11.4. Fortsetzungssatz von Carathéodory

Ziel: setze stetigen Inhalt auf Ring fort zu einem Maß auf σ-Algebra (Eindeutigkeit: Satz 11.28)

Dazu Hilfsgröße:

11.29. Definition $m : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ist äußeres Maß (auf X)

$$:\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ m(\emptyset) = 0 \\ (2)\ A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow m(A) \le m(B) \quad \text{(Monotonie)} \\ (3)\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \le \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \quad \text{(sub-}\sigma\text{-Additivität)} \end{cases}$$

11.30. Lemma Sei μ Inhalt auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\forall A \subseteq X$ setze $\mathcal{U}(A) := \{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R} : A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\}$

„Umgebungssystem von A aus abz. baren Überdeckungen in $\mathcal{R}$"

Dann ist $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$,

$$A \mapsto \mu^*(A) := \begin{cases} \inf\limits_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(A)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n), & \text{falls } \mathcal{U}(A) \ne \emptyset \\ +\infty, & \text{falls } \mathcal{U}(A) = \emptyset \end{cases}$$

ein äußeres Maß (das von μ induzierte äußere Maß)

Beweis: (1) $(\emptyset, \emptyset, \dots) \in \mathcal{U}(\emptyset)$, $\emptyset \in \mathcal{R}$ & $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{U}(B) \subseteq \mathcal{U}(A)$

(3) Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit o.E. $\mu^*(A_n) < \infty\ \forall n$ (andernfalls ist Beh. klar: $\infty \le \infty$)

Also $\mathcal{U}(A_n) \ne \emptyset\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists (B_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A_n):$

(1) $$\sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k^{(n)}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (\underline{\text{Def.}}\ \text{inf.})$$

Zudem gilt $(B_k^{(n)})_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}}} \subseteq \mathcal{U}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$

$$\Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{k,n\in\mathbb{N}} \mu(B_k^{(n)}) \overset{\text{Umordnen, (1)}}{\leq} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}}_{=1}$$

Da $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow$ Beh. ■

$\boxed{\text{11.31. Definition}}$ Sei μ^* äußeres Maß auf X. Setze

$$\mathcal{A}^* := \{A \subseteq X : \underbrace{\mu^*(Q)}_{\text{stets nach Def. 11.29(3) sub-}\sigma\text{-Add. } \leq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A)} \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)\ \ \forall Q \subseteq X\}$$

$$= \{A \subseteq X : \mu^*(Q) = \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q \setminus A)\ \ \forall Q \subseteq X\}$$

System der μ^*-messbaren Mengen in X.

$\boxed{\text{11.32. Satz}}$ (Carathéodory, 1914)

Sei μ^* äußeres Maß auf X

(1) Dann ist $\mathcal{A}^*$ eine σ-Algebra in X und die Restriktion $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ ist ein Maß

(2) Sei zusätzlich μ^* induziert von stetigen Inhalt μ auf Ring $\mathcal{R}$. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}^* \quad \text{und} \quad \mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$$

(3) Ist zusätzlich zu (2) μ noch σ-endlich auf $\mathcal{R}$, dann ist $\nu := \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ das einzige Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\nu|_{\mathcal{R}} = \mu$.

11.33. Bemerkung

(2) besagt, dass $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ Fortsetzung von μ auf $\sigma(\mathcal{R})$

(3) besagt, dass μ eindeutig fortsetzbar von $\mathcal{R}$ auf $\sigma(\mathcal{R})$

$$
\begin{tikzcd}
\text{Inhalt } \mu \arrow[rrr, bend left, "\text{induziert (via 11.30)}"] \arrow[d, phantom, "\shortparallel"] & & & \text{äußeres Maß } \mu^* \arrow[dl] \\
\mu^*|_{\mathcal{R}} & \text{Maß } \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})} \arrow[l] & \text{Maß } \mu^*|_{\mathcal{A}^*} \arrow[l] &
\end{tikzcd}
$$

(3) einziges (μ σ-endl.) (1)

Lebt auf $\mathcal{R} \subseteq \sigma(\mathcal{R}) \overset{(2)}{\subseteq} \mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{P}(X)$

(μ stet. Inhalt)

Constantin Carathéodory (13.9.1873 – 2.2.1950)

- Ingenieur → Bau von Staudämmen am Nil
- ab 1900 Studium Math. in Berlin
  (H.A. Schwarz, G. Frobenius, M. Planck).
- ab 1913 Nachfolger von Felix Klein in Göttingen
- 1918 Berlin
- 1920–22 Gründungsrektor in Smyrna (= Izmir)
- 1924–1950: LMU München
  (Nachfolger von F. Lindemann)

Hauptarbeitsgebiete: Variationsrechnung
Funkt.theorie
Maß- u. Integr.theorie

erhebliche Vereinfachung des Beweises des Riemannschen Abb.satzes.

Beweis von Satz 11.32

zu (1): $\boxed{(i)}$ $\mathcal{A}^*$ σ-Algebra $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^*$ $\cap$-stab. Dynkin-Syst. (Satz 11.11.(e))

Dazu Hilfsbeh.: $\mathcal{A}^*$ ist Algebra

- $X \in \mathcal{A}^*$ klar per def.
- c-stabil: da $Q \cap A = Q \setminus A^c$ und $Q \setminus A = Q \cap A^c$ (a)

  $\Rightarrow$ $(A \in \mathcal{A}^* \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{A}^*)$, also $\mathcal{A}^*$ c-stabil
- $\cup$-stabil: Seien $A, B \in \mathcal{A}^*$ $\Rightarrow$

$$\mu^*(\tilde{Q}) = \mu^*(\tilde{Q} \cap B) + \mu^*(\tilde{Q} \setminus B) \quad \forall \tilde{Q} \in \mathcal{P}(X) \qquad (b)$$

und, $\forall Q \in \mathcal{P}(X)$,

$$\mu^*(Q) = \underbrace{\mu^*(Q \cap A)}_{\substack{(b) \text{ mit } \tilde{Q} = Q \cap A \\ \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*((Q \cap A) \setminus B)}} + \underbrace{\mu^*(Q \setminus A)}_{\substack{(b) \text{ mit } \tilde{Q} = Q \setminus A \\ \mu^*((Q \setminus A) \cap B) + \mu^*((Q \setminus A) \setminus B)}}$$

$$\overset{(a)}{=} \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B^c) \qquad (c)$$

Nun, (c) mit $Q \longrightarrow Q \cap (A \cup B)$:

$$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) = \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) \qquad (d)$$

(d) in (c)

$$\Rightarrow \quad \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*(\underbrace{Q \cap (A \cup B)^c}_{Q \setminus (A \cup B)})_{(a)} \quad \checkmark$$

Beh: $\mathcal{A}^*$ ist $\cap$-stabiles Dynkin-System.

- $\cap_=$, $\setminus_\supseteq$-stabil klar, da $\mathcal{A}^*$ Algebra (wie gezeigt) [siehe Def/Satz 11.9]
- $\dot{\cup}_\infty$-stabil: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$ paarw. disjunkt; sei $A := \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n$

(d) mit $A \to A_1$, $B \to A_2$:

$$\Rightarrow \mu^*(Q \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_2)$$

Induktion

$$\Rightarrow \mu^*\Big(Q\cap\big(\underbrace{\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j}_{=:B_n\in\mathcal{A}^* \text{ (Algebra!)}}\big)\Big) = \sum_{j=1}^{n}\mu^*(Q\cap A_j) \quad \forall n\in\mathbb{N}\ \forall Q\in\mathcal{P}(X)$$

$$\Rightarrow \mu^*(Q) = \mu^*(Q\cap B_n) + \mu^*(\underbrace{Q\setminus B_n}_{\supseteq Q\setminus A})$$

Monotonie 11.29(2)

$$\geq \sum_{j=1}^{n}\mu^*(Q\cap A_j) + \mu^*(Q\setminus A) \quad \forall n\in\mathbb{N}.\ \forall Q\in\mathcal{P}(X)$$

$$\overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \mu^*(Q) \geq \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}}\mu^*(Q\cap A_n)}_{} + \mu^*(Q\setminus A) \qquad (e)$$

Sub-σ-Add 11.29(3) $\rightsquigarrow$ $\geq \mu^*\big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(Q\cap A_n)\big)$

also $\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A) \quad \forall Q\in\mathcal{P}(X) \qquad (f)$

$\Rightarrow A\in\mathcal{A}^*$ ✓

$\boxed{\text{(ii)}}$ μ^* ist Maß auf $\mathcal{A}^*$

- $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}\geq 0$ und $\mu^*(\emptyset)=0$ klar, da μ^* äußeres Maß
- σ-Additiv: Sei $(A_n)_n\subseteq\mathcal{A}^*$ paarw. disj., $A := \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n$

$$\forall Q\subseteq X \Rightarrow \mu^*(Q) \overset{(e)}{\geq} \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu^*(Q\cap A_n) + \mu^*(Q\setminus A) \geq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A)$$
$$= \mu^*(Q) \quad (\text{da } A\in\mathcal{A}^*)$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu^*(Q\cap A_n) + \mu^*(Q\setminus A) = \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A)$$

wähle $Q=A \Rightarrow$ Beh. ✓

<u>zu (2):</u> $\boxed{\text{(i)}}$ Zeige $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{A}^*$ ($\Rightarrow \sigma(\mathcal{R})\subseteq\mathcal{A}^*$, da $\mathcal{A}^*$ σ-Algebra)

Sei <u>$A\in\mathcal{R}$</u>, $Q\in\mathcal{P}(X)$ bel.; o.E. sei $\mu^*(Q)<\infty$

(sonst ist Bed. in Def. 11.31 eh erfüllt!)

- also $\mathcal{U}(Q)\neq\emptyset$, sei $\underset{\mathcal{R}}{\underset{\cap}{(A_n)_n}} \subseteq \mathcal{U}(Q)$ bel.

$\Rightarrow A_n \cap A \in \mathcal{R}$ und $A_n \setminus A \in \mathcal{R}$ disjunkt $\xrightarrow[\mu \text{ add.}]{\text{Inhalt}}$ $\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A) \ \forall n$

$$\Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n \setminus A)$$

Da $(A_n \cap A)_n \in \mathcal{U}(Q \cap A)$ und $(A_n \setminus A)_n \in \mathcal{U}(Q \setminus A)$

$$\Rightarrow \mu^*(Q) = \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) \geq \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)} \sum_n \mu(A_n \cap A) + \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)} \sum_n \mu(A_n \setminus A)$$

$$\geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$$

$\Rightarrow$ $A \in \mathcal{A}^*$ ✓

$\boxed{\text{(ii)}}$ $\mu(A) = \mu^*(A) \ \forall A \in \mathcal{R}$

$A \in \mathcal{R} \Rightarrow (A, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots) \in \mathcal{U}(A) \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu(A)$ (g)

Sei nun $(A_n)_n \in \mathcal{U}(A)$, d.h. $A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{A_n}_{\in \mathcal{R}} \Rightarrow \left(\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap A) \right) \uparrow A$

Stetigkeit von unten $\xRightarrow{}$ Satz 11.25(ii)

$$\mu(A) = \lim_{n \to \infty} \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap A)}_{\substack{\text{Subadd.} \\ \text{11.24(d)}}} \Big) \leq \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)$$

Subadd. 11.24(d): $\leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mu(A_j \cap A)}$

Monotonie 11.24(b): $\leq \mu(A_j)$

$$\Rightarrow \mu(A) \leq \inf_{(A_n)_n \subseteq \mathcal{U}(A)} \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu^*(A) \qquad \text{(h)}$$

(g) $\wedge$ (h) $\Rightarrow$ Beh. ✓

zu (3): Aus Eindeutigkeitssatz 11.28, denn:

- $\mathcal{R}$ $\cap$-stabiler Erzeuger von $\sigma(\mathcal{R})$
- μ σ-endlich auf $\mathcal{R}$

∎

11.34. Definition Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra, μ Maß auf $\mathcal{A}$.

- $(X, \mathcal{A})$ Messraum (messbarer Raum)
  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum
  falls $\mu(X) = 1$: Wahrscheinlichkeitsraum
- $A \subseteq X$ messbar $:\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$
- $A \subseteq X$ (μ-)Nullmenge $:\Leftrightarrow$ A messbar und $\mu(A) = 0$
- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ [oder nur: μ] vollständig $:\Leftrightarrow$
  $\forall$ Nullmengen $N \subseteq X$ $\forall A \subseteq N$: $A \in \mathcal{A}$ $(\Rightarrow \mu(A) = 0)$
  „Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen"

11.35. Satz Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann
$\exists$ kleinster vollständiger Maßraum $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$, die Vervollständigung von $(X, \mathcal{A}, \mu)$, mit $\bar{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$, $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ und $\bar{\mu}$ vollständig; d.h. $\forall (X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ vollständig mit $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$, $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ gilt $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \bar{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mu}|_{\bar{\mathcal{A}}} = \bar{\mu}$.

Beweis Folgt aus Üb.aufgabe 3.4 (Üb.blatt 3, Auf. 4)

11.36. Satz Sei μ^* äußeres Maß auf X und $\mathcal{A}^*$ das System der μ^*-messbaren Mengen. Dann gilt

(a) $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*|_{\mathcal{A}^*})$ ist vollständig

(b) Sei zudem μ^* induziert von stetigen, σ-endlichen Inhalt μ auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Dann gilt

$$\left(X, \overline{\sigma(\mathcal{R})}, \overline{\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}}\right) = \underbrace{(X, \mathcal{A}^*, \mu^*|_{\mathcal{A}^*})}_{}$$

Carathéodory-Erweiterung von $(X, \sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})})$

__Beweis__: (a) Tut.aufgabe 2.4(i) (Tut-blatt 2, Aufg. 4(i)).

(b) Übung.

Für die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich ist:

II.37. Satz Sei $\mathcal{A}_0$ eine Algebra und μ ein endliches Maß auf $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{A}_0)$. Dann gilt:

$\forall A \in \mathcal{A} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \exists A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}_0$, paarweise disjunkt, so daß

$$\mu\Big(A \,\Delta\, \big(\dot{\bigcup_{n=1}^{N}} A_n\big)\Big) < \varepsilon$$

__Beweis__: Siehe z.B. Bauer, Satz 5.7. $\boxtimes$