11.3. Inhalte und Maße

11.20. Definition Sei $\mathcal{R}$ ein Ring von Mengen

- $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ heißt Inhalt $:\Leftrightarrow$

  (i) $\mu(\emptyset) = 0$

  (ii) Additivität: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall j \in \{1, .., n\}\ \forall A_j \in \mathcal{R}$ mit $A_j \cap A_k = \emptyset\ \forall j \neq k$ gilt:

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

- μ ist stetiger Inhalt (oder: Prämaß)

  $:\Leftrightarrow$ μ ist Inhalt und es gilt die über (ii) hinausgehende σ-Additivität:

  (iii) $\forall A_j \in \mathcal{R},\ j \in \mathbb{N}$, mit

  - $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$
  - $A_j \cap A_k = \emptyset\ \forall j \neq k$

  gilt: $\mu\left(\dot{\bigcup_{j \in \mathbb{N}}} A_j\right) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)$

- Falls $\mathcal{R}$ sogar eine σ-Algebra, und μ ein stetiger Inhalt auf $\mathcal{R}$, so heißt μ Maß (auf $\mathcal{R}$). [In diesem Fall ist Bed. $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$ in (iii) stets erfüllt!]

11.21. Konvention ! !

Abweichend von den bisherigen Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (siehe Def. 3.5 & Zusatz zu Satz 3.6)

sei nun $$0 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot 0 := 0$$

NB: $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ sind weiter nicht definiert!

11.22. Definition

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $m : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abb. Dann heißt m

- endlich $:\Leftrightarrow |m(A)| < \infty \quad \forall A \in \mathcal{A}$
- σ-endlich $:\Leftrightarrow \exists$ Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ mit
  - $X = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$
  - $|m(X_k)| < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- normiert $:\Leftrightarrow X \in \mathcal{A}$ und $m(X) = 1$
- Wahrscheinlichkeitsmaß $:\Leftrightarrow \mathcal{A}$ ist σ-Algebra und m normiertes Maß

11.23. Beispiele

(a) X abzählbar, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$ [σ-Algebra!]

$$\mu(A) := |A| := \#\{x \in X : x \in A\} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$\rightsquigarrow$ Zählmaß auf X

(Details checken! Üb.).

(b) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra, $x \in X$, und

sei $\mu(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & \text{falls } x \notin A \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ in x konzentriertes Dirac-Maß $\mu =: \delta_x$
(Einheitsmasse in x) W. Maß!

(c) Sei $\mathcal{F}$ der Ring der endl. Vereinigungen rechtshalboffener Intervalle $[a,b[$ in $\mathbb{R}$ (vgl. Bsp. 11.10(v) und Satz 11.14). Sei $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ isoton u. linksseitig stetig. Die Zuordnung $[a,b[\longmapsto G(b) - G(a)$ für $a,b \in \mathbb{R}$, $a \le b$ induziert (Übung!) stetigen Inhalt μ_G auf Ring $\mathcal{F}$

Speziell $\lambda := \mu_{id}$ heißt (1-dim.) Lebesgue-Prämaß (d.h. $\lambda([a,b[) = b-a$).

$\boxed{11.24. \text{ Satz}}$ Sei μ Inhalt auf Ring $\mathcal{R}$, $A, B \in \mathcal{R}$ und $(A_n)_n \subseteq \mathcal{R}$. Dann gilt:

(a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

(b) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \le \mu(B)$ Monotonie

(c) $A \subseteq B \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ Subtraktivität

(d) $\forall n \in \mathbb{N}: \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \le \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$ Sub-Additivität

(e) Falls $A_n \cap A_m = \emptyset$ $\forall n \ne m$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$

$\Rightarrow \mu\left(\dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \ge \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ Super-σ-Additivität

Beweis: (b), (c) aus $B = (B \setminus A) \dot\cup A \Rightarrow \mu(B) = \mu(B\setminus A) + \mu(A)$

(a) $A \cup B = A \dot\cup (B \setminus A) \Rightarrow \mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B\setminus A)$
$B = (A\cap B) \dot\cup (B\setminus A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A \cap B) + \mu(B \setminus A)$ $\Big\} \Rightarrow$ Beh.,

durch Auflösen 2. Glg. nach $\mu(B\setminus A)$, falls $\mu(A\cap B) < \infty$.
Falls $\mu(A\cap B) = \infty$ ($\Rightarrow \mu(A) = \infty$) ist Beh. trivial.

(d) Lemma 11.12. $\Rightarrow \exists B_1, \dots, B_n \in \mathcal{R}$, paarw. disjunkt mit

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \dot{\bigcup_{j=1}^n} B_j \quad \text{und} \quad B_j \subseteq A_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

(siehe Bew. von Lemma 11.12)

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{j=1}^n A_j\Big) = \mu\Big(\dot{\bigcup_{j=1}^n} B_j\Big) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\mu(B_j)}_{\overset{(b)}{\leq} \mu(A_j)} \quad \checkmark$$

(e) Sei $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ($\in \mathcal{R}$ n.V.); $\forall N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^N \mu(A_n) = \mu\Big(\underbrace{\dot{\bigcup_{n=1}^N} A_n}_{\subseteq A}\Big) \overset{(b)}{\leq} \mu(A)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)}_{\text{existiert in } [0,\infty]} \leq \mu(A) \quad \checkmark$$

$\blacksquare$

Charakterisierung der Stetigkeit von Inhalten:

$\boxed{\text{11.25. Satz}}$ Sei $\mathcal{R}$ Ring, μ Inhalt auf $\mathcal{R}$. Definiere folgende Eigenschaften:

(i) μ ist stetiger Inhalt.

(ii) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) \quad \text{(Stetigkeit von unten)}$$

(iii) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow A \in \mathcal{R}$
<u>und</u> $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) \qquad \text{(Stetigkeit von oben)}$$

(iv) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$
<u>und</u> $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0 \qquad \text{(Stetig in } \emptyset\text{)}$$

(v) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow A \in \mathcal{R}$ <u>und</u>
$\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ <u>und</u> $\exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}: \mu(A_n) \geq \varepsilon$
gilt: $\qquad A \neq \emptyset$

Dann bestehen die Implikationen

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$$

Ist μ <u>endlich</u>, so gilt auch $(iii) \Rightarrow (ii)$.

11.26. Bemerkung

Die Bed. „$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{n_0}) < \infty$" in (iii) – (v) ist wesentlich:

Betrachte Zählmaß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ [Bsp. 11.23(a)]
und $A_n := \{n, n+1, \dots\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; $A_n \supseteq A_{n+1}$.
Somit $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, aber $\mu(A_n) = \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis von Satz 11.25.

<u>(i) $\Rightarrow$ (ii)</u>: Sei $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$. Gemäß Lemma 11.12
$\left(A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$ $\exists (B_n)_n \subseteq \mathcal{R}$, $B_n \cap B_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$ mit

$$A_n = \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} B_j \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad A = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n$$

n. V. gilt $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)}_{\mu(A_n)}$ μ Inhalt ✓

$(ii) \Rightarrow (i)$: Sei $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ Folge paarweise disjunkter Mengen mit $B := \dot\bigcup_{j\in\mathbb{N}} B_j \in \mathcal{R}$. Setze $A_n := \dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow A_n \nearrow B \in \mathcal{R} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \mu(B) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{\sum_{j=1}^{n}\mu(B_j)} \overset{\mu \text{ Inhalt}}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j)$

- also ist μ σ-additiv ✓

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Sei $A_n \searrow A \in \mathcal{R}$ mit o. E. $\mu(A_1) < \infty$

$\overset{\text{Satz 11.24(c)}}{\underset{A_n \subseteq A_1}{\Rightarrow}}$ $\forall n\in\mathbb{N}: \mu(A_1 \setminus A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$

n. V. gilt $(A_1\setminus A_n) \nearrow (A_1 \setminus A) \in \mathcal{R}$ — benötigt $\mu(A_1) < \infty$.

$\overset{(ii)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_1\setminus A_n)}_{\mu(A_1)-\mu(A_n)} = \underbrace{\mu(A_1\setminus A)}_{\mu(A_1)-\mu(A)}$ Satz 11.24(c) $\Rightarrow$ Beh. ✓

$(iii) \Leftrightarrow (iv)$: "$\Rightarrow$" klar; "$\Leftarrow$" aus: $A_n \setminus A \in \mathcal{R}$
$\Rightarrow \underbrace{(A_n\setminus A)}_{\in \mathcal{R}} \searrow \emptyset$ ✓

$(iii) \Rightarrow (v)$: Sei $A_n \searrow A \in \mathcal{R}$ und $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ und $\mu(A_n) \geq \varepsilon$ $\forall n$

$\Rightarrow \mu(A) \overset{(iii)}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{\geq \varepsilon \text{ n. V. } \forall n} \geq \varepsilon > 0$

$\overset{\text{Def. 11.20(i)}}{\Rightarrow} A \neq \emptyset$

$(v) \Rightarrow (iv)$: Sei $A_n \searrow \emptyset \in \mathcal{R}$, $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$

Ann.: $\mu(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ falsch.

Dann $\exists \varepsilon > 0$: $\mu(A_n) \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$ (NB: $\mu(A_n)$ fallend!).

$\overset{(v)}{\Longrightarrow} \quad A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$ ↯.

Sei nun zusätzlich μ endlich! Dann:

(iv) $\Rightarrow$ (ii): Sei $A_n \nearrow A \in \mathcal{R} \Rightarrow (A \setminus A_n) \searrow \emptyset$

$$\overset{\mu \text{ endlich}}{\underset{\&\ (iv)}{\Longrightarrow}} \quad 0 = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A \setminus A_n)}_{\mu(A) - \mu(A_n)} \quad \text{Satz 11.24(c)} \quad \overset{\mu \text{ endlich}}{\Longrightarrow} \quad \text{Beh.} \qquad \blacksquare$$

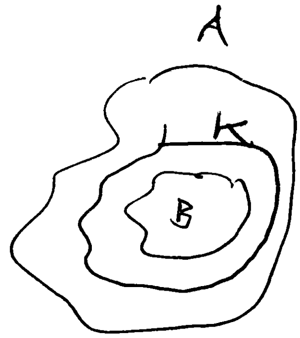
Satz 11.25 liefert handliches Stetigkeitskrit. für Anwendungen:

$\boxed{\text{11.27. Satz}}$ (Approximation mit Kompakta).

Sei X Hausdorff-Raum und μ endlicher Inhalt auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Falls: $\forall A \in \mathcal{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists K \subseteq X$ kompakt und $B \in \mathcal{R}$ mit

$$B \subseteq K \subseteq A \quad \text{und} \quad \mu(A \setminus B) < \varepsilon$$

dann ist μ stetiger Inhalt.



Beweis: Wir verifizieren Kriterium (v) in Satz 11.25.

Sei $A_n \searrow A \in \mathcal{R}$ mit $\mu(A_n) \geq \varepsilon$ $\forall n$ für ein $\varepsilon > 0$.

n.V. existiert zu jedem A_n ein $K_n \subseteq X$ kompakt und $B_n \in \mathcal{R}$ mit $B_n \subseteq K_n \subseteq A_n$ und $\mu(A_n \setminus B_n) < 2^{-(n+1)}\varepsilon$

Es gilt $B_n = A_n \setminus (A_n \setminus B_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\forall N \in \mathbb{N}: \bigcap_{n=1}^{N} B_n = \left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} (A_n \setminus B_n)\right)$$

$\Longrightarrow$

$$\Rightarrow \mu\left(\bigcap_{n=1}^{N} B_n\right) \geq \mu\Big(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{N} A_n}_{A_N}\Big) - \mu\Big(\underbrace{\bigcup_{n=1}^{N} (A_n \setminus B_n)}\Big)$$

Subtraktivität, Monotonie (11.24(c), (b))

Subadd. 11.24(d)

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\mu(A_n \setminus B_n)}_{< \varepsilon 2^{-(n+1)}} < \frac{\varepsilon}{2}$$

geom. Reihe

n.V.

$$\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{N} B_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{N} K_n \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Mit endl. Durchschnittseigenschaft kpt'er Mengen $\overset{\text{Übung!}}{\Longrightarrow}$

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{K_n}_{\subseteq A_n} \subseteq A, \text{ d.h. Krit. (v) ist erfüllt } \blacksquare$$

$\boxed{\text{11.28 Satz}}$ (Eindeutigkeitssatz für Maß)

Sei $\mathcal{E}$ $\cap$-stabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\exists (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ mit $X_n \nearrow X$. Seien μ_1, μ_2 Maße auf $\mathcal{A}$ mit

(1) $\mu_1(A) = \mu_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{E}$

(2) $\mu_1(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $\mu_1 = \mu_2$, d.h. $\mu_1(A) = \mu_2(A) \ \forall A \in \underline{\underline{\mathcal{A}}}$.

Beweis. Sei $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$ (Gibt es n.V.)

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}: \mu_1(A \cap E) < \infty$ & $\mu_2(A \cap E) < \infty$

Setze $\mathcal{D}_E := \{A \in \mathcal{A} : \mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)\}$ ($\neq \emptyset$ da $E \in \mathcal{D}_E$!),

Beh: $\mathcal{D}_E$ ist Dynkin-System

Bew:
- $X \in \mathcal{D}_E$ klar
- $\setminus_{\supseteq}$-stabil: Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{D}_E$ mit $A_2 \subseteq A_1$

$\Rightarrow E \cap (A_1 \setminus_{\supseteq} A_2) = (E \cap A_1) \setminus_{\supseteq} (E \cap A_2)$

$\Rightarrow \mu_1(E \cap (A_1 \setminus A_2)) \underset{\text{Subtraktivität 11.24.(c)}}{=} \mu_1(E \cap A_1) - \mu_1(E \cap A_2)$

$\overset{A_1, A_2 \in \mathcal{D}_E}{=} \mu_2(E \cap A_1) - \mu_2(E \cap A_2) \overset{!}{=} \mu_2(E \cap (A_1 \setminus A_2))$ ✓

- $\dot{\cup}_\infty$-stabil: Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{D}_E$ paarweise disjunkt

$\Rightarrow E \cap (\dot{\bigcup}_n A_n) = \dot{\bigcup}_n (E \cap A_n)$

$\Rightarrow \mu_1(E \cap (\dot{\bigcup}_n A_n)) \overset{\mu_1 \text{ Maß}}{=} \sum_n \underbrace{\mu_1(E \cap A_n)}_{= \mu_2(E \cap A_n)\ A_n \in \mathcal{D}_E} \overset{\mu_2 \text{ Maß}}{=} \mu_2(E \cap (\dot{\bigcup}_n A_n))$ ✓

$\Rightarrow$ Beh. $\Rightarrow \mathcal{D}_E \underset{\mathcal{D}_E \text{ enthält } \mathcal{E}}{\supseteq} dyn(\mathcal{E}) \underset{\substack{\text{Satz 11.17} \\ (\mathcal{E}\ \cap\text{-stabil!})}}{=} \sigma(\mathcal{E}) \underset{\text{n.V.}}{=} \mathcal{A}$

- also: (*) $\mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)\ \forall A \in \mathcal{A}\ \forall E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) < \infty$

Die Wahl $E = X_n, n \in \mathbb{N}$, ist n.V. erlaubt und, da $(A \cap X_n) \uparrow A$

$\mu_1(A) \underset{\text{unten, Satz 11.25}}{\overset{\text{Stetigkeit von}}{=}} \lim_{n \to \infty} \underbrace{\mu_1(A \cap X_n)}_{= \mu_2(A \cap X_n)\ (*)} = \mu_2(A)\ \forall \mathcal{A}$ ∎