11. Mengensysteme und Maße

11.1. Das Maßproblem

Archimedes (3. Jh. v. Chr.): Oberfläche und Volumen einer Kugel berechnet (im $\mathbb{R}^3$)

G. Cantor (1845–1918; Begründer der Mengenlehre)

Frage nach „Volumen" einer bel. Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$

E. Borel (1871–1956) & H. Lebesgue (1875–1941)

Formulieren das Maßproblem:

11.1. Definition (Maßproblem) Gesucht ist

Maßfunktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ mit den Eigenschaften

(a) σ-Additivität: $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

(abzählbar unendlich)

aus paarws. disjunkten Teilmengen (d.h. $A_n \cap A_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$),

gilt

$$\mu\left(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

($\dot{\cup}$ disj. ver.; siehe 1.22)

(b) Bewegungsinvarianz: $\forall$ Bewegung $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, d.h.

$|\beta(x) - \beta(y)| = |x-y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^d$, und

(Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$ – früher: $\|\cdot\|_2$)

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt: $\mu(\beta(A)) = \mu(A)$

(c) Normierung: $\mu\left([0,1]^d\right) = 1$

11.2. Satz (Vitali, 1905)

Für kein $d \in \mathbb{N}$ besitzt das Maßproblem 11.1 eine Lösung

- folgt z.B. aus Paradoxon von

11.3. Satz (Banach u. Tarski, 1924)

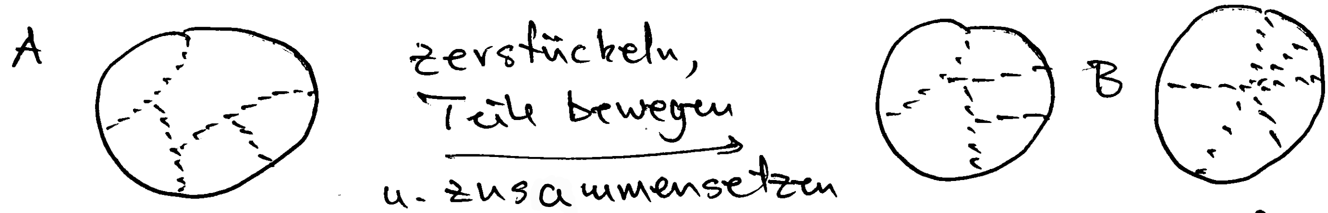
Sei $d \in \mathbb{N}$ und $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ mit nicht-leeren Inneren.
Dann $\exists C_k \subseteq \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$, und Bewegungen $\beta_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit

$$A = \dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} C_k \quad \text{und} \quad B = \dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} \beta_k(C_k)$$

[siehe z.B. Elstrodt für Referenzen]

11.4. Bemerkungen

(a) $A :=$ Kugel von Radius 1, $B :=$ 2 disj. Kugeln von Rad. 1



[Teile sind sehr(!) kompliziert - Auswahlaxiom zur Konstruktion]

(b) Für $d \geq 3$ und A, B zusätzlich beschränkt kommt man sogar mit endlich vielen Teilstücken C_k aus!

$\Rightarrow$ Inhaltsproblem (:= Maßproblem mit nur endlicher Additivität statt σ-Additivität) nicht lösbar für $d \geq 3$.

(c) Ausweg aus Dilemma: Schränke Def. bereich von μ auf echte Teilmenge („messbare Mengen") von $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ein, d.h. Teilstücke von Banach & Tarski dürfen nicht messbar sein.