcal{B}^d \}$ ist σ-Algebra (check!)
- $\mathcal{I}^d \subseteq \mathcal{A}_x$
- $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{I}^d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_x) = \mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{B}^d$ ∎

11.41. Satz Sei μ Maß auf $\mathcal{B}^d$. Dann sind äquivalent:

(i) $\mu = \lambda^d$

(ii) μ ist translationsinvariant, d.h. $\mu(B) = \mu(x+B)$ $\forall B \in \mathcal{B}^d$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$

und normiert, d.h. $\mu([0,1[^d) = 1$ $\left([0,1[^d = \bigtimes_{\alpha=1}^d [0,1[\right)$

(Satz gilt analog mit $\overline{\mathcal{B}^d}$ und $\overline{\lambda^d}$)

Beweis: Bem.: "$\mu(x+B)$" macht Sinn wegen Lemma 11.40.

"(i) ⇒ (ii)": Für $x \in \mathbb{R}^d$ fix, sei $\nu(B) := \lambda^d(x+B)$

$\Rightarrow \nu$ ist Maß auf $\mathcal{B}^d$ mit $\nu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^d [a_\alpha, b_\alpha[\right) = \prod_{\alpha=1}^d \underbrace{(b_\alpha + x_\alpha - a_\alpha - x_\alpha)}_{b_\alpha - a_\alpha}$

$\overset{\text{Satz 11.38}}{\Rightarrow} \nu = \lambda^d$, also: λ^d ist transl. inv.

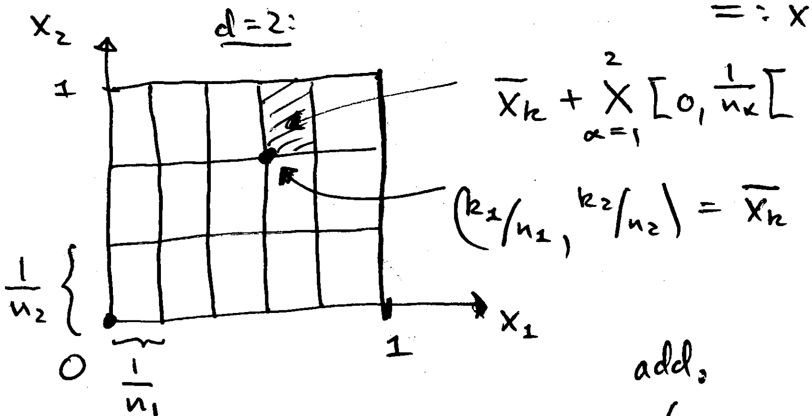
Normierung von λ^d klar. ✓

"(ii) ⇒ (i)":

1. Schritt: $\mu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^d [0, \tfrac{1}{n_\alpha}[\right) = \prod_{\alpha=1}^d \frac{1}{n_\alpha}$ $\forall n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$

denn $[0,1[^d = \dot{\bigcup}_{\substack{k_\alpha \in \{0,\dots,n_\alpha - 1\} \\ \alpha = 1,\dots,d}} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} k_1/n_1 \\ \vdots \\ k_d/n_d \end{pmatrix}}_{=: \bar{x}_k \in \mathbb{R}^d} + \bigtimes_{\alpha=1}^d [0, \tfrac{1}{n_\alpha}[\right)$

d=2:



$\Rightarrow 1 \overset{\text{Normierung}}{=} \mu([0,1[^d) \overset{\text{add.}}{=} \sum_{\substack{k_\alpha \in \{0,\dots,n_\alpha - 1\} \\ \alpha = 1,\dots,d}} \mu\left(\bar{x}_k + \bigtimes_{\alpha=1}^d [0, \tfrac{1}{n_\alpha}[\right)$

$\overset{\text{transl. inv.}}{=} \left(\prod_{\alpha=1}^d n_\alpha\right) \mu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^d [0, \tfrac{1}{n_\alpha}[\right)$ ✓

2. Schritt: $\mu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, q_\alpha[\right) = \prod_{\alpha=1}^{d} q_\alpha \quad \forall (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{Q}^d_{\geq 0}$

denn $q_\alpha = \frac{p_\alpha \in \mathbb{N}_0}{n_\alpha \in \mathbb{N}} \Rightarrow$ Beh. mittels Zerlegung und Transl.inv. von μ wie im 1. Schritt. ✓

3. Schritt: $\mu\Big(\underbrace{\bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, b_\alpha[}_{=:Q}\Big) = \prod_{\alpha=1}^{d} b_\alpha \quad \forall (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$

denn, $\forall \alpha = 1, \dots, d \ \exists (q_\alpha^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}_{\geq 0}: \ q_\alpha^{(n)} \nearrow b_\alpha \Rightarrow$

$Q^{(n)} := \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, q_\alpha^{(n)}[\ \nearrow Q \Rightarrow$ (Stetigkeit von unten)

$$\mu(Q) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(Q^{(n)})}_{\prod_{\alpha=1}^{d} q_\alpha^{(n)}} = \prod_{\alpha=1}^{d} b_\alpha \quad ✓$$

2. Schritt

4. Schritt: $\mu\Big(\underbrace{\bigtimes_{\alpha=1}^{d} [a_\alpha, b_\alpha[}_{=:Q}\Big) = \prod_{\alpha=1}^{d} (b_\alpha - a_\alpha) \quad \forall a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}, \ a_\alpha \leq b_\alpha, \ \alpha = 1, \dots, d$

folgt aus $Q = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} + \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, b_\alpha - a_\alpha[$, Transl.inv. & 3. Schritt. ☒

4. Schritt und Satz 11.38 $\Rightarrow$ Beh.

Eine weitere Charakterisierung Lebesgue-messbarer Mengen und eine Approximationseigenschaft des Lebesgue-Maßes:

11.42 Satz Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann sind äquivalent:

(i) $A \in \overline{\mathcal{B}^d}$ (Lebesgue-messbar)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\exists C \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, so dass

- $C \subseteq A \subseteq \mathcal{U}$
- $\lambda^d(\mathcal{U} \setminus C) < \varepsilon$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Regularität von λ^d

Warnung: Aus (ii) folgt i.A. nicht, dass $A \in \mathcal{B}^d$!

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Sei $\varepsilon > 0$, $A \in \overline{\mathcal{B}^d}$.

(a) Angenommen $\overline{\lambda^d}(A) < \infty$.

Da $\overline{\lambda^d}(A) = (\lambda^d)^*(A) = \inf\limits_{\substack{(F_n)_n \subseteq \mathcal{F}^d: \\ A \subseteq \bigcup_n F_n}} \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(F_n)$

zugeh. äußeres Maß zu $\lambda^d|_{\mathcal{F}^d}$ gemäß Lemma 11.30 und Satz 11.35(b)

folgt: $\exists (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}^d$ mit $A \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ und

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(I_n) < \overline{\lambda^d}(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Zu I_n existiert $J_n \in \mathcal{I}^d$ mit $I_n \subseteq \mathring{J}_n$ und $\lambda^d(\mathring{J}_n) \leq \lambda^d(I^n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

(Verwende: $\mathring{J}_n \in \mathcal{B}^d$ und Stetigkeit von λ^d)

Setze $\mathcal{U} := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathring{J}_n$; dann ist $\mathcal{U}$ offen und $\mathcal{U} \supseteq A$, und

$$\overline{\lambda^d}(U \setminus A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Subtraktivität } (\overline{\lambda^d}(A) < \infty)}}{=} \lambda^d(U) - \overline{\lambda^d}(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(\mathring{J}_n) - \overline{\lambda^d}(A) < \varepsilon \quad (1)$$

(b) $A \in \overline{\mathcal{B}^d}$ $(\varepsilon > 0)$ bel.: Sei $n \in \mathbb{N}$, also $\overline{\lambda^d}(\underbrace{A \cap [-n,n]^d}_{\in \overline{\mathcal{B}^d}}) < \infty$

Nach (a) $\exists \mathcal{U}_n \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit

$\mathcal{U}_n \supseteq A \cap [-n,n]^d$ und $\overline{\lambda^d}(U_n \setminus (A \cap [-n,n]^d)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{U} := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ offen und $\mathcal{U} \supseteq A$, und

$$\overline{\lambda^d}(\mathcal{U} \setminus A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{\lambda^d}(\underbrace{\mathcal{U}_n \setminus A}_{\subseteq \mathcal{U}_n \setminus (A \cap [-n,n]^d)}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \quad (2)$$

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Nach (b) $\exists V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $V \supseteq A^c$

und $\overline{\lambda^d}(V \setminus A^c) < \varepsilon$ (da $A \in \overline{\mathcal{B}^d} \Rightarrow A^c \in \overline{\mathcal{B}^d}$)

Sei $C := V^c$ $\Rightarrow$ C abgeschl., $C \subseteq A$ und

$$\overline{\lambda^d}(A \setminus C) = \overline{\lambda^d}(A \cap V) = \overline{\lambda^d}(V \setminus A^c) < \varepsilon \quad (3)$$

Aus (b) und (c) exist. $U \supseteq A$ offen mit (2) und abg. $C \subseteq A$ mit (3); aus $U \setminus C = (U \setminus A) \dot\cup (A \setminus C)$ folgt, mit

(2) & (3): $\lambda^d(U\setminus C) = \overline{\lambda^d}(U \setminus C) < 2\varepsilon$ $\quad (U \setminus C \in \mathcal{B}^d\,!)$

(ii) ⇒ (i): Übung! ∎

Existenz von nicht-Lebesgue-messbaren (⇒ nicht-Borel) Mengen:

11.43. Satz $\forall\, d \in \mathbb{N}$ gilt: $\overline{\mathcal{B}^d} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}^d$ def. $[x] := x + \mathbb{Q}^d \subseteq \mathbb{R}^d$

(d.h. Äquiv.kl. von x bzgl. $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^d$).

Also $\{[x] : x \in \mathbb{R}^d\} = \mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d \quad \Rightarrow [x] \cap [0,1[^d \neq \emptyset$

$\forall\, [x] \in \mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d$ wähle (genau) ein Element $v_{[x]} \in [x] \cap [0,1[^d$ aus (Auswahlaxiom!). Sei $V := \{ v_{[x]} \in [0,1[^d : [x] \in \mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d \}$

Somit $\mathbb{R}^d = \dot\bigcup_{v \in V} (v + \mathbb{Q}^d) = \bigcup_{v \in V} \dot\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} \{v + q\} = \dot\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} (q + V)$

(Zur Disjunktheit letzt. Ver.: Ann.: $\exists\, q, q' \in \mathbb{Q}^d$:
$(q + V) \cap (q' \cap V) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, v, v' \in V: q + v = q' + v'$
$\Rightarrow v' - v = q - q' \in \mathbb{Q}^d \Rightarrow v \in [v']\ (\&\ v \neq v')$ ↯
- erst. Ver. ähn.)

Ann.: $V \in \overline{\mathcal{B}^d}$

$$\Rightarrow \quad \infty = \overline{\lambda^d}(\mathbb{R}^d) \overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \underbrace{\overline{\lambda^d}(q + V)}_{\overline{\lambda^d}(V)\ \text{Transl. inv.}}$$

$$\Rightarrow \overline{\lambda^d}(V) > 0$$

- Betrachte andererseits

$$\infty > \overline{\lambda^d}([0,2[^d) \geq \overline{\lambda^d}\Big(\dot{\bigcup_{q\in\mathbb{Q}^d\cap[0,1[^d}} \overbrace{(q+V)}^{\subseteq [0,2[^d \text{ für } q\in\mathbb{Q}^d\cap[0,1[^d}}\Big)$$

σ-Add

$$= \sum_{q\in\mathbb{Q}^d\cap[0,1[^d} \underbrace{\overline{\lambda^d}(q+V)}_{\overline{\lambda^d}(V)} \quad \text{Transl.-Inv} \quad \Rightarrow \overline{\lambda^d}(V) = 0 \ ↯ \quad \blacksquare$$