B. Ausblicke

B.1. Hausdorffmaß

Um Gauß/Green/Stokes zu erweitern, zur Objekte mit "Kanten/Ecken" etc:

$\boxed{\text{B.1. Definition}}$ Sei $d \in \mathbb{N}$, $s > 0$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt Hausdorff-Nullmenge zur Dimension s $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \{W_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^d$, W_j achsenparaller Würfel mit Kantenlänge $r_j > 0$ so daß:

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} r_k^s < \varepsilon \quad (s > 0!)$$

B.2. Bemerkung: (a) $A \subseteq \mathbb{R}^d$ Hausdorff-Nullmenge zur Dim d
$\Leftrightarrow$ A Lebesgue-Nullmenge im $\mathbb{R}^d$ (siehe auch später)

(b) Für $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \underbrace{\{0\}}_{\mathbb{R}^{d-n}} \subseteq \mathbb{R}^d$: A Hausdorff-Nullmenge zur Dim n
$\Leftrightarrow$ "$A \subseteq \mathbb{R}^n$" ist Leb. Nullmenge im $\mathbb{R}^n$

(c) $s > 0$ muss nicht ganze Zahl sein! (siehe später).

$\boxed{\text{B.2. Definition}}$ (a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$; $a \in \partial G$ heißt regulärer Randpkt von G $:\Leftrightarrow$ $\exists\, \mathcal{U} \ni a$ offen und $\rho \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ mit $\rho'(x) \neq 0\ \forall x \in \mathcal{U}$ und

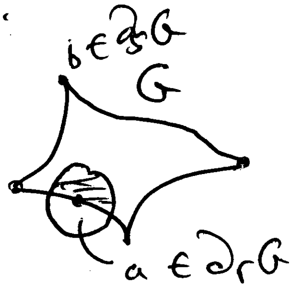
$$G \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} \mid \rho(x) \leq 0\}$$

(vergleiche 15.12).

Notation: $a \in \partial_r G$

(b) Wenn $a \in \partial G$ <u>nicht</u> regulär, heißt a <u>singulärer Randpkt</u> (<u>Notation</u>: $a \in \partial_s G$; d.h. $\partial_s G := \partial G \setminus \partial_r G$).

Es gilt: $\partial G = \partial_r G \dot{\cup} \partial_s G$



(c) G heißt <u>C^1-Polyeder im $\mathbb{R}^d$</u>

$:\Leftrightarrow$ $G \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $\partial_s G$ ist Hausdorff-Nullmenge zur Dim. $d-1$

($\partial_r G$ ist $(d-1)$-dim. C^1-Mfkt.) (Bild: $d=2$; $d-1=1$: $\partial_s G$ ist 1-Nullmenge).

B.3. Fakten (!) Man kann Gauß/Green/Stokes für C^1-Polyeder beweisen!! (Siehe dazu: Königsberger, "Analysis 2" (2004) Kap. 12, Kaballo, "Einführung in die Analysis III" (1999), Sätze 20.3, 20.11).

Allgemeiner zur Hausdorff-Maße (nicht nur Nullmengen):

B.4. Definition & Satz Sei $d \in \mathbb{N}$, $s \geq 0$ und $A \subseteq \mathbb{R}^d$

(a) Sei $$\eta_{s,\delta}(A) := \frac{\omega_s}{2^s} \cdot \inf\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_m))^s : A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m, \ \operatorname{diam}(A_m) < \delta \right\}$$

(wobei $\omega_s := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1+\frac{s}{2})}$, $s \geq 0$; für $s \in \mathbb{N}$: $\omega_s = \lambda^s(B_1^{(s)}(0))$ Üb. 10.2 (ii)).

(b) Sei $$\eta_s(A) := \sup_{\delta > 0} \eta_{s,\delta}(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \eta_{s,\delta}(A) \in [0,\infty]$$

$(\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow \eta_{s,\delta_1}(A) \geq \eta_{s,\delta_2}(A))$

Dann ist, $\forall s \geq 0$,

$\eta_s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ <u>äußeres Maß</u> (auf $\mathbb{R}^d$)

(siehe 11.29)

Das diesbzgl. Maß (aus Carathéodory, Satz 11.32) $\mathcal{H}^s$ auf $\mathbb{R}^d$ wird s-dimensionale Hausdorff-Maß genannt ($s \geq 0$)

(c) Alle Borelmengen sind γ_s-messbar (d.h. $\mathcal{H}^s$-messbar).

B.5. Bemerkung: Wie beim Lebesgue-Maß ist es schwierig die $\mathcal{H}^s$-messbaren Mengen anzugeben. B.4. (c) folgt aus:

B.6. Satz Ein äußeres Mass μ auf $\mathbb{R}^d$ ist genau dann metrisch, wenn alle Borelmengen μ-messbar sind.

Hier ist:

B.7. Definition (Carathéodory) Ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^d$ heisst metrisch :⟺

$$d(A,B) > 0 \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \quad A, B \subseteq \mathbb{R}^d$$

Wichtigsten Eigenschaften von $\mathcal{H}^s$ (zeigt, daß $\mathcal{H}^s$ Verallgemeinerung von sowohl Lebesguemaß λ^d als Flächenmaß λ_M!):

B.8. Satz Sei $s \geq 0$ und $\mathcal{H}^s$ s-dim. Hausdorffmaß auf $\mathbb{R}^d$. Setze, für $E \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\dim(E) := \inf\{ s \in [0, \infty[: \mathcal{H}^s(E) = 0 \}$$

(Hausdorff-dimension von $E \subseteq \mathbb{R}^d$).

Dann gilt:

(i) $\forall E \subseteq \mathbb{R}^d$: $\dim E \in [0,d]$;

$\mathcal{H}^s(E) = +\infty \quad \forall s < \dim(E)$

$\mathcal{H}^s(E) \in \,]0,\infty[\;\Rightarrow\; s = \dim(E)$

("$\Leftarrow$" gilt nicht: es kann $\mathcal{H}^s(E) \in \{0,\infty\}$ sein für $s = \dim(E)$)

(ii) $\mathcal{H}^s(\alpha E) = \alpha^s \mathcal{H}^s(E)$, $\alpha > 0$ (vergleiche Bsp. 14.14(b))

(iii) $\mathcal{H}^s$ ist Bewegungsinvariant (vergleiche Bsp. 14.23)

(iv) $s > d \Rightarrow \mathcal{H}^s(E) = 0$

(v) $\forall s \in [0,d] \;\exists K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt mit $\dim(K) = s$

(vi) $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen $\Rightarrow \dim(A) = d$

(vii) $\mathcal{H}^0$ ist Zählmaß auf $\mathbb{R}^d$

(viii) $\mathcal{H}^d(E) = \lambda^d(E)$

(ix) Für $E = \Gamma_\kappa$ C^1-Kurvenbogen: $\mathcal{H}^1(E) = \ell(\kappa)$
(Kurvenlänge)

(x) Sei $1 \le n \le d-1$, $n \in \mathbb{N}$, und E n-dim. C^1-Mfkt; dann ist $\mathcal{H}^n(E) = \lambda_E(E)$

Siehe Brakate & Kersting,

Maggi, "Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems"

(& Literatur zur "geometrische Maßtheorie").

Stichwort: "Minimal-Flächen"

B.2. Differentialformen

In viele Darstellungen von Analysis 3 – und in der Differentialgeometrie – wird "Satz von Stokes" über Differentialformen formuliert: Es wird ein Integrationstheorie von „glatte Diff.formen" ω aufgebaut und gezeigt, daß

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Dabei sind ω Multilineare Abbildungen (gewisse), auf Tangentialraum $T_a M$, die glatt von $a \in M$ abhängen.

(Siehe dazu Jähnich; Königsberger (Kap. 13); Amann-Escher; Forster.)