11.5. Lebesgue-(Borel-) Maß

Sei $d \in \mathbb{N}$.

11.38. Satz $\exists!$ Maß auf $\mathcal{B}^d$, das Lebesgue-Borel-Maß λ^d, so dass $\forall$ Quader $Q := \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [a_\alpha, b_\alpha[\in \mathcal{I}^d$, $-\infty < a_\alpha \le b_\alpha < \infty$ $\forall \alpha = 1, \dots, d$, gilt

$$\lambda^d(Q) = \prod_{\alpha=1}^{d} (b_\alpha - a_\alpha) \qquad (*)$$

Notation: $\lambda := \lambda^1$

Beweis: Hier nur $d=1$; $d \ge 2$ später (Kap. 14.2).

Üb. 3.2 $\Rightarrow$ $\exists!$ endlicher Inhalt μ auf $\mathcal{F}$ mit $\mu([a,b[) = b-a$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$.

Üb. 3.3 $\Rightarrow$ μ stetig $\underset{\text{Satz 11.32}}{\Longrightarrow}$ $\exists!$ Maß λ auf $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$ mit $\lambda|_{\mathcal{F}} = \mu$ ∎

(In Üb.: wähle $G = id$)

11.39 Definition Die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$ ist $(\mathbb{R}^d, \overline{\mathcal{B}^d}, \overline{\lambda^d})$

$\overline{\mathcal{B}^d}$: Lebesgue-messbare Mengen im $\mathbb{R}^d$

$\overline{\lambda^d}$: d-dim. Lebesgue-Maß

Üb. 3.4: $\overline{\mathcal{B}^d} = \left\{ B \cup \tilde{N} \subseteq \mathbb{R}^d : B \in \mathcal{B}^d, \exists N \in \mathcal{B}^d \text{ mit } \lambda^d(N) = 0 \text{ und } \tilde{N} \subseteq N \right\}$

11.40 Lemma Sei $B \in \mathcal{B}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$

$\Rightarrow$ $x + B := \{ x + b \in \mathbb{R}^d : b \in B \} \in \mathcal{B}^d$

Beweis:
- $Q \in \mathcal{I}^d \Rightarrow x + Q \in \mathcal{I}^d$
- $\mathcal{A}_x := \{ B \in \mathcal{B}^d : x + B \in \mathcal{B}^d \}$ ist σ-Algebra (check!)
- $\mathcal{I}^d \subseteq \mathcal{A}_x$
- $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{I}^d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_x) = \mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{B}^d$ ∎

11.41. Satz Sei μ Maß auf $\mathcal{B}^d$. Dann sind äquivalent:

(i) $\mu = \lambda^d$

(ii) μ ist <u>translationsinvariant</u>, d.h. $\mu(B) = \mu(x+B)$ $\forall B \in \mathcal{B}^d$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$

<u>und</u> normiert, d.h. $\mu([0,1[^d) = 1$ $\left([0,1[^d = \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0,1[\right)$

(Satz gilt analog mit $\overline{\mathcal{B}^d}$ und $\overline{\lambda^d}$)

<u>Beweis</u>: Bem.: "$\mu(x+B)$" macht Sinn wegen Lemma 11.40.

"<u>(i) ⇒ (ii)</u>": Für $x \in \mathbb{R}^d$ fix, sei $\nu(B) := \lambda^d(x+B)$

$\Rightarrow \nu$ ist Maß auf $\mathcal{B}^d$ mit $\nu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^{d}[a_\alpha, b_\alpha[\right) = \prod_{\alpha=1}^{d} \underbrace{(b_\alpha + x_\alpha - a_\alpha - x_\alpha)}_{b_\alpha - a_\alpha}$

$\overset{\text{Satz 11.38}}{\Longrightarrow} \nu = \lambda^d$, also: λ^d ist transl. inv.

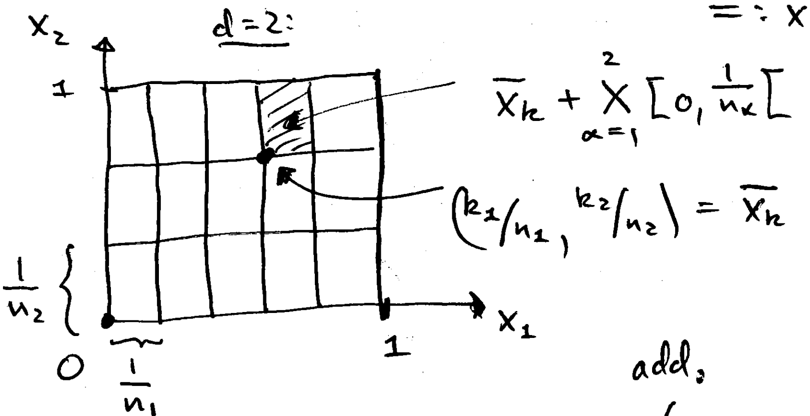
Normierung von λ^d klar. ✓

"<u>(ii) ⇒ (i)</u>":

<u>1. Schritt</u>: $\mu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^{d}[0, \frac{1}{n_\alpha}[\right) = \prod_{\alpha=1}^{d} \frac{1}{n_\alpha}$ $\forall n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$

denn $$[0,1[^d = \dot{\bigcup_{\substack{k_\alpha \in \{0,\dots,n_\alpha - 1\} \\ \alpha = 1,\dots,d}}} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} k_1/n_1 \\ \vdots \\ k_d/n_d \end{pmatrix}}_{=: \bar{x}_k \in \mathbb{R}^d} + \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, \tfrac{1}{n_\alpha}[\right)$$

d=2:



$$\Rightarrow 1 \overset{\text{Normierung}}{=} \mu([0,1[^d) \overset{\text{add.}}{=} \sum_{\substack{k_\alpha \in \{0,\dots,n_\alpha-1\} \\ \alpha=1,\dots,d}} \mu\left(\bar{x}_k + \bigtimes_{\alpha=1}^{d}[0, \tfrac{1}{n_\alpha}[\right)$$

$$\overset{\text{transl. inv.}}{=} \left(\prod_{\alpha=1}^{d} n_\alpha\right) \mu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^{d}[0, \tfrac{1}{n_\alpha}[\right) \quad ✓$$

<u>2. Schritt</u>: $\mu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, q_\alpha[\right) = \prod_{\alpha=1}^{d} q_\alpha \quad \forall (q_1, \dots, q_d) \in \mathbb{Q}^d_{\geq 0}$

denn $q_\alpha = \frac{p_\alpha \in \mathbb{N}_0}{n_\alpha \in \mathbb{N}} \Rightarrow$ Beh. mittels Zerlegung und Transl.inv. von μ wie im 1. Schritt. ✓

<u>3. Schritt</u>: $\mu\Big(\underbrace{\bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, b_\alpha[}_{=:Q}\Big) = \prod_{\alpha=1}^{d} b_\alpha \quad \forall (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d_{\geq 0}$

denn, $\forall \alpha = 1, \dots, d \ \exists (q_\alpha^{(n)})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}_{\geq 0} : \ q_\alpha^{(n)} \uparrow b_\alpha \Rightarrow$

$Q^{(n)} := \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, q_\alpha^{(n)}[\ \uparrow Q \ \Rightarrow$ (Stetigkeit von unten)

$$\mu(Q) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\mu(Q^{(n)})}_{\prod_{\alpha=1}^{d} q_\alpha^{(n)}} = \prod_{\alpha=1}^{d} b_\alpha \quad ✓$$

$\uparrow$ 2. Schritt

<u>4. Schritt</u>: $\mu\Big(\underbrace{\bigtimes_{\alpha=1}^{d} [a_\alpha, b_\alpha[}_{=:Q}\Big) = \prod_{\alpha=1}^{d} (b_\alpha - a_\alpha) \quad \forall a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R}, \ a_\alpha \leq b_\alpha, \ \alpha = 1, \dots, d$

folgt aus $Q = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_d \end{pmatrix} + \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, b_\alpha - a_\alpha[$, Transl.inv. & 3. Schritt.

4. Schritt und Satz 11.38 $\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

Eine weitere Charakterisierung Lebesgue-messbarer Mengen und eine Approximationseigenschaft des Lebesgue-Maßes:

$\boxed{11.42\text{-Satz}}$ Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Dann sind äquivalent:

(i) $A \in \overline{\mathcal{B}^d}$ (Lebesgue-messbar)

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\exists C \subseteq \mathbb{R}^d$ abgeschlossen, so dass

- $C \subseteq A \subseteq \mathcal{U}$
- $\lambda^d(\mathcal{U} \setminus C) < \varepsilon$ $\leftarrow$ (i) $\Rightarrow$ (ii): <u>Regularität</u> von λ^d

<u>Warnung</u>: Aus (ii) folgt i.A. <u>nicht</u>, dass $A \in \mathcal{B}^d$!

Beweis. (i) ⇒ (ii) : Sei $\varepsilon > 0$, $A \in \overline{\mathcal{B}^d}$.

(a) Angenommen $\overline{\lambda^d}(A) < \infty$.

Da $$\overline{\lambda^d}(A) = (\lambda^d)^*(A) = \inf_{\substack{(F_n)_n \subseteq \mathcal{F}^d: \\ A \subseteq \bigcup_n F_n}} \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(F_n)$$

zugeh. äußeres Maß zu $\lambda^d|_{\mathcal{F}^d}$ gemäß Lemma 11.30 und Satz 11.35(b)

folgt: $\exists (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}^d$ mit $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_n$ und

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(I_n) < \overline{\lambda^d}(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Zu I_n existiert $J_n \in \mathcal{I}^d$ mit $I_n \subseteq \mathring{J}_n$ und $\lambda^d(\mathring{J}_n) \leq \lambda^d(I^n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

(Verwende: $\mathring{J}_n \in \mathcal{B}^d$ und Stetigkeit von λ^d)

Setze $\mathcal{U} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathring{J}_n$; dann ist $\mathcal{U}$ offen und $\mathcal{U} \supseteq A$, und

$$\overline{\lambda^d}(U \setminus A) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Subtraktivität } (\overline{\lambda^d}(A) < \infty)}}{=} \lambda^d(U) - \overline{\lambda^d}(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(\mathring{J}_n) - \overline{\lambda^d}(A) < \varepsilon \quad (1)$$

(b) $A \in \overline{\mathcal{B}^d}$ bel. : Sei $n \in \mathbb{N}$, also $\overline{\lambda^d}(\underbrace{A \cap [-n,n]^d}_{\in \overline{\mathcal{B}^d}}) < \infty$
($\varepsilon > 0$)

Nach (a) $\exists\, \mathcal{U}_n \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit

$\mathcal{U}_n \supseteq A \cap [-n,n]^d$ und $\overline{\lambda^d}(U_n \setminus (A \cap [-n,n]^d)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{U} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ offen und $\mathcal{U} \supseteq A$, und

$$\overline{\lambda^d}(\mathcal{U} \setminus A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{\lambda^d}(\underbrace{\mathcal{U}_n \setminus A}_{\subseteq \mathcal{U}_n \setminus (A \cap [-n,n]^d)}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \quad (2)$$

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Nach (b) $\exists\, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $V \supseteq A^c$

und $\overline{\lambda^d}(V \setminus A^c) < \varepsilon$ (da $A \in \overline{\mathcal{B}^d} \Rightarrow A^c \in \overline{\mathcal{B}^d}$)

Sei $C := V^c$ $\Rightarrow$ C abgeschl., $C \subseteq A$ und

$$\overline{\lambda^d}(A \setminus C) = \overline{\lambda^d}(A \cap V) = \overline{\lambda^d}(V \setminus A^c) < \varepsilon \quad (3)$$

Aus (b) und (c) exist. $U \supseteq A$ offen mit (2) und abg. $C \subseteq A$ mit (3); aus $U \setminus C = (U \setminus A) \,\dot\cup\, (A \setminus C)$ folgt, mit

(2) & (3): $\lambda^d(U \setminus C) = \overline{\lambda^d}(U \setminus C) < 2\varepsilon \qquad (U \setminus C \in \mathcal{B}^d\,!)$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Übung! ■

Existenz von nicht-Lebesgue-messbaren ($\Rightarrow$ nicht-Borel) Mengen:

11.43. Satz $\forall\, d \in \mathbb{N}$ gilt: $\overline{\mathcal{B}^d} \subsetneqq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}^d$ def. $[x] := x + \mathbb{Q}^d \subseteq \mathbb{R}^d$

(d.h. Äquiv.kl. von x bzgl. $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^d$).

Also $\{[x] : x \in \mathbb{R}^d\} = \mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d \quad \Rightarrow [x] \cap [0,1[^d \neq \emptyset$

$\forall\, [x] \in \mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d$ wähle (genau) ein Element $v_{[x]} \in [x] \cap [0,1[^d$ aus (Auswahlaxiom!). Sei $V := \{ v_{[x]} \in [0,1[^d : [x] \in \mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d \}$

Somit $\mathbb{R}^d = \dot\bigcup_{v \in V} (v + \mathbb{Q}^d) = \bigcup_{v \in V} \dot\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} \{v + q\} = \dot\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d} (q + V)$

(Zur Disjunktheit letzt. Ver.: Ann.: $\exists\, q, q' \in \mathbb{Q}^d$:

$(q + V) \cap (q' \cap V) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, v, v' \in V: q + v = q' + v'$

$\Rightarrow v' - v = q - q' \in \mathbb{Q}^d \Rightarrow v \in [v']$ (& $v \neq v'$) $\lightning$

- erst. Ver. ähn.)

Ann.: $V \in \overline{\mathcal{B}^d}$

$$\Rightarrow \quad \infty = \overline{\lambda^d}(\mathbb{R}^d) \overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \underbrace{\overline{\lambda^d}(q + V)}_{\overline{\lambda^d}(V)} \quad \text{Transl. inv.}$$

$$\Rightarrow \overline{\lambda^d}(V) > 0$$

- Betrachte andererseits

$$\infty > \overline{\lambda^d}([0,2[^d) \geq \overline{\lambda^d}\Big(\dot{\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d \cap [0,1[^d}} \overbrace{(q+V)}^{\subseteq [0,2[^d \text{ für } q \in \mathbb{Q}^d \cap [0,1[^d}\Big)$$

6-Add

$$= \sum_{q \in \mathbb{Q}^d \cap [0,1[^d} \underbrace{\overline{\lambda^d}(q+V)}_{\overline{\lambda^d}(V)} \quad \text{Transl.-inv} \quad \Rightarrow \overline{\lambda^d}(V) = 0 \ ⚡ \quad \square$$