11.2. Mengensysteme

11.5. Definition Sei X Menge, sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Menge (auch: Familie) von Teilmengen von X.

- $\mathcal{A}$ ist ^{c}-stabil $:\Leftrightarrow (A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A})$

(komplementstabil)

- Sei Υ eine der Mengenoperationen $\cup, \cap, \setminus, \Delta$

  $\uparrow$ sym. Differenz: $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

  $\mathcal{A}$ ist Υ-stabil

  $:\Leftrightarrow (A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \Upsilon B \in \mathcal{A})$

- $\mathcal{A}$ ist $\setminus_{\supseteq}$-stabil $:\Leftrightarrow (A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \supseteq B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A})$
- $\mathcal{A}$ ist $\dot{\cup}$-stabil $:\Leftrightarrow (A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \dot{\cup} B \in \mathcal{A})$
- $\mathcal{A}$ ist $\cup_\infty$-stabil $:\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \end{array} \right.$

(stabil bzgl. abz. Vereinigung)

analog: $\cap_\infty$-, $\dot{\cup}_\infty$-stabil

11.6. Lemma Seien X, X' Mengen, sei Υ eine Mengenoperation aus Def. 11.5.

(a) Sei $T : X' \to X$ eine Abb., $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$,

$$\mathcal{A}' := T^{-1}(\mathcal{A}) := \{\underbrace{T^{-1}(A)}_{} : A \in \mathcal{A}\} \subseteq \mathcal{P}(X')$$

$$:= \{x' \in X' : T(x') \in A\}$$

Dann gilt:

$$\mathcal{A} \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil} \Rightarrow \mathcal{A}' \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil}$$

(b) Sei $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $\forall j \in J$ sei $\mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}_j \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil } \forall j \in J) \Rightarrow \Big(\bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil}\Big)$$

Beweis. Nachrechnen,

(a) z. B. sei $\mathcal{A}$ $\cup$-stabil und sei $A', B' \in \mathcal{A}'$

$\Rightarrow \exists A, B \in \mathcal{A}$ mit $A' = T^{-1}(A)$, $B' = T^{-1}(B)$

$\Rightarrow A' \cup B' = T^{-1}(A \cup B) \in \mathcal{A}'$, usw ...

(b) z. B. seien $\mathcal{A}_j$ $\cap$-stabil $\forall j \in J$.

Seien $A, B \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j \Rightarrow \underbrace{A, B \in \mathcal{A}_j}$ $\forall j \in J$

$\overset{\text{n.V.}}{\Rightarrow} A \cap B \in \mathcal{A}_j$

$\Rightarrow A \cap B \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}$, usw... ▨

11.7. Korollar Sei $X' \subseteq X$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und

$\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cap X' := \{A \cap X' : A \in \mathcal{A}\}$ (Spur von $\mathcal{A}$ in X')

Dann gilt $\forall$ Mengenop. Υ aus Def. 11.5.:

$$\mathcal{A} \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil} \Rightarrow \mathcal{A}' \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil}$$

Beweis:

$$\mathcal{A}' = T^{-1}(\mathcal{A}) \text{ für Einbettung } T: \begin{array}{l} X' \to X \\ x' \mapsto x' \end{array}$$

und Lemma 11.6(a). ▨

11.8. Korollar Sei Y eine Menge der in Def. 11.5. erklärten Mengenoperationen Υ, sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann $\exists$ kleinstes Mengensystem $\mathcal{E}^Y \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit

- $\mathcal{E}^Y$ ist Υ-stabil $\forall\, \Upsilon \in Y$
- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^Y$

$$\underset{\text{Erzeuger}}{\mathcal{E}} \subseteq \underset{\text{von } \mathcal{E} \text{ erzeugtes System (bzgl. } Y)}{\mathcal{E}^Y}$$

Beweis Lemma 11.6 (b) und

$$\mathcal{E}^Y := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X):\, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}, \\ \mathcal{A} \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil } \forall\, \Upsilon \in Y}} \mathcal{A}$$

▨

11.9. Definition und Satz (Mengensysteme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$)

		enthält		stabil unter									
Definition: $\mathcal{A}$ ist		$\emptyset$	X	$\cup$	$\dot\cup$	$\cap$	$\cup_\infty$	$\dot\cup_\infty$	$\cap_\infty$	$\setminus$	$\setminus_{\supseteq}$	Δ	^{c}
Ring	• $\emptyset \in \mathcal{A}$ • $\setminus$-stabil • $\cup$-stabil	✓		✓	✓	✓				✓	✓	✓	
Algebra	• $X \in \mathcal{A}$ • ^{c}-stabil • $\cup$-stabil	✓	✓	✓	✓	✓				✓	✓	✓	✓
σ-Algebra	• $X \in \mathcal{A}$ • ^{c}-stabil • $\cup_\infty$-stabil	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Dynkin-System	• $X \in \mathcal{A}$ • $\setminus_{\supseteq}$-stabil • $\dot\cup_\infty$-stabil	✓	✓		✓			✓			✓		✓

Beweis: Verwende: $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$

$A^c = X \setminus A$, $A \setminus B = A \cap B^c$, ... ▨

11.10. Beispiele: (i) $\mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra

(ii) $\mathcal{A} := \{$endliche Teilmengen von $X\}$ ist Ring

(und (σ-) Algebra $\Leftrightarrow$ X endlich)

(iii) Topologie $\mathcal{T}$ auf X ist i. A. keines der Syst. aus 11.9

(iv) kleinste σ-Algebra, die $A \subseteq X$ enthält:

$$\sigma(A) := \sigma(\{A\}) := \{\emptyset, X, A, A^c\}$$

(v) Sei $\mathcal{I} := \{[a,b[\, : a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$

Mengensystem rechtshalboffener Intervalle

$\Rightarrow \mathcal{F} := \{\bigcup_{j=1}^{n} A_j : A_j \in \mathcal{I}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ endl. Vereinig. davon

ist Ring (Übung!)

11.11 Satz (Alternative Charakterisierungen)

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gilt:

(a) $\mathcal{A}$ ist Ring $\Leftrightarrow$ ($\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist Δ- und $\cap$-stabil)

(b) $\mathcal{A}$ ist Ring $\Leftrightarrow$ ($\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist Δ- und $\cup$-stabil)

(c) $\mathcal{A}$ ist Algebra $\Leftrightarrow$ ($X \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist ^{c}- und $\cap$-stabil)

(d) $\mathcal{A}$ ist Algebra $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{A}$ ist Ring und $X \in \mathcal{A}$)

(e) $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{A}$ ist Dynkin-System und $\cap$-stabil).

Beweis: Übung! Für „$\subseteq$" von (e) verwende:

11.12. Lemma Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\dot\cup$-stabil, $\setminus$-stabil und sei $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists B_n \in \mathcal{A}$ mit

(i) $B_n \subseteq A_n \quad \forall n$

(ii) $B_n \cap B_m = \emptyset, \quad \forall n \neq m$ (paarw. disj.)

(iii) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$

Beweis: Setze $B_1 := A_1 \in \mathcal{A}$ und definiere induktiv

$$B_{n+1} := A_{n+1} \setminus \Big(\dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

also: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $B_n \subseteq A_n$, und $B_{n+1} \cap B_j = \emptyset \ \forall j \in \{1,..,n\}$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \qquad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \Big(\dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big) \underline{\in \mathcal{A}}$$

außerdem $\forall n \in \mathbb{N}$: $\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j = \dot\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j$ (n=0: klar)

Bew. mit Ind.: n=1: $\underbrace{A_1}_{B_1} \cup A_2 = B_1 \cup \underbrace{(A_2 \setminus B_1)}_{B_2} = B_1 \dot\cup B_2$

n→n+1: gelte $\dot\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j = A_{n+1} \cup \underbrace{\Big(\dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j\Big)}_{=:Z} = \underbrace{(A_{n+1} \setminus Z)}_{B_{n+1}} \dot\cup Z = \dot\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j \quad \blacksquare$$

11.13. Definition

(a) Für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ-Algebra, die
$\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ das Dynkin-System, das

Erzeuger

$\mathcal{E}$ enthält (Existiert nach Kor. 11.8.).

(b) Sei $(X,\mathcal{T})$ topologischer Raum

$\sigma(\mathcal{T})$ heißt Borel-σ-Algebra auf X (zu $\mathcal{T}$)

$A \subseteq X$ Borel-Menge $:\Leftrightarrow A \in \sigma(\mathcal{T})$

Speziell für $X=\mathbb{R}^d$, $d\in\mathbb{N}$: $\mathcal{B}^d := \sigma(\mathcal{T}_{\text{euklidische}})$

σ-Algebra der Borel-Mengen in $\mathbb{R}^d$ $(\mathcal{B} := \mathcal{B}^1)$

11.14. Satz $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{I}^d) = \sigma(\mathcal{F}^d)$, wobei

$$\mathcal{I}^d := \left\{ \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [a_\alpha, b_\alpha[\; : a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R} \text{ mit } a_\alpha \le b_\alpha \ \forall \alpha = 1,..,d \right\}$$

$\mathcal{F}^d$: Ring der endl. Vereinigungen d-dim rechtshalb offener Quader $\in \mathcal{I}^d$

Beweis: mittels Lemma 11.16 (unten) ⇝ Übung! ■

11.15. Bemerkung

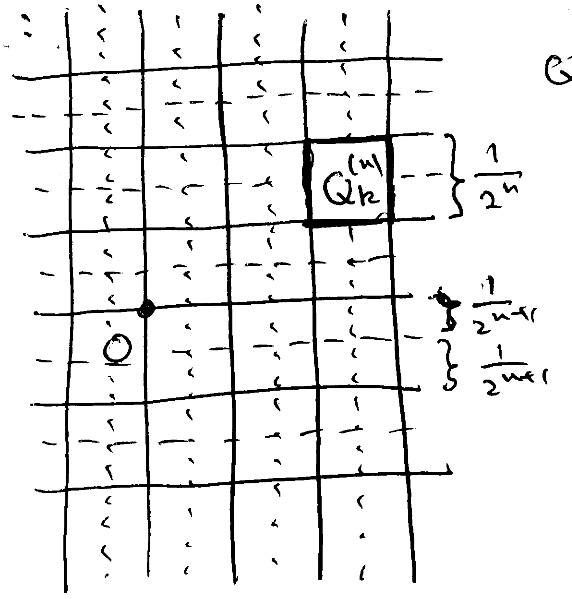
(a) Wo und ob Intervalle in Def. von $\mathcal{I}^d$ offen, ist für die Aussage von Satz 11.14 egal.

(b) $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\text{abgeschl. Mengen}) = \sigma(\text{Kompakta})$, siehe Üb.

↑ X σ-kompakter Hausdorff- ($X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, K_n kpt.). Raum.

11.16. Lemma Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen. Dann ist U abzählbare Vereinigung abgeschlossener Quader $\bigtimes_{\alpha=1}^{d} [a_\alpha, b_\alpha]$ mit disjunkten Inneren.

Beweis:



n-Gitter im $\mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{N}_0$, mit Quadern $Q_k^{(n)} := \bigtimes_{\alpha=1}^{d} \left[\frac{k_\alpha}{2^n}, \frac{k_\alpha+1}{2^n}\right]$, $k \in \mathbb{Z}^d$

wird verfeinert durch (n+1)-Gitter

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}^d} Q_k^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

↑ disjunktes Inneres.

Setze: $\mathcal{U}_0 := \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d: \\ Q_k^{(0)}\subset\mathcal{U}}} Q_k^{(0)}$; $\mathcal{U}_n := \bigcup_{\substack{k\in\mathbb{Z}^d: Q_k^{(n)}\subset\mathcal{U} \\ \wedge\, Q_k^{(n)}\not\subset \bigcup_{\nu=0}^{n-1}\mathcal{U}_\nu}} Q_k^{(n)}$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

$\Rightarrow \mathcal{U} = \underbrace{\bigcup_{n\in\mathbb{N}_0}\mathcal{U}_n}_{=:\mathcal{U}'}$, denn $\mathcal{U}'\subseteq\mathcal{U}$ klar, und $\forall x\in\mathcal{U}$ gilt (da $\mathcal{U}$ offen): $\exists r>0$: Ball $B_r(x)\subset\mathcal{U}$,

da $|\cdot|_2$ u. $|\cdot|_\infty$-Norm äquiv. auf $\mathbb{R}^d$ $\Rightarrow \exists k_0\in\mathbb{Z}^d$, $n_0\in\mathbb{N}_0$ mit $x\in Q_{k_0}^{(n_0)}\subset B_r(x)\subset\mathcal{U}$

($|\cdot|_p$ als $\|\cdot\|_p$ in Ana 2 notiert)

- also auch $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{U}'$ $\blacksquare$

Die Nützlichkeit von Dynkin-Systemen beruht auf:

$\boxed{\text{11.17. Satz}}$ Sei $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$ $\cap$-stabil. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{E}) = \mathrm{dyn}(\mathcal{E})$$

Beweis: $\sigma(\mathcal{E})\supseteq\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ klar, da $\sigma(\mathcal{E})\supseteq\mathcal{E}$ selbst Dynkin-System.

Für "$\subseteq$" genügt zu zeigen: $\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ ist $\cap$-stabil - denn dann $\xRightarrow{\text{Satz 11.11(e)}}$ $\mathrm{dyn}(\mathcal{E})\supseteq\mathcal{E}$ ist σ-Algebra.

Also: Für $X'\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ setze $\mathcal{D}_{X'} := \{A\subseteq X : A\cap X'\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})\}$

Beh: $\mathcal{D}_{X'}$ ist Dynkin-System

Bew.: (i) $X\in\mathcal{D}_{X'}$

(ii) $\mathcal{D}_{X'}$ ist $\setminus_{\supseteq}$-stabil: Seien $A, B\in\mathcal{D}_{X'}$ mit $A\supseteq B$.

Da nach V. $A\cap X'\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$, $B\cap X'\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ und $B\cap X'\subseteq A\cap X'$, folgt $(A\setminus B)\cap X' = (A\cap X')\setminus(B\cap X') \in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$,

d.h. $A\setminus B\in\mathcal{D}_{X'}$

(iii) $\mathcal{D}_{X'}$ ist $\dot{\bigcup}_\infty$-stabil: Sei $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{D}_{X'}$ paarweise disjunkt. N. Vor. $\{A_n\cap X'\}_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$

und paarweise disjunkt; damit

$$\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\Big)\cap X' = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}(A_n\cap X') \in \mathrm{dyn}(\mathcal{E})$$

– also $\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n \in \mathcal{D}_{X'}$ $\Rightarrow$ Beh.

Sei $B\in\mathcal{E}$ bel. fix $\overset{\mathcal{E}\ \cap\text{-stabil}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}_B$ $\overset{\mathcal{D}_B\ \text{Dyn.-sys}}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{dyn}(\mathcal{E})\subseteq \underset{\mathcal{D}_B}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{dyn}(\mathcal{D}_B)}}$

d.h. es gilt: $A\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})\wedge B\in\mathcal{E}$

$\Rightarrow A\cap B\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$; d.h. $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{D}_A$

also: $\mathrm{dyn}(\mathcal{E})\subseteq \underset{\mathcal{D}_A}{\underset{\shortparallel}{\mathrm{dyn}(\mathcal{D}_A)}}$ $\forall A\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$

d.h. $A, C\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E}) \Rightarrow A\cap C\in\mathrm{dyn}(\mathcal{E}) \Rightarrow \cap$-stabil ■

11.18. Definition Seien $A, A_n\subseteq X$ (d.h. $A, A_n\in\mathcal{P}(X)$) $\forall n\in\mathbb{N}$

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsende Folge* :$\Leftrightarrow$ $A_n\subseteq A_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$
  Notation: $A_n\uparrow A$, wobei $A:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$
- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fallende Folge* :$\Leftrightarrow$ $A_n\supseteq A_{n+1}$ $\forall n\in\mathbb{N}$
  Notation: $A_n\downarrow A$, wobei $A:=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
- $\mathcal{M}\subseteq\mathcal{P}(X)$ *monotone Klasse*
  :$\Leftrightarrow$ $\forall$ mon $\begin{Bmatrix}\text{wachsenden}\\ \text{fallenden}\end{Bmatrix}$ Folgen $(A_n)_n\subseteq\mathcal{M}$ gilt $\begin{cases}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\in\mathcal{M}\\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\in\mathcal{M}\end{cases}$
- Sei $\mathcal{E}\subseteq\mathcal{P}(X)$: $\mathrm{mon}(\mathcal{E})$ ist *kleinste monotone Klasse*, die $\mathcal{E}$ enthält.

Satz 11.19. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra. Dann gilt:

$$\mathrm{mon}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$$

Beweis: Übung.