11. Mengensysteme und Maße

11.1. Das Maßproblem

Archimedes (3. Jh. v. Chr.): Oberfläche und Volumen einer Kugel berechnet (im $\mathbb{R}^3$)

G. Cantor (1845–1918; Begründer der Mengenlehre)

Frage nach „Volumen" einer bel. Teilmenge des $\mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$

E. Borel (1871–1956) & H. Lebesgue (1875–1941)

Formulieren das Maßproblem:

11.1. Definition (Maßproblem) Gesucht ist Maßfunktion $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ mit den Eigenschaften

(a) σ-Additivität: $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

(abzählbar unendlich)

aus paarws. disjunkten Teilmengen (d.h. $A_n \cap A_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$),

gilt

$$\mu\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$$

($\dot{\cup}$ disj. Ver.; siehe 1.22)

(b) Bewegungsinvarianz: $\forall$ Bewegung $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, d.h.

(Euklidische Norm auf $\mathbb{R}^d$ – früher: $\|\cdot\|_2$)

$|\beta(x) - \beta(y)| = |x-y|$ $\forall x,y \in \mathbb{R}^d$, und

$\forall A \subseteq \mathbb{R}^d$ gilt: $\mu(\beta(A)) = \mu(A)$

(c) Normierung: $\mu([0,1]^d) = 1$

11.2. Satz (Vitali, 1905)

Für kein $d \in \mathbb{N}$ besitzt das Maßproblem 11.1 eine Lösung

- folgt z.B. aus Paradoxon von

11.3. Satz (Banach u. Tarski, 1924)

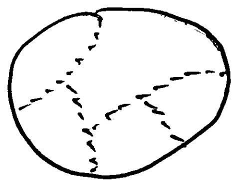
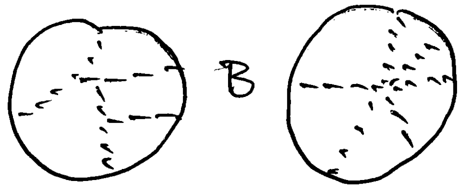
Sei $d \in \mathbb{N}$ und $A, B \subseteq \mathbb{R}^d$ mit nicht-leeren Inneren.
Dann $\exists C_k \subseteq \mathbb{R}^d$, $k \in \mathbb{N}$, und Bewegungen $\beta_k : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ mit

$$A = \dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} C_k \quad \text{und} \quad B = \dot{\bigcup_{k \in \mathbb{N}}} \beta_k(C_k)$$

[siehe z.B. Elstrodt für Referenzen]

11.4. Bemerkungen

(a) $A :=$ Kugel von Radius 1, $B :=$ 2 disj. Kugeln von Rad. 1

A  zerstückeln, Teile bewegen u. zusammensetzen  B

[Teile sind sehr(!) kompliziert – Auswahlaxiom zur Konstruktion]

(b) Für $d \geq 3$ und A, B zusätzlich beschränkt kommt man sogar mit endlich vielen Teilstücken C_k aus!

$\Rightarrow$ Inhaltsproblem (:= Maßproblem mit nur endlicher Additivität statt σ-Additivität) nicht lösbar für $d \geq 3$.

(c) Ausweg aus Dilemma: Schränke Def. bereich von μ auf echte Teilmenge („messbare Mengen") von $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ ein, d.h. Teilstücke von Banach & Tarski dürfen nicht messbar sein.

11.2. Mengensysteme

11.5. Definition Sei X Menge, sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ Menge (auch: Familie) von Teilmengen von X.

- $\mathcal{A}$ ist ^{c}-stabil $:\Leftrightarrow (A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A})$

(komplementstabil)

- Sei $\curlyvee$ eine der Mengenoperationen $\cup, \cap, \setminus, \Delta$

sym. Differenz: $A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$

$\mathcal{A}$ ist $\curlyvee$-stabil

$:\Leftrightarrow (A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \curlyvee B \in \mathcal{A})$

- $\mathcal{A}$ ist $\setminus_{\supseteq}$-stabil $:\Leftrightarrow (A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \supseteq B \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A})$
- $\mathcal{A}$ ist $\dot{\cup}$-stabil $:\Leftrightarrow (A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset \Rightarrow A \dot{\cup} B \in \mathcal{A})$
- $\mathcal{A}$ ist $\cup_\infty$-stabil $:\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N} \\ \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A} \end{array} \right.$

(stabil bzgl. abz. Vereinigung)

analog: $\cap_\infty$-, $\dot{\cup}_\infty$-stabil

11.6. Lemma Seien X, X' Mengen, sei $\curlyvee$ eine Mengenoperation aus Def. 11.5.

(a) Sei $T: X' \to X$ eine Abb., $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$,

$$\mathcal{A}' := T^{-1}(\mathcal{A}) := \{ \underbrace{T^{-1}(A)}_{:= \{x' \in X' : T(x') \in A\}} : A \in \mathcal{A} \} \subseteq \mathcal{P}(X')$$

Dann gilt:

$$\mathcal{A} \text{ ist } \curlyvee\text{-stabil} \Rightarrow \mathcal{A}' \text{ ist } \curlyvee\text{-stabil}$$

(b) Sei $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge und $\forall j \in J$ sei $\mathcal{A}_j \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gilt:

$$(\mathcal{A}_j \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil } \forall j \in J) \Rightarrow (\bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil})$$

Beweis. Nachrechnen,

(a) z. B. sei $\mathcal{A}$ $\cup$-stabil und sei $A', B' \in \mathcal{A}'$

$\Rightarrow \exists A, B \in \mathcal{A}$ mit $A' = T^{-1}(A)$, $B' = T^{-1}(B)$

$\Rightarrow A' \cup B' = T^{-1}(A \cup B) \in \mathcal{A}'$, usw ...

(b) z. B. seien $\mathcal{A}_j$ $\cap$-stabil $\forall j \in J$.

Seien $A, B \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}_j \Rightarrow \underbrace{A, B \in \mathcal{A}_j \;\forall j \in J}_{} \overset{n.V.}{\Rightarrow} A \cap B \in \mathcal{A}_j$

$\Rightarrow A \cap B \in \bigcap_{j \in J} \mathcal{A}$, usw... $\blacksquare$

11.7. Korollar Sei $X' \subseteq X$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und

$$\mathcal{A}' := \mathcal{A} \cap X' := \{A \cap X' : A \in \mathcal{A}\} \text{ (Spur von } \mathcal{A} \text{ in } X')$$

Dann gilt $\forall$ Mengenop. Υ aus Def. 11.5.:

$$\mathcal{A} \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil} \Rightarrow \mathcal{A}' \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil}$$

Beweis:

$$\mathcal{A}' = T^{-1}(\mathcal{A}) \text{ für Einbettung } T : X' \to X,\; x' \mapsto x'$$

und Lemma 11.6 (a). $\blacksquare$

11.8. Korollar Sei $\mathbb{Y}$ eine Menge der in Def. 11.5. erklärten Mengenoperationen Υ, sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$. Dann $\exists$ kleinstes Mengensystem $\mathcal{E}^{\mathbb{Y}} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$ mit

- $\mathcal{E}^{\mathbb{Y}}$ ist Υ-stabil $\forall\, \Upsilon \in \mathbb{Y}$
- $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{E}^{\mathbb{Y}}$

Erzeuger ↗ ↖ von $\mathcal{E}$ erzeugtes System (bzgl. $\mathbb{Y}$)

Beweis Lemma 11.6 (b) und

$$\mathcal{E}^{\mathbb{Y}} := \bigcap_{\substack{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X):\, \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A},\\ \mathcal{A} \text{ ist } \Upsilon\text{-stabil } \forall \Upsilon \in \mathbb{Y}}} \mathcal{A} \qquad \blacksquare$$

11.9. Definition und Satz (Mengensysteme $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{X})$)

Definition: $\mathcal{A}$ ist		enthält $\emptyset$	enthält $\mathbb{X}$	stabil unter $\cup$	$\dot\cup$	$\cap$	$\cup_\infty$	$\dot\cup_\infty$	$\cap_\infty$	$\setminus$	$\setminus_{\supseteq}$	Δ	c
Ring	• $\emptyset \in \mathcal{A}$ • $\setminus$-stabil • $\cup$-stabil	✓		✓	✓	✓				✓	✓	✓	
Algebra	• $X \in \mathcal{A}$ • ^{c}-stabil • $\cup$-stabil	✓	✓	✓	✓	✓				✓	✓	✓	✓
σ-Algebra	• $X \in \mathcal{A}$ • ^{c}-stabil • $\cup_\infty$-stabil	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Dynkin-System	• $X \in \mathcal{A}$ • $\setminus_{\supseteq}$-stabil • $\dot\cup_\infty$-stabil	✓	✓		✓			✓			✓		✓

Beweis: Verwende: $A \cap B = (A^c \cup B^c)^c$, $A \cap B = A \setminus (A \setminus B)$
$A^c = X \setminus A$, $A \setminus B = A \cap B^c$, ...

11.10. Beispiele: (i) $\mathcal{P}(X)$ ist σ-Algebra

(ii) $\mathcal{A} := \{$endliche Teilmengen von $X\}$ ist Ring
(und (σ-) Algebra $\Leftrightarrow$ X endlich)

(iii) Topologie $\mathcal{T}$ auf X ist i.A. keines der Syst. aus 11.9

(iv) kleinste σ-Algebra, die $A \subseteq X$ enthält:
$$\sigma(A) := \sigma(\{A\}) := \{\emptyset, X, A, A^c\}$$

(v) Sei $\mathcal{I} := \{[a,b[\; : a \leq b, a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$
Mengensystem rechtshalboffener Intervalle
$\Rightarrow \mathcal{F} := \{\bigcup_{j=1}^{n} A_j : A_j \in \mathcal{I}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ endl. Vereinig. davon
ist Ring (Übung!)

$\boxed{\text{11.11 Satz}}$ (Alternative Charakterisierungen)

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Dann gilt:

(a) $\mathcal{A}$ ist Ring $\Leftrightarrow$ ($\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist Δ- und $\cap$-stabil)

(b) $\mathcal{A}$ ist Ring $\Leftrightarrow$ ($\emptyset \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist Δ- und $\cup$-stabil)

(c) $\mathcal{A}$ ist Algebra $\Leftrightarrow$ ($X \in \mathcal{A}$, $\mathcal{A}$ ist ^{c}- und $\cap$-stabil)

(d) $\mathcal{A}$ ist Algebra $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{A}$ ist Ring und $X \in \mathcal{A}$)

(e) $\mathcal{A}$ ist σ-Algebra $\Leftrightarrow$ ($\mathcal{A}$ ist Dynkin-System und $\cap$-stabil).

Beweis: Übung! Für „$\Leftarrow$" von (e) verwende:

11.12. Lemma Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\dot\cup$-stabil, $\setminus$-stabil und sei $A_n \in \mathcal{A}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\forall n \in \mathbb{N}$ $\exists B_n \in \mathcal{A}$ mit

(i) $B_n \subseteq A_n \quad \forall n$

(ii) $B_n \cap B_m = \emptyset, \quad \forall n \neq m$ (paarw. disj.)

(iii) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \dot\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$

Beweis: Setze $B_1 := A_1 \in \mathcal{A}$ und definiere induktiv

$$B_{n+1} := A_{n+1} \setminus \Big(\dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j \Big) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

also: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt: $B_n \subseteq A_n$, und $B_{n+1} \cap B_j = \emptyset$ $\forall j \in \{1, \dots, n\}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \quad B_{n+1} = A_{n+1} \setminus \Big(\dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j \Big) \in \mathcal{A}$

außerdem $\forall n \in \mathbb{N}$: $\bigcup_{j=1}^{n+1} A_j = \dot\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j$ ($n=0$: klar)

Bew. mit Ind.: $n=1$: $\underbrace{A_1}_{B_1} \cup A_2 = B_1 \cup (\underbrace{A_2 \setminus B_1}_{B_2}) = B_1 \dot\cup B_2$

$n \to n+1$: gelte $\dot\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j$

$$\Rightarrow \bigcup_{j=1}^{n+1} A_j = A_{n+1} \cup \underbrace{\Big(\dot\bigcup_{j=1}^{n} B_j \Big)}_{=:Z} = \underbrace{(A_{n+1} \setminus Z)}_{B_{n+1}} \dot\cup Z = \dot\bigcup_{j=1}^{n+1} B_j \qquad \blacksquare$$

11.13. Definition

(a) Für $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ sei $\sigma(\mathcal{E})$ die kleinste σ-Algebra, die $\mathcal{E}$ enthält; $\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ das kleinste Dynkin-System, das $\mathcal{E}$ enthält (Existiert nach Kor. 11.8.).

Erzeuger

(b) Sei $(X, \mathcal{T})$ topologischer Raum

$\sigma(\mathcal{T})$ heißt Borel-σ-Algebra auf X (zu $\mathcal{T}$)

$A \subseteq X$ Borel-Menge $:\Longleftrightarrow$ $A \in \sigma(\mathcal{T})$

Speziell für $X = \mathbb{R}^d$, $d \in \mathbb{N}$: $\mathcal{B}^d := \sigma(\mathcal{T}_{\text{euklidische}})$

σ-Algebra der Borel-Mengen in $\mathbb{R}^d$ $(\mathcal{B} := \mathcal{B}^1)$

$\boxed{\text{11.14. Satz}}$ $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{I}^d) = \sigma(\mathcal{F}^d)$, wobei

$$\mathcal{I}^d := \left\{ \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [a_\alpha, b_\alpha[\; : \; a_\alpha, b_\alpha \in \mathbb{R} \text{ mit } a_\alpha \le b_\alpha \; \forall \alpha = 1, \dots, d \right\}$$

$\mathcal{F}^d$: Ring der endl. Vereinigungen d-dim rechtshalb offener Quader $\in \mathcal{I}^d$

Beweis: mittels Lemma 11.16 (unten) $\rightsquigarrow$ Übung! ∎

11.15. Bemerkung

(a) Wo und ob Intervalle in Def. von $\mathcal{I}^d$ offen, ist für die Aussage von Satz 11.14 egal.

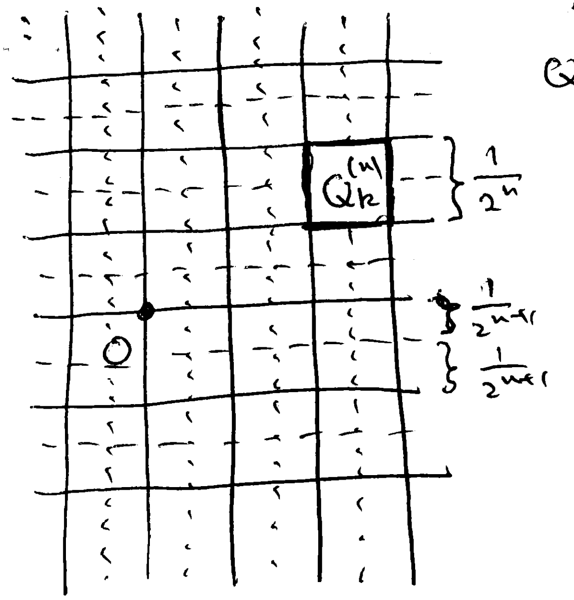
(b) $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\text{abgeschl. Mengen}) = \sigma(\text{Kompakta})$, siehe Üb.

$\uparrow$ X σ-kompakter Hausdorff-Raum. $\left(X = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, K_n \text{ kpt.}\right)$

$\boxed{\text{11.16. Lemma}}$ Sei $U \subseteq \mathbb{R}^d$ offen.

Dann ist U abzählbare Vereinigung abgeschlossener Quader $\bigtimes_{\alpha=1}^{d} [a_\alpha, b_\alpha]$ mit disjunkten Inneren.

Beweis:



n-Gitter im $\mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{N}_0$, mit Quadern $Q_k^{(n)} := \bigtimes_{\alpha=1}^{d} \left[\frac{k_\alpha}{2^n}, \frac{k_\alpha + 1}{2^n}\right]$, $k \in \mathbb{Z}^d$

wird verfeinert durch $(n+1)$-Gitter

$$\mathbb{R}^d = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^d} Q_k^{(n)} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$\uparrow$ disjunktes Inneres.

Setze: $\mathcal{U}_0 := \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d: \\ Q_k^{(0)} \subset \mathcal{U}}} Q_k^{(0)}$; $\mathcal{U}_n := \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{Z}^d: Q_k^{(n)} \subset \mathcal{U} \\ \wedge\, Q_k^{(n)} \not\subset \bigcup_{\nu=0}^{n-1} \mathcal{U}_\nu}} Q_k^{(n)}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow \mathcal{U} = \underbrace{\bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \mathcal{U}_n}_{=: \mathcal{U}'}$, denn $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ klar, und $\forall x \in \mathcal{U}$ gilt (da $\mathcal{U}$ offen): $\exists r > 0$: Ball $B_r(x) \subset \mathcal{U}$, da $|\cdot|_2$ u. $|\cdot|_\infty$-Norm äquiv. auf $\mathbb{R}^d$ $\Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{Z}^d, n_0 \in \mathbb{N}_0$ mit $x \in Q_{k_0}^{(n_0)} \subset B_r(x) \subset \mathcal{U}$

($|\cdot|_p$ als $\|\cdot\|_p$ in Ana 2 notiert)

– also auch $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$ ∎

Die Nützlichkeit von Dynkin-Systemen beruht auf:

$\boxed{\text{11.17. Satz}}$ Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$ $\cap$-stabil. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{E}) = \mathrm{dyn}(\mathcal{E})$$

Beweis: $\sigma(\mathcal{E}) \supseteq \mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ klar, da $\sigma(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{E}$ selbst Dynkin-System.

Für „$\subseteq$" genügt zu zeigen: $\mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ ist $\cap$-stabil – denn dann $\overset{\text{Satz 11.11(e)}}{\Longrightarrow}$ $\mathrm{dyn}(\mathcal{E}) \supseteq \mathcal{E}$ ist σ-Algebra.

Also: Für $X' \in \mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ setze $\mathcal{D}_{X'} := \{A \subseteq X : A \cap X' \in \mathrm{dyn}(\mathcal{E})\}$

Beh: $\mathcal{D}_{X'}$ ist Dynkin-System

Bew.: (i) $X \in \mathcal{D}_{X'}$

(ii) $\mathcal{D}_{X'}$ ist $\setminus_\supseteq$-stabil: Seien $A, B \in \mathcal{D}_{X'}$ mit $A \supseteq B$.

Da nach V. $A \cap X' \in \mathrm{dyn}(\mathcal{E})$, $B \cap X' \in \mathrm{dyn}(\mathcal{E})$ und $B \cap X' \subseteq A \cap X'$, folgt $(A \setminus B) \cap X' = (A \cap X') \setminus (B \cap X') \in \mathrm{dyn}(\mathcal{E})$,

d.h. $A \setminus B \in \mathcal{D}_{X'}$

(iii) $\mathcal{D}_{X'}$ ist $\dot{\bigcup}_\infty$-stabil: Sei $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{X'}$ paarweise disjunkt. N. Vor. $\{A_n \cap X'\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathrm{dyn}(\mathcal{E})$

und paarweise disjunkt; damit

$$\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n\Big) \cap X' = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}}(A_n \cap X') \in \operatorname{dyn}(\mathcal{E})$$

– also $\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n \in \mathcal{D}_{X'}$ $\Rightarrow$ Beh.

Sei $B \in \mathcal{E}$ bel. fix $\overset{\mathcal{E}\ \cap\text{-stabil}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_B$ $\overset{\mathcal{D}_B \text{ Dyn.-sys}}{\Longrightarrow}$ $\operatorname{dyn}(\mathcal{E}) \subseteq \underbrace{\operatorname{dyn}(\mathcal{D}_B)}_{=\mathcal{D}_B}$

d.h. es gilt: $A \in \operatorname{dyn}(\mathcal{E}) \wedge B \in \mathcal{E}$

$\Rightarrow A \cap B \in \operatorname{dyn}(\mathcal{E})$; d.h. $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_A$

also: $\operatorname{dyn}(\mathcal{E}) \subseteq \underbrace{\operatorname{dyn}(\mathcal{D}_A)}_{=\mathcal{D}_A}$ $\quad \forall A \in \operatorname{dyn}(\mathcal{E})$

d.h. $A, C \in \operatorname{dyn}(\mathcal{E}) \Rightarrow A \cap C \in \operatorname{dyn}(\mathcal{E}) \Rightarrow \cap$-stabil ∎

11.18. Definition Seien $A, A_n \subseteq X$ (d.h. $A, A_n \in \mathcal{P}(X)$) $\forall n \in \mathbb{N}$

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsende Folge* $:\Leftrightarrow A_n \subseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

  Notation: $A_n \uparrow A$, wobei $A := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$

- $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton fallende Folge* $:\Leftrightarrow A_n \supseteq A_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

  Notation: $A_n \downarrow A$, wobei $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

- $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(X)$ *monotone Klasse*

  $:\Leftrightarrow \forall$ mon $\left\{\begin{matrix}\text{wachsenden}\\ \text{fallenden}\end{matrix}\right\}$ Folgen $(A_n)_n \subseteq \mathcal{M}$ gilt $\left\{\begin{matrix}\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}\\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}\end{matrix}\right.$

- Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(X)$: $\operatorname{mon}(\mathcal{E})$ ist *kleinste monotone Klasse*, die $\mathcal{E}$ enthält.

Satz 11.19. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra. Dann gilt:

$$\operatorname{mon}(\mathcal{A}) = \sigma(\mathcal{A})$$

Beweis: Übung.

11.3. Inhalte und Maße

11.20. Definition Sei $\mathcal{R}$ ein Ring von Mengen

- $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ heißt Inhalt $:\Leftrightarrow$
  (i) $\mu(\emptyset) = 0$
  (ii) Additivität: $\forall n \in \mathbb{N}\ \forall j \in \{1,..,n\}\ \forall A_j \in \mathcal{R}$ mit $A_j \cap A_k = \emptyset\ \forall j \neq k$ gilt:
  $$\mu\Big(\dot{\bigcup_{j=1}^{n}} A_j\Big) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$
- μ ist stetiger Inhalt (oder: Prämaß)
  $:\Leftrightarrow$ μ ist Inhalt und es gilt die über (ii) hinausgehende σ-Additivität:
  (iii) $\forall A_j \in \mathcal{R},\ j \in \mathbb{N}$, mit
  - $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$
  - $A_j \cap A_k = \emptyset\ \forall j \neq k$

  gilt: $\mu\Big(\dot{\bigcup_{j \in \mathbb{N}}} A_j\Big) = \sum_{j \in \mathbb{N}} \mu(A_j)$
- Falls $\mathcal{R}$ sogar eine σ-Algebra, und μ ein stetiger Inhalt auf $\mathcal{R}$, so heißt μ Maß (auf $\mathcal{R}$). [In diesem Fall ist Bed. $\bigcup_{j \in \mathbb{N}} A_j \in \mathcal{R}$ in (iii) stets erfüllt!]

11.21. Konvention ! !

Abweichend von den bisherigen Rechenregeln in $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$

(siehe Def. 3.5 & Zusatz zu Satz 3.6)

sei nun $\quad 0 \cdot (\pm\infty) = \pm\infty \cdot 0 := 0$

NB: $\infty - \infty$, $-\infty + \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ sind weiter nicht definiert!

11.22. Definition

Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $m : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Abb. Dann heißt m

- endlich $:\iff |m(A)| < \infty \quad \forall A \in \mathcal{A}$
- σ-endlich $:\iff \exists$ Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ mit
  - $X = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} X_k$
  - $|m(X_k)| < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}$
- normiert $:\iff X \in \mathcal{A}$ und $m(X) = 1$
- Wahrscheinlichkeitsmaß $:\iff \mathcal{A}$ ist σ-Algebra und m normiertes Maß

11.23. Beispiele

(a) X abzählbar, $\mathcal{A} := \mathcal{P}(X)$ [σ-Algebra!]

$$\mu(A) := |A| := \#\{x \in X : x \in A\} \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

$\rightsquigarrow$ Zählmaß auf X

(Details checken! Üb.).

(b) Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra, $x \in X$, und

sei $\mu(A) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

$\rightsquigarrow$ in x konzentriertes Dirac-Maß $\mu =: \delta_x$
(Einheitsmasse in x) W.-Maß!

(c) Sei $\mathcal{F}$ der Ring der endl. Vereinigungen rechtshalboffener Intervalle $[a,b[$ in $\mathbb{R}$ (vgl. Bsp. 11.10(v) und Satz 11.14). Sei $G: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ isoton u. linksseitig stetig. Die Zuordnung $[a,b[\longmapsto G(b) - G(a)$ für $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$ induziert (Übung!) stetigen Inhalt μ_G auf Ring $\mathcal{F}$

Speziell $\lambda := \mu_{id}$ heißt (1-dim.) Lebesgue-Prämaß (d.h. $\lambda([a,b[) = b-a$).

$\boxed{11.24. \text{ Satz}}$ Sei μ Inhalt auf Ring $\mathcal{R}$, $A, B \in \mathcal{R}$ und $(A_n)_n \subseteq \mathcal{R}$. Dann gilt:

(a) $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$

(b) $A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$ Monotonie

(c) $A \subseteq B \wedge \mu(A) < \infty \Rightarrow \mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$ Subtraktivität

(d) $\forall n \in \mathbb{N}: \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$ Sub-Additivität

(e) Falls $A_n \cap A_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$ und $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{R}$

$\Rightarrow \mu\left(\dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} A_n\right) \geq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$ Super-σ-Additivität

<u>Beweis</u>: (b), (c) aus $B = (B\setminus A) \dot\cup A \Rightarrow \mu(B) = \mu(B\setminus A) + \mu(A)$

(a) $\left.\begin{array}{l} A\cup B = A \dot\cup (B\setminus A) \Rightarrow \mu(A\cup B) = \mu(A) + \mu(B\setminus A) \\ B = (A\cap B) \dot\cup (B\setminus A) \Rightarrow \mu(B) = \mu(A\cap B) + \mu(B\setminus A) \end{array}\right\} \Rightarrow$ Beh.,

durch Auflösen 2. Glg. nach $\mu(B\setminus A)$, falls $\mu(A\cap B) < \infty$.
Falls $\mu(A\cap B) = \infty$ ($\Rightarrow \mu(A) = \infty$) ist Beh. trivial.

(d) Lemma 11.12. $\Rightarrow \exists\, B_1, \dots, B_n \in \mathcal{R}$, paarw. disjunkt mit

$$\bigcup_{j=1}^n A_j = \dot\bigcup_{j=1}^n B_j \quad \text{und} \quad B_j \subseteq A_j \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

(siehe Bew. von Lemma 11.12)

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcup_{j=1}^n A_j\Big) = \mu\Big(\dot\bigcup_{j=1}^n B_j\Big) = \sum_{j=1}^n \underbrace{\mu(B_j)}_{\overset{(b)}{\le} \mu(A_j)} \quad ✓$$

(e) Sei $A := \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ($\in \mathcal{R}$ n.V.), $\forall N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{n=1}^N \mu(A_n) = \mu\Big(\underbrace{\dot\bigcup_{n=1}^N A_n}_{\subseteq A}\Big) \overset{(b)}{\le} \mu(A)$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \le \mu(A) \quad ✓$$

$\uparrow$ existiert in $[0,\infty]$

∎

Charakterisierung der Stetigkeit von Inhalten:

11.25. Satz Sei $\mathcal{R}$ Ring, μ Inhalt auf $\mathcal{R}$. Definiere folgende Eigenschaften:

(i) μ ist stetiger Inhalt.

(ii) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) \quad (\text{Stetigkeit von unten})$$

(iii) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow A \in \mathcal{R}$
<u>und</u> $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A) \qquad (\text{Stetigkeit von oben})$$

(iv) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow \emptyset$
<u>und</u> $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$ gilt:
$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0 \qquad (\text{Stetig in } \emptyset)$$

(v) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \downarrow A \in \mathcal{R}$ <u>und</u>
$\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ <u>und</u> $\exists \varepsilon > 0 \ \forall n \in \mathbb{N}: \mu(A_n) \geq \varepsilon$
gilt: $\qquad A \neq \emptyset$

Dann bestehen die Implikationen
$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Rightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv) \Leftrightarrow (v)$$
Ist μ <u>endlich</u>, so gilt auch $(iii) \Rightarrow (ii)$.

11.26. Bemerkung

Die Bed. „$\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\mu(A_{n_0}) < \infty$" in (iii) – (v) ist wesentlich:

Betrachte Zählmaß μ auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ [Bsp. 11.23(a)]
und $A_n := \{n, n+1, \ldots\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$; $A_n \supseteq A_{n+1}$.
Somit $A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$, aber $\mu(A_n) = \infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Beweis von Satz 11.25.

(i) $\Rightarrow$ (ii): Sei $A_n \uparrow A \in \mathcal{R}$. Gemäß Lemma 11.12
$\left(A_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)$ $\exists (B_n)_n \subseteq \mathcal{R}$, $B_n \cap B_m = \emptyset$ $\forall n \neq m$ mit
$$A_n = \dot{\bigcup_{j=1}^{n}} B_j \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad \text{und} \qquad A = \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} B_n$$

n. V. gilt $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \mu(B_j)}_{\mu(A_n)}$ μ Inhalt ✓

(ii) ⇒ (i): Sei $(B_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ Folge paarweise disjunkter Mengen mit $B := \dot{\bigcup}_{j\in\mathbb{N}} B_j \in \mathcal{R}$. Setze $A_n := \dot{\bigcup}_{j=1}^{n} B_j \in \mathcal{R}$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$\Rightarrow A_n \nearrow B \in \mathcal{R} \overset{(ii)}{\Rightarrow} \mu(B) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{\sum_{j=1}^{n}\mu(B_j)} \overset{\mu \text{ Inhalt}}{=} \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(B_j)$$

– also ist μ σ-additiv ✓

(ii) ⇒ (iii): Sei $A_n \searrow A \in \mathcal{R}$ mit o. E. $\mu(A_1) < \infty$

$\overset{\text{Satz 11.24(c)}}{\underset{A_n\subseteq A_1}{\Rightarrow}}$ $\forall n\in\mathbb{N}: \mu(A_1\setminus A_n) = \mu(A_1) - \mu(A_n)$

n. V. gilt $(A_1\setminus A_n) \nearrow (A_1\setminus A) \in \mathcal{R}$

$$\overset{(ii)}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_1\setminus A_n)}_{\mu(A_1)-\mu(A_n)} = \underbrace{\mu(A_1\setminus A)}_{\mu(A_1)-\mu(A)} \text{ Satz 11.24(c)} \Rightarrow \text{Beh.}$$ ✓

benötigt $\mu(A_1) < \infty$.

(iii) ⇔ (iv): "⇒" klar; "⇐" aus: $A_n\setminus A \in \mathcal{R}$

$\Rightarrow \underbrace{(A_n\setminus A)}_{\in \mathcal{R}} \searrow \emptyset$ ✓

(iii) ⇒ (v): Sei $A_n \searrow A \in \mathcal{R}$ und $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0\in\mathbb{N}$ und $\mu(A_n) \geq \varepsilon$ $\forall n$

$$\Rightarrow \mu(A) \overset{(iii)}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A_n)}_{\geq \varepsilon \text{ n. V. } \forall n} \geq \varepsilon > 0$$

$\overset{\text{Def. 11.20(i)}}{\Rightarrow}$ $A \neq \emptyset$

(v) ⇒ (iv): Sei $A_n \searrow \emptyset \in \mathcal{R}$, $\mu(A_{n_0}) < \infty$ für ein $n_0\in\mathbb{N}$

Ann.: $\mu(A_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ falsch.

Dann $\exists \varepsilon > 0 : \mu(A_n) \geq \varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$ (NB: $\mu(A_n)$ fallend!).

$$\overset{(v)}{\Rightarrow} \quad A := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset \quad ⚡.$$

Sei nun zusätzlich μ endlich! Dann:

(iv) => (ii): Sei $A_n \nearrow A \in \mathcal{R} \Rightarrow (A \setminus A_n) \downarrow \emptyset$

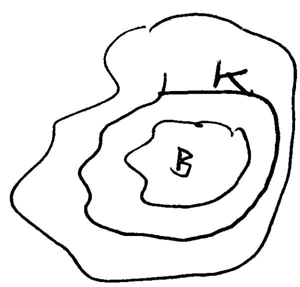
$$\overset{\mu \text{ endlich}}{\underset{\& \text{ (iv)}}{\Rightarrow}} \quad 0 = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(A \setminus A_n)}_{\mu(A) - \mu(A_n)} \quad \text{Satz 11.24(c)} \quad \overset{\mu \text{ endlich}}{\Rightarrow} \quad \text{Beh.} \qquad \blacksquare$$

Satz 11.25 liefert handliches Stetigkeitskrit. für Anwendungen:

11.27. Satz (Approximation mit Kompakta).
Sei X Hausdorff-Raum und μ endlicher Inhalt auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Falls: $\forall A \in \mathcal{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists K \subseteq X$ kompakt und $B \in \mathcal{R}$ mit

$$B \subseteq K \subseteq A \quad \text{und} \quad \mu(A \setminus B) < \varepsilon$$

dann ist μ stetiger Inhalt.



Beweis: Wir verifizieren Kriterium (v) in Satz 11.25.
Sei $A_n \downarrow A \in \mathcal{R}$ mit $\mu(A_n) \geq \varepsilon \ \forall n$ für ein $\varepsilon > 0$.
n. V. existiert zu jedem A_n ein $K_n \subseteq X$ kompakt und $B_n \in \mathcal{R}$ mit $B_n \subseteq K_n \subseteq A_n$ und $\mu(A_n \setminus B_n) < 2^{-(n+1)} \varepsilon$

Es gilt $B_n = A_n \setminus (A_n \setminus B_n) \ \forall n \in \mathbb{N}$ und

$$\forall N \in \mathbb{N}: \bigcap_{n=1}^{N} B_n = \left(\bigcap_{n=1}^{N} A_n\right) \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{N} (A_n \setminus B_n)\right)$$

$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{N} B_n\Big) \geq \mu\Big(\underbrace{\bigcap_{n=1}^{N} A_n}_{A_N}\Big) - \underbrace{\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{N}(A_n\setminus B_n)\Big)}_{\leq \sum_{n=1}^{N} \underbrace{\mu(A_n\setminus B_n)}_{<\varepsilon 2^{-(n+1)}} < \frac{\varepsilon}{2}}$$

Subtraktivität, Monotonie (11.24(c),(b)) — Subadd. 11.24(d) — geom. Reihe

n.V.

$$\geq \varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$$\Rightarrow \emptyset \neq \bigcap_{n=1}^{N} B_n \subseteq \bigcap_{n=1}^{N} K_n \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

Mit endl. Durchschnittseigenschaft kpt'er Mengen $\overset{\text{Übung!}}{\Longrightarrow}$

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{K_n}_{\subseteq A_n} \subseteq A, \text{ d.h. Krit. (v) ist erfüllt}$$

11.28 Satz (Eindeutigkeitssatz für Maß)

Sei $\mathcal{E}$ $\cap$-stabiler Erzeuger einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\exists (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ mit $X_n \nearrow X$. Seien μ_1, μ_2 Maße auf $\mathcal{A}$ mit

(1) $\mu_1(A) = \mu_2(A) \quad \forall A \in \mathcal{E}$

(2) $\mu_1(X_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Dann gilt $\mu_1 = \mu_2$, d.h. $\mu_1(A) = \mu_2(A) \; \forall A \in \mathcal{A}$.

Beweis. Sei $E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) = \mu_2(E) < \infty$ (Gibt es n.V.)

$\Rightarrow \forall A \in \mathcal{A}: \mu_1(A \cap E) < \infty$ & $\mu_2(A\cap E) < \infty$

Setze $\mathcal{D}_E := \{A \in \mathcal{A} : \mu_1(A\cap E) = \mu_2(A \cap E)\}$ ($\neq \emptyset$ da $E \in \mathcal{D}_E$),

Beh: $\mathcal{D}_E$ ist Dynkin-System

Bew: • $X \in \mathcal{D}_E$ klar

• $\setminus_{\supseteq}$-stabil: Seien $A_1, A_2 \in \mathcal{D}_E$ mit $A_2 \subseteq A_1$

$\Rightarrow E \cap (A_1 \setminus_{\supseteq} A_2) = (E \cap A_1) \setminus_{\supseteq} (E \cap A_2)$

$\Rightarrow \mu_1(E \cap (A_1 \setminus A_2)) \underset{\text{Subtraktivität 11.24.(c)}}{=} \mu_1(E \cap A_1) - \mu_1(E \cap A_2)$

$\overset{A_1, A_2 \in \mathcal{D}_E}{=} \mu_2(E \cap A_1) - \mu_2(E \cap A_2) \overset{!}{=} \mu_2(E \cap (A_1 \setminus A_2))$ ✓

- $\dot{\cup}_\infty$-stabil: Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{D}_E$ paarweise disjunkt

$\Rightarrow E \cap (\dot{\bigcup}_n A_n) = \dot{\bigcup}_n (E \cap A_n)$

$\Rightarrow \mu_1(E \cap (\dot{\bigcup}_n A_n)) \overset{\mu_1 \text{ Maß}}{=} \sum_n \underbrace{\mu_1(E \cap A_n)}_{= \mu_2(E \cap A_n)} \overset{\mu_2 \text{ Maß}}{\underset{A_n \in \mathcal{D}_E}{=}} \mu_2(E \cap (\dot{\bigcup}_n A_n))$ ✓

$\Rightarrow$ Beh. $\Rightarrow \mathcal{D}_E \underset{\mathcal{D}_E \text{ enthält } \mathcal{E}}{\supseteq} dyn(\mathcal{E}) \underset{\substack{\text{Satz 11.17} \\ (\mathcal{E}\ \cap\text{-stabil!})}}{=} \sigma(\mathcal{E}) \underset{\text{n.V.}}{=} \mathcal{A}$

- also: $(*)$ $\mu_1(A \cap E) = \mu_2(A \cap E)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ $\forall E \in \mathcal{E}$ mit $\mu_1(E) < \infty$

Die Wahl $E = X_n, n \in \mathbb{N}$, ist n.V. erlaubt und, da $(A \cap X_n) \uparrow A$

$\xrightarrow[\text{unten, Satz 11.25}]{\text{Stetigkeit von}} \mu_1(A) = \lim_{n \to \infty} \underbrace{\mu_1(A \cap X_n)}_{= \mu_2(A \cap X_n)} \overset{(*)}{=} \mu_2(A) \quad \forall \mathcal{A}$ ∎

11.4. Fortsetzungssatz von Carathéodory

Ziel: setze stetigen Inhalt auf Ring fort zu einem Maß auf σ-Algebra (Eindeutigkeit: Satz 11.28)

Dazu Hilfsgröße:

11.29. Definition $m: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$ ist äußeres Maß (auf X)

$$:\Leftrightarrow \begin{cases} (1)\ m(\emptyset) = 0 \\ (2)\ A \subseteq B \subseteq X \Rightarrow m(A) \leq m(B) \quad \text{(Monotonie)} \\ (3)\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(X) \Rightarrow m\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} m(A_n) \quad \text{(sub-}\sigma\text{-Additivität)} \end{cases}$$

11.30. Lemma Sei μ Inhalt auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$ und $\forall A \subseteq X$ setze $\mathcal{U}(A) := \{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R} : A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\}$

„Umgebungssystem von A aus abz.baren Überdeckungen in $\mathcal{R}$"

Dann ist $\mu^*: \mathcal{P}(X) \to [0,\infty]$,

$$A \mapsto \mu^*(A) := \begin{cases} \inf\limits_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(A)} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n), & \text{falls } \mathcal{U}(A) \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{falls } \mathcal{U}(A) = \emptyset \end{cases}$$

ein äußeres Maß (das von μ induzierte äußere Maß)

Beweis: (1) $(\emptyset, \emptyset, \ldots) \in \mathcal{U}(\emptyset)$, $\emptyset \in \mathcal{R}$ & $\mu(\emptyset) = 0$

(2) $A \subseteq B \Rightarrow \mathcal{U}(B) \subseteq \mathcal{U}(A)$

(3) Sei $(A_n)_n \subseteq \mathcal{P}(X)$ mit o.E. $\mu^*(A_n) < \infty\ \forall n$ (andernfalls ist Beh. klar: $\infty \leq \infty$)

Also $\mathcal{U}(A_n) \neq \emptyset\ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists (B_k^{(n)})_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}(A_n)$:

$$(1) \qquad \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu(B_k^{(n)}) \leq \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n} \quad (\text{Def. inf.})$$

Zudem gilt $(B_k^{(n)})_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}}} \subseteq \mathcal{U}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)$

$$\Rightarrow \mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{k,n\in\mathbb{N}} \mu(B_k^{(n)}) \overset{\text{Umordnen, (1)}}{\leq} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(A_n) + \varepsilon \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}}_{=1}$$

Da $\varepsilon > 0$ bel. $\Rightarrow$ Beh. ■

11.31. Definition Sei μ^* äußeres Maß auf X. Setze

$$\mathcal{A}^* := \{A \subseteq X : \underbrace{\mu^*(Q)}_{\substack{\text{stets nach Def. 11.29(3) sub-}\sigma\text{-Add.}\\ \leq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A)}} \geq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A)\ \forall Q \subseteq X\}$$

$$= \{A \subseteq X : \mu^*(Q) = \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A)\ \forall Q \subseteq X\}$$

System der μ^*-messbaren Mengen in X.

11.32. Satz (Carathéodory, 1914)

Sei μ^* äußeres Maß auf X

(1) Dann ist $\mathcal{A}^*$ eine σ-Algebra in X und die Restriktion $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}$ ist ein Maß

(2) Sei zusätzlich μ^* induziert von stetigen Inhalt μ auf Ring $\mathcal{R}$. Dann gilt

$$\sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{A}^* \quad \text{und} \quad \mu^*|_{\mathcal{R}} = \mu$$

(3) Ist zusätzlich zu (2) μ noch σ-endlich auf $\mathcal{R}$, dann ist $\nu := \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ das einzige Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ mit $\nu|_{\mathcal{R}} = \mu$.

11.33. Bemerkung

(2) besagt, dass $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ Fortsetzung von μ auf $\sigma(\mathcal{R})$

(3) besagt, dass μ eindeutig fortsetzbar von $\mathcal{R}$ auf $\sigma(\mathcal{R})$

$$\begin{tikzcd} \text{Inhalt } \mu \arrow[d, equal] \arrow[rrrd, "\text{induziert (via 11.30)}"] & & & \\ \mu^*|_{\mathcal{R}} & \text{Maß } \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})} \arrow[l] & \text{Maß } \mu^*|_{\mathcal{A}^*} \arrow[l] & \text{äußeres Maß } \mu^* \arrow[l] \end{tikzcd}$$

(3) einziges (μ σ-endl.)

(1)

Lebt auf $\quad \mathcal{R} \subseteq \sigma(\mathcal{R}) \overset{(2)}{\subseteq} \mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{P}(X)$

(μ stet. Inhalt)

Constantin Carathéodory (13.9.1873 - 2.2.1950)

- Ingenieur → Bau von Staudämmen am Nil
- ab 1900 Studium Math. in Berlin (H.A. Schwarz, G. Frobenius, M. Planck).
- ab 1913 Nachfolger von Felix Klein in Göttingen
- 1918 Berlin
- 1920-22 Gründungsrektor in Smyrna (= Izmir)
- 1924-1950: LMU München (Nachfolger von F. Lindemann)

Hauptarbeitsgebiete: Variationsrechnung
Funkt.theorie
Maß- u. Integr.theorie

erhebliche Vereinfachung des Beweises des Riemannschen Abb.satzes.

Beweis von Satz 11.32

zu (1): $\boxed{(i)}$ $\mathcal{A}^*$ σ-Algebra $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}^*$ $\cap$-stab. Dynkin-Syst. (Satz 11.11.(e))

Dazu Hilfsbeh.: $\mathcal{A}^*$ ist Algebra

- $X \in \mathcal{A}^*$ klar per def.
- c-stabil: da $Q \cap A = Q \setminus A^c$ und $Q \setminus A = Q \cap A^c$ (a)

  $\Rightarrow$ $(A \in \mathcal{A}^* \Leftrightarrow A^c \in \mathcal{A}^*)$, also $\mathcal{A}^*$ c-stabil
- $\cup$-stabil: Seien $A, B \in \mathcal{A}^*$ $\Rightarrow$

$$\mu^*(\tilde{Q}) = \mu^*(\tilde{Q} \cap B) + \mu^*(\tilde{Q} \setminus B) \quad \forall \tilde{Q} \in \mathcal{P}(X) \qquad (b)$$

und, $\forall Q \in \mathcal{P}(X)$,

$$\mu^*(Q) = \underbrace{\mu^*(Q \cap A)}_{\overset{(b) \text{ mit } \tilde{Q} = Q \cap A}{\mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*((Q \cap A) \setminus B)}} + \underbrace{\mu^*(Q \setminus A)}_{\overset{(b) \text{ mit } \tilde{Q} = Q \setminus A}{\mu^*((Q \setminus A) \cap B) + \mu^*((Q \setminus A) \setminus B)}}$$

$$\overset{(a)}{=} \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B^c) \qquad (c)$$

Nun, (c) mit $Q \longrightarrow Q \cap (A \cup B)$:

$$\mu^*(Q \cap (A \cup B)) = \mu^*(Q \cap A \cap B) + \mu^*(Q \cap A \cap B^c) + \mu^*(Q \cap A^c \cap B) \qquad (d)$$

(d) in (c)

$$\Rightarrow \quad \mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap (A \cup B)) + \mu^*(\underbrace{Q \cap (A \cup B)^c}_{Q \setminus (A \cup B)})^{(a)} \quad \checkmark$$

Beh: $\mathcal{A}^*$ ist $\cap$-stabiles Dynkin-System.

- $\cap_2$, $\setminus_2$-stabil klar, da $\mathcal{A}^*$ Algebra (wie gezeigt) [siehe Def/Satz 11.9]
- $\dot{\bigcup}_\infty$-stabil: Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}^*$ paarw. disjunkt; sei $A := \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n$

(d) mit $A \to A_1$, $B \to A_2$:

$$\Rightarrow \mu^*(Q \cap (A_1 \cup A_2)) = \mu^*(Q \cap A_1) + \mu^*(Q \cap A_2)$$

Induktion
$$\Rightarrow \mu^*\Big(Q\cap\big(\underbrace{\dot{\bigcup_{j=1}^n} A_j}_{=:B_n\in\mathcal{A}^*\ (\text{Algebra!})}\big)\Big) = \sum_{j=1}^n \mu^*(Q\cap A_j)\quad \forall n\in\mathbb{N}\ \forall Q\in\mathcal{P}(X)$$

$$\Rightarrow \mu^*(Q) = \mu^*(Q\cap B_n) + \mu^*(\underbrace{Q\setminus B_n}_{\supseteq Q\setminus A})$$

Monotonie 11.29(2)
$$\geq \sum_{j=1}^n \mu^*(Q\cap A_j) + \mu^*(Q\setminus A)\quad \forall n\in\mathbb{N}.\ \forall Q\in\mathcal{P}(X)$$

$$\overset{n\to\infty}{\Rightarrow} \mu^*(Q) \geq \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(Q\cap A_n)}_{\geq \mu^*(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(Q\cap A_n))} + \mu^*(Q\setminus A) \qquad (e)$$

Sub-σ-Add 11.29(3)

also $\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A)\quad \forall Q\in\mathcal{P}(X)$ (f)

$\Rightarrow A\in\mathcal{A}^*$ ✓

$\boxed{(ii)}$ μ^* ist Maß auf $\mathcal{A}^*$

- $\mu^*|_{\mathcal{A}^*}\geq 0$ und $\mu^*(\emptyset)=0$ klar, da μ^* äußeres Maß
- σ-Additiv: Sei $(A_n)_n\subseteq\mathcal{A}^*$ paarw. disj., $A := \dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A_n$

$\forall Q\subseteq X$
$$\Rightarrow \mu^*(Q) \overset{(e)}{\geq} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(Q\cap A_n) + \mu^*(Q\setminus A) \geq \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A)$$
$$= \mu^*(Q)\quad (\text{da } A\in\mathcal{A}^*)$$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^*(Q\cap A_n) + \mu^*(Q\setminus A) = \mu^*(Q\cap A) + \mu^*(Q\setminus A)$$

wähle $Q = A \Rightarrow$ Beh. ✓

<u>zu (2):</u> $\boxed{(i)}$ Zeige $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{A}^*$ ($\Rightarrow \sigma(\mathcal{R})\subseteq\mathcal{A}^*$, da $\mathcal{A}^*$ σ-Algebra)

Sei $A\in\mathcal{R}$, $Q\in\mathcal{P}(X)$ bel.; o.E. sei $\mu^*(Q)<\infty$

(sonst ist Bed. in Def. 11.31 eh erfüllt!)

- also $\mathcal{U}(Q)\neq\emptyset$, sei $\underset{\mathcal{R}}{\underset{\cap}{(A_n)_n}} \subseteq \mathcal{U}(Q)$ bel.

$\Rightarrow A_n \cap A \in \mathcal{R}$ und $A_n \setminus A \in \mathcal{R}$ disjunkt $\xRightarrow[\mu \text{ add.}]{\text{Inhalt}}$ $\mu(A_n) = \mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \setminus A) \; \forall n$

$$\Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n \setminus A)$$

Da $(A_n \cap A)_n \in \mathcal{U}(Q \cap A)$ und $(A_n \setminus A)_n \in \mathcal{U}(Q \setminus A)$

$$\Rightarrow \mu^*(Q) = \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \geq \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)} \sum_n \mu(A_n \cap A) + \inf_{(A_n)_n \in \mathcal{U}(Q)} \sum_n \mu(A_n \setminus A)$$

$$\geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$$

$\Rightarrow$ $\underline{A \in \mathcal{A}^*}$ ✓

$\boxed{(ii)}$ $\mu(A) = \mu^*(A) \; \forall A \in \mathcal{R}$

$A \in \mathcal{R} \Rightarrow (A, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots) \in \mathcal{U}(A) \Rightarrow \mu^*(A) \leq \mu(A)$ (g)

Sei nun $(A_n)_n \in \mathcal{U}(A)$, d.h. $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \underset{\mathcal{R}}{A_n} \Rightarrow \left(\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap A)\right) \uparrow A$

Stetigkeit von unten $\xRightarrow{\text{Satz 11.25(ii)}}$

$$\mu(A) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} (A_j \cap A)\right)}_{\substack{\text{Subadd.} \\ 11.24(d)}} \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j)$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mu(A_j \cap A)}_{\substack{\text{Monotonie} \\ 11.24(b)}}$$

$$\leq \mu(A_j)$$

$$\Rightarrow \mu(A) \leq \inf_{(A_n)_n \subseteq \mathcal{U}(A)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu^*(A) \qquad \text{(h)}$$

(g) $\wedge$ (h) $\Rightarrow$ Beh. ✓

<u>zu (3)</u>: Aus Eindeutigkeitssatz 11.28, denn:

- $\mathcal{R}$ $\cap$-stabiler Erzeuger von $\sigma(\mathcal{R})$
- μ σ-endlich auf $\mathcal{R}$

■

11.34. Definition Sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ σ-Algebra, μ Maß auf $\mathcal{A}$.

- $(X, \mathcal{A})$ Messraum (messbarer Raum)
  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum
  falls $\mu(X) = 1$: Wahrscheinlichkeitsraum
- $A \subseteq X$ messbar $:\Leftrightarrow A \in \mathcal{A}$
- $A \subseteq X$ (μ-)Nullmenge $:\Leftrightarrow$ A messbar und $\mu(A) = 0$
- $(X, \mathcal{A}, \mu)$ [oder nur: μ] vollständig $:\Leftrightarrow$

$\forall$ Nullmengen $N \subseteq X$ $\forall A \subseteq N$: $A \in \mathcal{A}$ $(\Rightarrow \mu(A) = 0)$

„Teilmengen von Nullmengen sind Nullmengen"

11.35. Satz Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum. Dann $\exists$ kleinster vollständiger Maßraum $(X, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$, die Vervollständigung von $(X, \mathcal{A}, \mu)$, mit $\bar{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$, $\bar{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ und $\bar{\mu}$ vollständig; d.h. $\forall (X, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$ vollständig mit $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}$, $\tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu$ gilt $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \bar{\mathcal{A}}$ und $\tilde{\mu}|_{\bar{\mathcal{A}}} = \bar{\mu}$.

Beweis Folgt aus Üb.aufgabe 3.4 (Üb.blatt 3, Auf. 4)

11.36. Satz Sei μ^* äußeres Maß auf X und $\mathcal{A}^*$ das System der μ^*-messbaren Mengen. Dann gilt

(a) $(X, \mathcal{A}^*, \mu^*|_{\mathcal{A}^*})$ ist vollständig

(b) Sei zudem μ^* induziert von stetigen, σ-endlichen Inhalt μ auf Ring $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(X)$.

Dann gilt

$$\overline{(X, \sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})})} = \underbrace{(X, \mathcal{A}^*, \mu^*|_{\mathcal{A}^*})}$$

Carathéodory-Erweiterung von $(X, \sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})})$

<u>Beweis</u>: (a) Tut.aufgabe 2.4(i) (Tut-blatt 2, Aufg. 4(i)).
(b) Übung.

Für die Wahrscheinlichkeitstheorie nützlich ist:

II.37. Satz Sei $\mathcal{A}_0$ eine Algebra und μ ein endliches Maß auf $\mathcal{A} := \sigma(\mathcal{A}_0)$. Dann gilt:
$\forall A \in \mathcal{A}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \exists A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}_0$, paarweise disjunkt, so daß

$$\mu\left(A \,\Delta \left(\dot{\bigcup_{n=1}^{N}} A_n\right)\right) < \varepsilon$$

<u>Beweis</u>: Siehe z.B. Bauer, Satz 5.7. ☒

11.5. Lebesgue-(Borel-) Maß

Sei $d \in \mathbb{N}$.

11.38. Satz $\exists !$ Maß auf $\mathcal{B}^d$, das Lebesgue-Borel-Maß λ^d, so dass $\forall$ Quader $Q := \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [a_\alpha, b_\alpha[\in \mathcal{I}^d$, $-\infty < a_\alpha \le b_\alpha < \infty$ $\forall \alpha = 1, \dots, d$, gilt

$$\lambda^d(Q) = \prod_{\alpha=1}^{d} (b_\alpha - a_\alpha) \qquad (*)$$

Notation: $\lambda := \lambda^1$

Beweis: Hier nur $d = 1$; $d \ge 2$ später (Kap. 14.2).

Üb. 3.2 $\Rightarrow$ $\exists !$ endlicher Inhalt μ auf $\mathcal{F}$ mit $\mu([a,b[) = b - a$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a \le b$.

Üb. 3.3 $\Rightarrow$ μ stetig $\underset{\text{Satz 11.32}}{\Longrightarrow}$ $\exists !$ Maß λ auf $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{B}$ mit $\lambda|_{\mathcal{F}} = \mu$ (In Üb.: wähle $G = \mathrm{id}$) $\blacksquare$

11.39 Definition Die Vervollständigung von $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$ ist $(\mathbb{R}^d, \overline{\mathcal{B}^d}, \overline{\lambda^d})$

$\overline{\mathcal{B}^d}$: Lebesgue-messbare Mengen im $\mathbb{R}^d$

$\overline{\lambda^d}$: d-dim. Lebesgue-Maß

Üb. 3.4 : $\overline{\mathcal{B}^d} = \left\{ B \cup \tilde{N} \subseteq \mathbb{R}^d : B \in \mathcal{B}^d, \exists N \in \mathcal{B}^d \text{ mit } \lambda^d(N) = 0 \text{ und } \tilde{N} \subseteq N \right\}$

11.40 Lemma Sei $B \in \mathcal{B}^d$, $x \in \mathbb{R}^d$

$\Rightarrow$ $x + B := \{ x + b \in \mathbb{R}^d : b \in B \} \in \mathcal{B}^d$

Beweis:
- $Q \in \mathcal{I}^d \Rightarrow x + Q \in \mathcal{I}^d$
- $\mathcal{A}_x := \{ B \in \mathcal{B}^d : x + B \in \mathcal{B}^d \}$ ist σ-Algebra (check!)
- $\mathcal{I}^d \subseteq \mathcal{A}_x$
- $\mathcal{B}^d = \sigma(\mathcal{I}^d) \subseteq \sigma(\mathcal{A}_x) = \mathcal{A}_x \subseteq \mathcal{B}^d$ $\blacksquare$

$\boxed{\text{11.41. Satz}}$ Sei μ Maß auf $\mathcal{B}^d$. Dann sind äquivalent:

(i) $\mu = \lambda^d$

(ii) μ ist translationsinvariant, d.h. $\mu(B) = \mu(x+B)$ $\forall B \in \mathcal{B}^d$ $\forall x \in \mathbb{R}^d$

und normiert, d.h. $\mu([0,1[^d) = 1 \quad ([0,1[^d = \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0,1[)$

(Satz gilt analog mit $\overline{\mathcal{B}^d}$ und $\overline{\lambda^d}$)

Beweis: Bem.: "$\mu(x+B)$" macht Sinn wegen Lemma 11.40.

„(i) $\Rightarrow$ (ii)": Für $x \in \mathbb{R}^d$ fix, sei $\nu(B) := \lambda^d(x+B)$

$\Rightarrow \nu$ ist Maß auf $\mathcal{B}^d$ mit $\nu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^{d} [a_\alpha, b_\alpha[\right) = \prod_{\alpha=1}^{d} (\underbrace{b_\alpha + x_\alpha - a_\alpha - x_\alpha}_{b_\alpha - a_\alpha})$

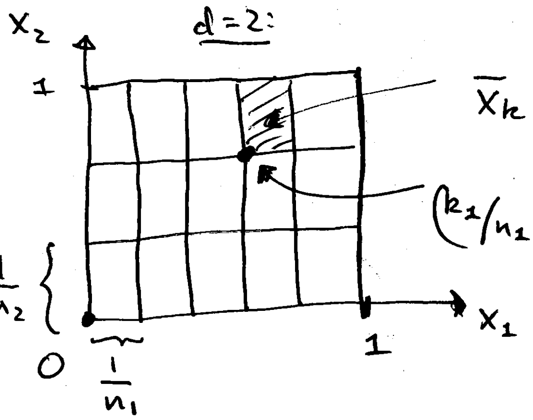
$\overset{\text{Satz 11.38}}{\Rightarrow} \nu = \lambda^d$, also: λ^d ist transl. inv.

Normierung von λ^d klar. ✓

„(ii) $\Rightarrow$ (i)":

1. Schritt: $\mu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, \frac{1}{n_\alpha}[\right) = \prod_{\alpha=1}^{d} \frac{1}{n_\alpha} \quad \forall n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$

denn $[0,1[^d = \dot{\bigcup}_{\substack{k_\alpha \in \{0,\dots,n_\alpha - 1\} \\ \alpha = 1,\dots,d}} \left(\underbrace{\begin{pmatrix} k_1/n_1 \\ \vdots \\ k_d/n_d \end{pmatrix}}_{=: \bar{x}_k \in \mathbb{R}^d} + \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, \frac{1}{n_\alpha}[\right)$



$\bar{x}_k + \bigtimes_{\alpha=1}^{2} [0, \frac{1}{n_\alpha}[$

$(k_1/n_1, k_2/n_2) = \bar{x}_k$

$\Rightarrow 1 \overset{\text{Normierung}}{=} \mu([0,1[^d) \overset{\text{add.}}{=} \sum_{\substack{k_\alpha \in \{0,\dots,n_\alpha - 1\} \\ \alpha = 1,\dots,d}} \mu\left(\bar{x}_k + \bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, \frac{1}{n_\alpha}[\right)$

$\overset{\text{transl. inv.}}{=} \left(\prod_{\alpha=1}^{d} n_\alpha\right) \mu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^{d} [0, \frac{1}{n_\alpha}[\right)$ ✓

2. Schritt: $\mu\left(\bigtimes_{\alpha=1}^{d}[0,q_\alpha[\right) = \prod_{\alpha=1}^{d} q_\alpha \quad \forall (q_1,\dots,q_d)\in\mathbb{Q}^d_{\geq 0}$

denn $q_\alpha = \frac{p_\alpha \in \mathbb{N}_0}{n_\alpha \in \mathbb{N}} \Rightarrow$ Beh. mittels Zerlegung und Transl.inv. von μ wie im 1. Schritt. ✓

3. Schritt: $\mu\Big(\underbrace{\bigtimes_{\alpha=1}^{d}[0,b_\alpha[}_{=:Q}\Big) = \prod_{\alpha=1}^{d} b_\alpha \quad \forall (b_1,\dots,b_d)\in\mathbb{R}^d_{\geq 0}$

denn, $\forall \alpha=1,\dots,d \ \exists (q_\alpha^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}_{\geq 0}: \ q_\alpha^{(n)} \nearrow b_\alpha \Rightarrow$

$Q^{(n)} := \bigtimes_{\alpha=1}^{d}[0,q_\alpha^{(n)}[\ \nearrow Q \Rightarrow$ (Stetigkeit von unten)

$$\mu(Q) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu(Q^{(n)})}_{\prod_{\alpha=1}^{d} q_\alpha^{(n)}} = \prod_{\alpha=1}^{d} b_\alpha \quad ✓$$

↑ 2. Schritt

4. Schritt: $\mu\Big(\underbrace{\bigtimes_{\alpha=1}^{d}[a_\alpha,b_\alpha[}_{=:Q}\Big) = \prod_{\alpha=1}^{d}(b_\alpha-a_\alpha) \quad \forall a_\alpha, b_\alpha\in\mathbb{R},\ a_\alpha < b_\alpha,\ \alpha=1,\dots,d$

folgt aus $Q = \begin{pmatrix}a_1\\ \vdots \\ a_d\end{pmatrix} + \bigtimes_{\alpha=1}^{d}[0,b_\alpha-a_\alpha[$, Transl.inv. & 3. Schritt.

∎

4. Schritt und Satz 11.38 $\Rightarrow$ Beh.

Eine weitere Charakterisierung Lebesgue-messbarer Mengen und eine Approximationseigenschaft des Lebesgue-Maßes:

11.42 Satz Sei $A\subseteq\mathbb{R}^d$. Dann sind äquivalent:

(i) $A\in\overline{\mathcal{B}^d}$ (Lebesgue-messbar)

(ii) $\forall \varepsilon>0\ \exists\, \mathcal{U}\subseteq\mathbb{R}^d$ offen, $\exists\, C\subseteq\mathbb{R}^d$ abgeschlossen, so dass

- $C\subseteq A\subseteq \mathcal{U}$
- $\lambda^d(\mathcal{U}\setminus C)<\varepsilon$

(i) $\Rightarrow$ (ii): Regularität von λ^d

Warnung: Aus (ii) folgt i.A. nicht, dass $A\in\mathcal{B}^d$!

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) : Sei $\varepsilon > 0$, $A \in \overline{\mathcal{B}^d}$.

(a) Angenommen $\overline{\lambda^d}(A) < \infty$.

Da $\overline{\lambda^d}(A) = (\lambda^d)^*(A) = \inf\limits_{\substack{(F_n)_n \subseteq \mathcal{F}^d: \\ A \subseteq \bigcup_n F_n}} \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(F_n)$

zugeh. äußeres Maß zu $\lambda^d|_{\mathcal{F}^d}$ gemäß Lemma 11.30 und Satz 11.35(b)

folgt: $\exists (I_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}^d$ mit $A \subseteq \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ und

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(I_n) < \overline{\lambda^d}(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Zu I_n existiert $J_n \in \mathcal{I}^d$ mit $I_n \subseteq \mathring{J}_n$ und $\lambda^d(\mathring{J}_n) \leq \lambda^d(I^n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$

(Verwende: $\mathring{J}_n \in \mathcal{B}^d$ und Stetigkeit von λ^d)

Setze $\mathcal{U} := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathring{J}_n$; dann ist $\mathcal{U}$ offen und $\mathcal{U} \supseteq A$, und

$$\overline{\lambda^d}(U \setminus A) \underset{\uparrow}{=} \lambda^d(U) - \overline{\lambda^d}(A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \lambda^d(\mathring{J}_n) - \overline{\lambda^d}(A) < \varepsilon \quad (1)$$

Subtraktivität ($\overline{\lambda^d}(A) < \infty$)

(b) $A \in \overline{\mathcal{B}^d}$ bel. : Sei $n \in \mathbb{N}$, also $\overline{\lambda^d}(\underbrace{A \cap [-n,n]^d}_{\in \overline{\mathcal{B}^d}}) < \infty$
($\varepsilon > 0$)

Nach (a) $\exists\, \mathcal{U}_n \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit

$\mathcal{U}_n \supseteq A \cap [-n,n]^d$ und $\overline{\lambda^d}(U_n \setminus (A \cap [-n,n]^d)) < \frac{\varepsilon}{2^n}$

$\Rightarrow$ $\mathcal{U} := \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ offen und $\mathcal{U} \supseteq A$, und

$$\overline{\lambda^d}(\mathcal{U} \setminus A) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \overline{\lambda^d}(\underbrace{\mathcal{U}_n \setminus A}_{\subseteq\, \mathcal{U}_n \setminus (A \cap [-n,n]^d)}) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon \quad (2)$$

(c) Sei $\varepsilon > 0$. Nach (b) $\exists\, V \subseteq \mathbb{R}^d$ offen mit $V \supseteq A^c$

und $\overline{\lambda^d}(V \setminus A^c) < \varepsilon$ (da $A \in \overline{\mathcal{B}^d} \Rightarrow A^c \in \overline{\mathcal{B}^d}$)

Sei $C := V^c$ $\Rightarrow$ C abgeschl., $C \subseteq A$ und

$$\overline{\lambda^d}(A \setminus C) = \overline{\lambda^d}(A \cap V) = \overline{\lambda^d}(V \setminus A^c) < \varepsilon \quad (3)$$

Aus (b) und (c) exist. $U \supseteq A$ offen mit (2) und abg. $C \subseteq A$ mit (3); aus $U \setminus C = (U \setminus A) \,\dot\cup\, (A \setminus C)$ folgt, mit (2) & (3):

$$\lambda^d(U \setminus C) = \overline{\lambda^d}(U \setminus C) < 2\varepsilon \qquad (U \setminus C \in \mathcal{B}^d\,!)$$

(ii) $\Rightarrow$ (i): Übung! ■

Existenz von nicht-Lebesgue-messbaren ($\Rightarrow$ nicht-Borel) Mengen:

11.43. Satz $\forall\, d \in \mathbb{N}$ gilt: $\overline{\mathcal{B}^d} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$

Beweis: Für $x \in \mathbb{R}^d$ def. $[x] := x + \mathbb{Q}^d \subseteq \mathbb{R}^d$ (d.h. Äquiv.kl. von x bzgl. $x \sim y :\Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}^d$).

Also $\{[x] : x \in \mathbb{R}^d\} = \mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d \quad \Rightarrow [x] \cap [0,1[^d \neq \emptyset$

$\forall\, [x] \in \mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d$ wähle (genau) ein Element $v_{[x]} \in [x] \cap [0,1[^d$ aus (Auswahlaxiom!). Sei $V := \{v_{[x]} \in [0,1[^d : [x] \in \mathbb{R}^d/\mathbb{Q}^d\}$

Somit $\mathbb{R}^d = \dot{\bigcup\limits_{v \in V}} (v + \mathbb{Q}^d) = \bigcup\limits_{v \in V} \dot{\bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}^d}} \{v + q\} = \dot{\bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}^d}} (q + V)$

(Zur Disjunktheit letzt. Ver.: Ann.: $\exists\, q, q' \in \mathbb{Q}^d$:
$(q + V) \cap (q' + V) \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, v, v' \in V$: $q + v = q' + v'$
$\Rightarrow v' - v = q - q' \in \mathbb{Q}^d \Rightarrow v \in [v']$ (& $v \neq v'$) $\lightning$
– erst. Ver. ähnl.)

Ann.: $V \in \overline{\mathcal{B}^d}$

$$\Rightarrow \quad \infty = \overline{\lambda^d}(\mathbb{R}^d) \overset{\sigma\text{-Add.}}{=} \sum_{q \in \mathbb{Q}^d} \underbrace{\overline{\lambda^d}(q + V)}_{\overline{\lambda^d}(V)} \quad \text{Transl. inv.}$$

$$\Rightarrow \overline{\lambda^d}(V) > 0$$

- Betrachte andererseits

$$\infty > \overline{\lambda^d}([0,2[^d) \geq \overline{\lambda^d}\Big(\dot{\bigcup_{q \in \mathbb{Q}^d \cap [0,1[^d}} \overbrace{(q+V)}^{\subseteq [0,2[^d \text{ für } q \in \mathbb{Q}^d \cap [0,1[^d}\Big)$$

6-Add

$$= \sum_{q \in \mathbb{Q}^d \cap [0,1[^d} \underbrace{\overline{\lambda^d}(q+V)}_{\overline{\lambda^d}(V)} \quad \text{Transl.-inv} \qquad \Rightarrow \overline{\lambda^d}(V) = 0 \;\; ⚡ \qquad \boxtimes$$

12. Integration bzgl. eines Maßes

12.1. Messbare Abbildungen

12.1. Definition Seien $(X, \mathcal{A})$, $(X', \mathcal{A}')$ Messräume und $f: X \to X'$ eine Abb.

f $(\mathcal{A}-\mathcal{A}')$ messbar $:\Leftrightarrow$ $\forall A' \in \mathcal{A}' : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$

d.h. $\sigma(f) := f^{-1}(\mathcal{A}') := \{f^{-1}(A') : A' \in \mathcal{A}'\} \subseteq \mathcal{A}$

↑ σ-Alg. nach Lemma 11.6(a)

- speziell für $(X', \mathcal{A}') = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ heißt f $(\mathcal{A}-)$ messbare Funktion
- speziell für $(X', \mathcal{A}') = (\overline{\mathbb{R}}, \underbrace{\sigma(\mathcal{B} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\})}_{=: \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})})$ heißt f $(\mathcal{A}-)$ messbare numerische Funktion
- speziell für $(X, \mathcal{A}, P)$ W. Raum heißt f (X'-wertige) Zufallsvariable.

12.2. Beispiel

Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $A \subseteq X$ und $\mathbb{1}_A : X \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

die Indikatorfkt. (oder: Charakt. Fkt.) von A. Dann gilt

- $\mathbb{1}_A$ messbar $\Leftrightarrow$ A messbar (d.h. $A \in \mathcal{A}$)
- $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A \leq \mathbb{1}_B$
- $\mathbb{1}_{A^c} = 1 - \mathbb{1}_A$
- $\mathbb{1}_{\bigcup_{j \in J} A_j} = \sup_{j \in J} \mathbb{1}_{A_j}$, $\mathbb{1}_{\bigcap_{j \in J} A_j} = \inf_{j \in J} \mathbb{1}_{A_j}$

12.3. Satz

(a) Seien $(X,\mathcal{A})$, $(X',\mathcal{A}')$ Messräume, sei $\mathcal{E}'$ Erzeuger von $\mathcal{A}'$.
Dann gilt:
$$f: X \to X' \text{ messbar} \Leftrightarrow f^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq \mathcal{A}$$

(b) Seien $(X,\mathcal{T})$, $(X',\mathcal{T}')$ topologische Räume und $f: X \to X'$!
Dann gilt
$$f \text{ stetig} \Rightarrow \begin{cases} f \text{ Borel-messbar, d.h.} \\ f \ \sigma(\mathcal{T})\text{-}\sigma(\mathcal{T}')\text{-messbar} \end{cases}$$

(c) Seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$, $j=1,2,3$, Messräume und
$f_1: X_1 \to X_2$, $f_2: X_2 \to X_3$ messbare Abb. Dann gilt
$f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ messbar.

Beweis (a) „$\Rightarrow$" klar.
„$\Leftarrow$": Betrachte $\tilde{\mathcal{A}} := \{A' \in \mathcal{P}(X') : f^{-1}(A') \in \mathcal{A}\}$ (das feinste – d.h. grösste – Mengensystem in X', so dass f $\mathcal{A}$-$\tilde{\mathcal{A}}$ messbar ist)
n.V.: $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{E}'$. Beh: $\tilde{\mathcal{A}}$ ist σ-Alg. in X'
($\Rightarrow \tilde{\mathcal{A}} \supseteq \sigma(\mathcal{E}') = \mathcal{A}' \Rightarrow f$ messbar ✓)
(i) $f^{-1}(X') = X \in \mathcal{A}$, (ii) $\tilde{A} \in \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow f^{-1}(\tilde{A}^c) = (f^{-1}(\tilde{A}))^c \in \mathcal{A}$
(iii) $(\tilde{A}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \tilde{A}_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(\tilde{A}_n) \in \mathcal{A}$. $\Rightarrow$ Beh.

(b) Folgt aus (a), denn n.V. gilt $f^{-1}(\mathcal{T}') \subseteq \mathcal{T}$.

(c) Klar, da $\forall A_3 \in \mathcal{A}_3$: $(f_2 \circ f_1)^{-1}(A_3) = f_1^{-1}(\underbrace{f_2^{-1}(A_3)}_{\in \mathcal{A}_2}) \in \mathcal{A}_1$ ∎

$\boxed{\text{12.4. Definition}}$ Sei X Menge, seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$, $j \in J$, Messräume und $f_j : X \to X_j$ $\forall j \in J$.

$\sigma(f_j, j \in J) := \sigma\left(\bigcup_{j \in J} f_j^{-1}(\mathcal{A}_j)\right)$ ist kleinste σ-Algebra auf X, bzgl. der alle f_j, $j \in J$, messbar,

die von $\{f_j\}_{j \in J}$ erzeugte σ-Algebra auf X.

12.5. Beispiel Sei $A \subseteq X \Rightarrow \sigma(\mathbb{1}_A) = \{\emptyset, A, A^c, X\}$

$\boxed{\text{12.6. Lemma}}$ Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum. Dann gilt:

(a) $f : X \to \mathbb{R}$ messbar $\iff \underbrace{\{x \in X : f(x) \leq a\}}_{=: \{f \leq a\}} \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

(b) $\iff \{f < a\} \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

(c) $\iff \{f \underset{(>)}{\geq} a\} \in \mathcal{A}$ $\forall a \in \mathbb{R}$

(d) $\iff \{f \overset{\geq}{\underset{(\leq)}{>}} a\} \in \mathcal{A}$ $\forall a \in D$, wobei $D \subseteq \mathbb{R}$ dicht.

(e) $\iff \{f \in U\} \in \mathcal{A}$ $\forall U \subseteq \mathbb{R}$ offen

(f) $\iff \{f \in G\} \in \mathcal{A}$ $\forall G \subseteq \mathbb{R}$ abgeschl.

(g) $\iff \{a \leq f < b\} \in \mathcal{A}$ $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$

(analog mit $\overline{\mathbb{R}}$ statt $\mathbb{R}$)

Beweis: Satz 12.3(a), da alles Erzeuger von $\mathcal{B}$ ∎

12.7. Satz Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $f, f_n, g : X \to \mathbb{R}$, alle messbar für $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) $\{f \lessgtr g\}, \{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathcal{A}$

(b) Für $c \in \mathbb{R}$ sind

$$cf,\ f \pm g,\ fg,\ \underset{\text{Min}}{f \wedge g},\ \underset{\text{Max}}{f \vee g},\ |f| \quad \text{messbar}$$

(c) $\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n$, $\limsup\limits_{n \to \infty} f_n$, $\liminf\limits_{n \to \infty} f_n$ messbar

(d) falls $\forall x \in X$ $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x)$ existiert (pkt.weise)

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} f_n \quad \text{messbar}$$

(analog mit $\overline{\mathbb{R}}$ statt $\mathbb{R}$; fordere $f \pm g$ wohldef.)

Beweis. (a) folgt aus $\{f < g\} = \bigcup\limits_{q \in \mathbb{Q}} (\{f < q\} \cap \{q < g\})$

$$\{f \leq g\} = \{g < f\}^c$$

$$\{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{f \geq g\}$$

$$\{f \neq g\} = \{f = g\}^c,$$ und Lemma 12.6.

(b) $f : X \to \mathbb{R}$ messbar

$\gamma : \begin{matrix} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ r \mapsto cr \end{matrix}$ stetig $\overset{\text{Satz 12.3(b)}}{\Rightarrow}$ messbar $\Bigg\} \overset{12.3(c)}{\Rightarrow}$ $\gamma \circ f = cf$ messbar

Rest: Übung!

(c) • $\left\{ \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq a \right\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq a\}$ messbar $(a \in \mathbb{R})$

$\Rightarrow$ Beh. mit Lemma 12.6

• $\inf\limits_n f_n = -\sup\limits_n (-f_n)$ messbar nach obigen & (b)

- $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \sup\limits_{m\geq n} f_m$ Beh. nach eben gezeigten

  $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \inf\limits_{m\geq n} f_m$

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \limsup\limits_{n\to\infty} f_n = \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ ∎

Zentrale Rolle in der Integrationstheorie:

$\boxed{\text{12.8. Definition}}$ Sei $(X,\mathcal{A})$ Messraum, $f: X\to\mathbb{R}$

$$f \text{ Treppenfunktion} :\Longleftrightarrow \begin{cases} \exists N\in\mathbb{N}\ \exists A_1,\dots,A_N \in\mathcal{A}, \\ \exists a_1,\dots,a_N\in\mathbb{R} : \quad f=\sum\limits_{n=1}^{N} a_n \mathbb{1}_{A_n} \end{cases}$$

- stets messbar, da end. Linearkomb. von messbaren Indikatorfkt.'en.

$\boxed{\text{12.9. Satz}}$ Sei $(X,\mathcal{A})$ und $f: X\to\overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt:

$$f \text{ messbar} \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists \text{ Folge } (f_n)_n \text{ von Treppenfunktionen} \\ f_n: X\to\mathbb{R} \quad \text{mit} \quad f=\lim\limits_{n\to\infty} f_n \\ \qquad\qquad \text{existiert pkt.wise} \end{cases}$$

Falls $f\geq 0$, kann $(f_n)_n$ isoton gewählt werden, $f_n\uparrow f$.
Falls f beschränkt, kann $(f_n)_n$ so gewählt werden, dass die Konvergenz sogar gleichmäsig ist.

Beweis: "$\Leftarrow$" Satz 12.7(d), da Treppenfkt.'en messbar

"$\Rightarrow$": $f_\pm := \max\{\pm f, 0\}$ messbar nach Satz 12.7. $(0=\mathbb{1}_\emptyset)$

und $f = \underbrace{f_+}_{\geq 0} - \underbrace{f_-}_{\geq 0}$ Positiv-, Negativteil von f

$\Rightarrow$ es genügt $f \geq 0$ zu betrachten, denn

aus $f_n^{\pm} \nearrow f_{\pm} \Rightarrow f_n^+ - f_n^- \to f_+ - f_- = f$

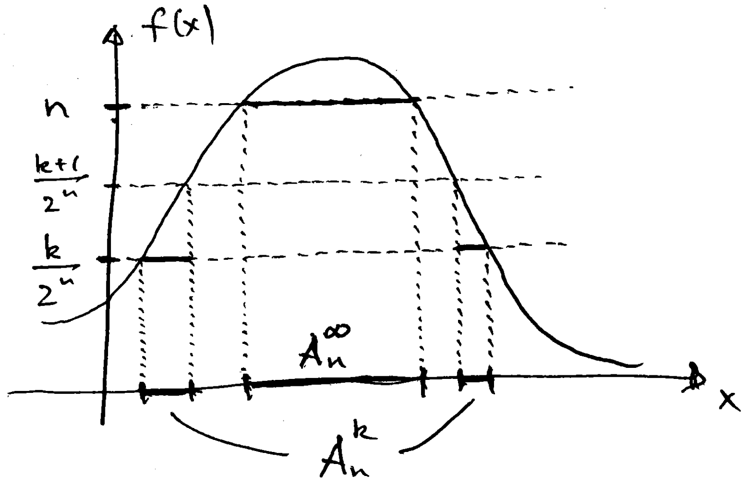
(beachte: $\{f_+ \neq 0\} \cap \{f_- \neq 0\} = \emptyset$)

Sei also $f \geq 0$, setze

$A_n^k := \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right\} \in \mathcal{A}$ für $n \in \mathbb{N}$, $k = 0, \dots, n2^n - 1\}$

$A_n^\infty := \{ f \geq n \} \in \mathcal{A}$

$f_n := n \mathbb{1}_{A_n^\infty} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{1}_{A_n^k}$



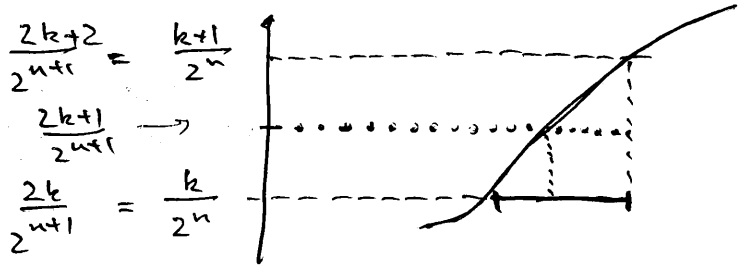
Treppenfkt. $\forall n \in \mathbb{N}$

mit

- $f_n \leq f_{n+1} \leq f \quad \forall n \in \mathbb{N}$

klar

da Unterteilung $\{A_{n+1}^k\}$ eine Verfeinerung von $\{A_n^k\}_k$



- $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall x \in X$

da 1. Fall: $f(x) = \infty \Rightarrow x \in A_n^\infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \underbrace{f_n(x)}_{n} = \infty$

2. Fall: $f(x) < \infty \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : f(x) < n_0$

$\Rightarrow \forall n \geq n_0 \ \exists k_n$ mit $x \in A_n^{k_n}$

$\Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n} \Rightarrow$ Kgz. (*)

Falls f beschränkt: Nur 2. Fall möglich

& n_0 unabh. von $x \overset{(*)}{\Rightarrow}$ gleichm. Konv. ∎

12.2. Integral von Elementarfunktionen

12.10. Definition Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum

(a) $E := \{ f : X \to \mathbb{R} : f \geq 0$ Treppenfunktion $\}$
also insbes. messbar!

Raum der Elementarfkt.'en

(b) Sei $f \in E$

$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$$ Normaldarstellung

$:\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_j \geq 0 \ \forall j = 1, \dots, n & \text{und} \\ \{A_1, \dots, A_n\} \subseteq \mathcal{A} & \text{paarw. disjunkt.} \end{cases}$

12.11. Bemerkung

(a) Normaldarstellung nicht eindeutig, es sei denn alle $\alpha_j > 0$ und paarw. verschieden

(b) Für $f, g \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq 0} \Rightarrow \alpha f, f+g, f \vee g, f \wedge g \in E$

12.12 Lemma

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und $f \in E$ mit 2 Normaldarstellungen

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j} = f = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mathbb{1}_{B_k}$$

Dann gilt $$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(B_k)$$

Beweis: Sei $W := \{ w \in \,]0, \infty[\, : f^{-1}(\{w\}) \neq \emptyset \}$

(Wertebereich von f ohne $\{0\}$; $\# W < \infty$)

$$\Rightarrow \dot{\bigcup_{j:\alpha_j=w}} A_j = f^{-1}(\{w\}) = \dot{\bigcup_{k:\beta_k=w}} B_k$$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{w\in W} w \underbrace{\sum_{j:\alpha_j=w} \mu(A_j)}_{\mu(\dot{\bigcup}_{j:\alpha_j=w} A_j)} = \sum_{w\in W} w\,\mu(f^{-1}(\{w\})) \underset{\text{analog}}{=} \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mu(B_k) \quad \boxtimes$$

Im folgenden liege immer ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zugrunde

12.13. Definition (Integral von Elementarfkt'en)

Sei $E \ni f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ eine Normaldarstellung

Dann heißt
$$\int_X f(x)\,d\mu(x) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$
das (μ-) Integral von f über X

12.14. Bemerkung

(1) Name "x" der Integrationsvariablen beliebig.

(2) Wohldef. wegen Lemma 12.13 (unabh. von Wahl der Normaldarstellung !)

(3) Gebräuchl. Alternativschreibweisen
$$\int_X d\mu(x) f(x), \quad \int_X f\,d\mu, \quad \int_X f(x)\,\mu(dx), \quad \dots$$
speziell für $\mu = \overset{(-)}{\lambda^d}$: $d\mu(x) = d^d x$ oder dx

(4) $f \mapsto \int f\,d\mu$ def. Abb. $E \to [0,\infty]$

12.15. Lemma Seien $f, g \in E$, $a \in [0,\infty[$, $A \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

(1) $\int_X \mathbb{1}_A(x)\, d\mu(x) = \mu(A)$

$$\left.\begin{array}{ll}(2) & \int_X af\, d\mu = a\int_X f\, d\mu \\ (3) & \int_X (f+g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu\end{array}\right\}\ \text{(Linearität)}$$

(4) $f \le g \Rightarrow \int_X f\, d\mu \le \int_X g\, d\mu$ (Monotonie)

Beweis: (1), (2) klar! (3), (4): Übung!

12.16. Lemma (Vorstufe des mon. Kgz.-satzes von Beppo Levi)

Sei $(f_n)_n \subseteq E$, $f \in E$ und $f_n \nearrow f$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\, d\mu = \int_X f\, d\mu \qquad \left(= \int_X \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) d\mu \right)$$

Beweis 1. Fall: $\mu(\{f \neq 0\}) = \infty$

wobei $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mathbb{1}_{A_j}$ $\Rightarrow$ o.E. kann man $\alpha_1 > 0$ & $\mu(A_1) = \infty$ annehmen.

Sei $A_1^{(n)} := \{f_n > \frac{\alpha_1}{2}\}$ $\Rightarrow$ $A_1^{(n)} \overset{(f_n)_n \text{ isoton}}{\subseteq} A_1^{(n+1)}$ und $A_1 \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_1^{(n)}$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\int_X f_n\, d\mu\right) \overset{12.15(4)}{\ge} \lim_{n\to\infty}\Big(\frac{\alpha_1}{2}\mu(\underbrace{A_1^{(n)}}_{\bigcup_{j=1}^n A_1^{(j)}})\Big)$$

existiert in $\overline{\mathbb{R}}$, da mon. wachs. Folge

$$\overset{\text{Stetigkeit von unten}}{=} \frac{\alpha_1}{2}\mu\Big(\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_1^{(j)}\Big) \overset{\text{Monotonie } \mu}{\ge} \frac{\alpha_1}{2}\mu(A_1) = \infty$$

andererseits: $\int_X f\, d\mu \ge \alpha_1 \mu(A_1) = \infty$, also $\infty = \infty$ ✓

2. Fall: $\mu(\{f \neq 0\}) < \infty$

$f_n \leq f \ \forall n \in \mathbb{N} \implies \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \leq \int_X f \, d\mu \qquad (*)$

Umgekehrt sei $\varepsilon > 0$, $C_n := \{f - f_n > \varepsilon\} \in \mathcal{U}$, $\overset{\text{n.V.}}{\implies} C_n \downarrow \emptyset$

und $\mu(C_n) < \infty$, da $C_n \subseteq \{f \neq 0\} \ \forall n$

$\overset{\text{Stetigkeit von oben}}{\implies} \lim\limits_{n\to\infty} \mu(C_n) = 0$

Nun setze $f_{max} := \max\limits_{x \in X} f(x) < \infty$ (Treppenfkt.)

$$\implies \int_X f \, d\mu - \int_X f_n \, d\mu = \int_X \mathbb{1}_{C_n} \underbrace{(f - f_n)}_{\leq f_{max}} d\mu + \int_X \underbrace{\mathbb{1}_{C_n^c} (f - f_n)}_{\leq \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{\{f \neq 0\} \cap C_n^c}} d\mu$$

$$\leq f_{max} \, \mu(C_n) + \underbrace{\varepsilon \, \mu(\{f \neq 0\})}_{=: M < \infty}$$

$\implies \int_X f \, d\mu - \lim\limits_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu \leq \varepsilon M$; da $\varepsilon > 0$ bel. $\implies$

$\int_X f \, d\mu \leq \lim\limits_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu \implies$ Beh. mit $(*)$ ∎

12.3. Integration messbarer Funktionen

Generalvoraus. $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum

12.17. Definition

(1) $E^* := \{ f : X \to [0,\infty] : f \text{ messbar} \}$
nicht-neg. numerische Fkt.'en

Satz 12.9.
$\iff E^* = \{ f : X \to [0,\infty] : \exists (f_n)_n \subseteq E \text{ isoton mit } \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n}_{\sup_n f_n} = f \}$

(2) Sei $f \in E^*$ und $(f_n)_n \subseteq E$ eine appr. Folge nach Satz 12.9.
Dann heißt

$$\int_X f \, d\mu := \lim_{n\to\infty} \left(\int_X f_n \, d\mu \right) \quad \text{(μ-) Integral von } f$$

(stimmt für $f \in E$ mit Def. 12.14 überein).

12.18. Lemma

$\int_X f \, d\mu$ ist wohldefiniert, da unabh. von Wahl der approx. Folge $(f_n)_n$.

Beweis: Sei $(g_k)_k \subseteq E$, $g_k \uparrow f$ zweite approx. Folge.
Aus Symmetriegründen reicht es $\lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu \geq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu$ zu zeigen.

Sei $\varphi_{k,n} := g_k \overset{\text{min.}}{\wedge} f_n \in E \quad \forall k,n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ für festes $n \in \mathbb{N}$: $\varphi_{k,n} \uparrow f_n \in E$ (da $g_k \uparrow f \geq f_n$)

$$\overset{\forall n}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} \int_X g_k \, d\mu \geq \lim_{k\to\infty} \int_X \varphi_{k,n} \, d\mu \underset{\text{Lemma 12.}}{=} \int f_n \, d\mu$$

$\Rightarrow$ Beh. ∎

12.19. Lemma Seien $f, g \in \mathcal{E}^*$, $a \in [0,\infty[$. Dann gilt:

(1) $af,\ f+g,\ f\cdot g,\ f\wedge g,\ f\vee g \in \mathcal{E}^*$

(2) $\int_X (f+g)\,d\mu = \int_X f\,d\mu + \int_X g\,d\mu$

(3) $\int_X af\,d\mu = a\int_X f\,d\mu$

(4) $f \leq g \Rightarrow \int_X f\,d\mu \leq \int_X g\,d\mu$ (Monotonie)

Beweis: (1) Satz 12.7. (2)-(4) Lemma 12.15. + Limes ∎

Ein erster Höhepkt.:

12.20. Satz (Monotone Kgz. nach Beppo Levi)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^*$ mit $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Dann ist $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{E}^*$ (existiert, da isoton) und
$\uparrow$ Satz 12.7(d)

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu = \int_X f\,d\mu \qquad \left(= \int_X (\lim_{n\to\infty} f_n)\,d\mu\right)$$

Beweis: Zu $f_n \in \mathcal{E}^*$ $\exists\, (f_n^m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}$ mit $f_n^m \nearrow f_n$ für $m \to \infty$.

Setze $h_m := \max\{f_1^m, \dots, f_m^m\} \in \mathcal{E}$ (12.11(b))

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \bullet\ h_m \leq \max\{f_1, \dots, f_m\} = f_m \leq f \quad (*) \\ \bullet\ h_m \leq h_{m+1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} h_m \leq f \qquad \text{(insbes. ex. limes!)} \quad (**)$$

Andererseits: $f_n^m \leq h_m$ $\forall n = 1, \dots, m$

$$\Rightarrow \lim_{m\to\infty} h_m \geq \lim_{m\to\infty} f_n^m \overset{\text{n.V.}}{=} f_n \;; \text{ mit } n\to\infty \overset{(**)}{\Longrightarrow}$$

$(h_m)_m \subseteq E$ und $h_m \uparrow f$ und

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_X h_m\,d\mu$$

Schließlich, da $f_n \le f \Rightarrow \int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu$

$$= \lim_{m\to\infty} \int_X \underbrace{h_m}_{(*) \le f_m}\,d\mu \le \lim_{m\to\infty} \int_X f_m\,d\mu$$

$\Rightarrow$ Beh. mit $n \to \infty$ ∎

12.21. Korollar Sei $(f_n)_n \subseteq E^*$. Dann ist $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in E^*$ und

$$\int_X \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\Big)\,d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_X f_n\,d\mu$$

Beweis: Aus mon. Kgz. mit $g_N := \sum_{n=1}^{N} f_n$ ∎

Erinnerung: $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ und $f_\pm := \max\{\pm f, 0\}$ ($\Rightarrow f = f_+ - f_-$)

dann gilt: f messbar $\Leftrightarrow$ (f_+ und f_- messbar)

12.22. Definition Sei $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$

$$\left.\begin{array}{c} f\ \text{(μ-) integrierbar} \\ \text{(über } X) \end{array}\right\} :\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} f \text{ messbar und} \\ \int_X f_+\,d\mu < \infty,\ \int_X f_-\,d\mu < \infty \end{array}\right.$$

In diesem Fall heißt

$$\int_X f\,d\mu := \int_X f_+\,d\mu - \int_X f_-\,d\mu \quad (\in \mathbb{R})$$

das (μ-) Integral von f (über X). Für $A \in \mathcal{A}$ sei

$$\int_A f\,d\mu := \int_X f \cdot \mathbb{1}_A\,d\mu.$$

12.23. Bemerkung

(1) Alternativschreibweisen wie in Bem. 12.14(3).

(2) Def. 12.22 stimmt für $f \in E^*$ mit Def. 12.17(2) überein

(3) Allgemeiner könnte man auch $\int_X f_+ d\mu = \infty$ oder $\int_X f_- d\mu = \infty$ (aber nicht beide!) erlauben – machen wir in Kap 12.5!

(4) Falls $(X, \mathcal{A}, \mu)$ W.-Raum und $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ integrierbar Zufallsvariable $\Rightarrow$
- $\mathbb{E}(f) := \int_X f \, d\mu$ Erwartungswert von f
- $\operatorname{Var}(f) := \mathbb{E}\left((f - \mathbb{E}(f))^2 \right)$ – Varianz von f.

12.24. Definition

$$\mathcal{L}^1 := \mathcal{L}^1(\mu) := \mathcal{L}^1(X, \mu) := \{ f : X \to \mathbb{R} : f \text{ } \mu\text{-integrierbar} \}$$

$$\overline{\mathcal{L}^1} := \overline{\mathcal{L}^1}(\mu) := \overline{\mathcal{L}^1}(X, \mu) := \{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} : f \text{ } \mu\text{-integrierbar} \}.$$

(!)

12.25. Satz Sei $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar. Dann sind äquivalent

(i) $f \in \overline{\mathcal{L}^1}$

(ii) $f_+, f_- \in \overline{\mathcal{L}^1}$

(iii) $|f| \in \overline{\mathcal{L}^1}$

(iv) $\exists u, v \in \overline{\mathcal{L}^1} : f_+ \leq u, f_- \leq v$

(v) $\exists g \in \overline{\mathcal{L}^1} : |f| \leq g$

(Analog für $\mathbb{R}$ & $\mathcal{L}^1$)

Beweis: Übung.

12.26. Korollar $\overline{\mathcal{L}^1}$ ist Vektorverband, d.h. $\forall f, g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ und $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ gilt

(1) $\int \alpha f \, d\mu = \alpha \int f \, d\mu$

(2) $\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu$

} linear

(3) $f \leq g \Rightarrow \int f \, d\mu \leq \int g \, d\mu$ Monotonie

} $\int d\mu$ ist monotone Linearform $\left(f \mapsto \int_X f \, d\mu \right)$

(4) $\left|\int f \, d\mu\right| \le \int |f| \, d\mu$ Dreiecks-Ungl.

(5) $f \vee g,\ f \wedge g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ Verbandseigenschaft

(Analog für $\mathbb{R}$ & $\mathcal{L}^1$)

Beweis: (1)-(3) aus Lemma 12.19 durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil.

(4) $$\left|\int f \, d\mu\right| = \left|\underbrace{\int f_+ \, d\mu}_{\ge 0} - \underbrace{\int f_- \, d\mu}_{\ge 0}\right| \le \int f_+ \, d\mu + \int f_- \, d\mu = \int \underbrace{(f_+ + f_-)}_{|f|} \, d\mu$$

(5) Aus $|f \vee g| \le |f| + |g|$ bzw. $|f \wedge g| \le |f| + |g|$, Satz 12.25 & (b) ∎

12.27. Beispiele

(i) Sei $(X, \mathcal{A})$ Messraum, $a \in X$, $\{a\} \in \mathcal{A}$ und $\mu = \delta_a$ (Dirac-Maß bei a konz.)

$$\Rightarrow \overline{\mathcal{L}}^1(\delta_a) = \{f : X \to \overline{\mathbb{R}} : |f(a)| < \infty\}$$

da $\int_X f(x) \, d\delta_a(x) = f(a)$ (siehe Übung!)

(ii) Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ endlicher Maßraum (z.B. W.-Raum).

Dann gilt:

$f : X \to \mathbb{R}$ messbar, beschränkt $\Rightarrow f \in \mathcal{L}^1(\mu)$

da $$\int_X |f(x)| \, d\mu \le \left(\sup_{x \in X} |f(x)|\right) \mu(X) < \infty.$$

12.4. Eigenschaften fast überall

12.28. Definition Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum und

$\forall x \in X$ sei $Q(x)$ eine mathem. Aussage.

$Q(x)$ gilt für (μ-) fast alle $x \in X$ $:\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \exists N \in \mathcal{A},\ \mu(N) = 0 \\ \text{(Nullmenge!) und} \\ Q(x) \text{ gilt } \forall x \in N^c. \end{cases}$

[Q gilt (μ-) fast überall; (μ-) f.ü.]

12.29. Beispiele

(i) $f \in \mathcal{L}^1 \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ $\begin{cases} f \text{ ist f.ü. endlich} & \text{(Übung!)} \\ (\text{d.h.: } |f(x)| < \infty \ \forall x \in X \setminus N) \end{cases}$

(ii) $f = g$ f.ü., d.h. $f(x) = g(x)$ $\forall x \in X \setminus N$

falls auch $g = h$ f.ü. $\Rightarrow$ $f = h$ f.ü. ($\Rightarrow$ "$=$ f.ü" ist Äquival.relation!)

12.30. Satz Sei $f \in E^*$. Dann gilt

$$\int_X f \, d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \text{ f.ü} \quad (f \geq 0 \text{ wesentlich!})$$

Beweis: „$\Rightarrow$": $A_n := \{ f > \frac{1}{n} \}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ $A_n \nearrow \{ f > 0 \}$

$$\overset{\text{Stetigkeit}}{\underset{\text{von unten}}{\Rightarrow}} \lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = \mu(\{ f > 0 \}) \qquad (*)$$

Andererseits: $\frac{1}{n} 1\!\!1_{A_n} \leq f$ $\Rightarrow$ $0 \leq \frac{1}{n} \mu(A_n) \leq \int_X f \, d\mu = 0$ $\forall n$

(da $f \geq 0$!)

$$\overset{(*)}{\Rightarrow} \mu(\{ f > 0 \}) = 0$$

„$\Leftarrow$": $\exists (f_n)_n \subseteq E$, $f_n \nearrow f$ mit $\mu(\{ f_n > 0 \}) \leq \mu(\{ f > 0 \}) = 0$

$$\overset{\text{Treppenfkt.}}{\Rightarrow} \int_X f_n \, d\mu = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{Beh. mit}$$

Def. Integral für $f \in E^*$

$\boxtimes$

12.31. Satz Seien $f, g : X \to \underbrace{\overline{\mathbb{R}}}_{\text{messbar}}$ und $f = g$ μ-f.ü.

Dann gilt

(a) $f, g \in E^*$ $\Rightarrow$ $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

(b) $f \in \overline{\mathcal{L}}^1$ $\Rightarrow$ $g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ und $\int f \, d\mu = \int g \, d\mu$

Beweis. (a) Zerlege $f = f \cdot \mathbb{1}_{\{f = g\}} + f \, \mathbb{1}_{\{f \neq g\}}$

$$g = g \cdot \mathbb{1}_{\{f=g\}} + g \, \mathbb{1}_{\{f \neq g\}}.$$

- Satz 12.30 $\Rightarrow$ $\int \underbrace{f \cdot \mathbb{1}_{\{f \neq g\}}}_{= 0 \text{ f.ü.}} d\mu = 0 = \int \underbrace{g \cdot \mathbb{1}_{\{f \neq g\}}}_{= 0 \text{ f.ü.}} d\mu$
- $f \cdot \mathbb{1}_{\{f=g\}} = g \cdot \mathbb{1}_{\{f=g\}}$

$\Rightarrow$ Beh. ✓

(b) $f = g$ f.ü. $\Rightarrow$ $f_+ = g_+$ f.ü. und $f_- = g_-$ f.ü. $\overset{(a)}{\Rightarrow}$ Beh. ∎

12.32. Korollar Seien $f : X \to \mathbb{R}$ messbar, $g \in \mathcal{L}^1(\mu)$ und $|f| \leq g$ μ-f.ü. Dann gilt auch $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$.

Beweis: Setze $g' := |f| \vee g$ $\Rightarrow$ g' messbar und

$g' = g$ f.ü. $\overset{\text{Satz 12.31(b)}}{\Rightarrow}$ $g' \in \mathcal{L}^1(\mu)$. Da $|f| \leq g'$ (überall!)

$\Rightarrow$ Beh. mit Satz 12.25. ∎

12.5. Konvergenzbegriffe und Konvergenzsätze

Wie bisher liege stets ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zugrunde.

Eine Verallg. der mon. Kgz. nach B. Levi:

$\boxed{\text{12.33. Satz}}$ Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$ und $f_n \leq f_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Sei $g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ mit $g \leq f_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt, mit $f := \lim_{n\to\infty} f_n$ (messb.)

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu$$

(Die Integrale hier im Sinne von Bem. 12.23(3), da

$\int f_+ d\mu = +\infty$ möglich; $\int f_- d\mu < \infty$)

<u>Beweis</u>: O.E.: $g < \infty$ (sonst: ändere g auf $\{g = +\infty\}$ zu 0. Erfüllt immer noch Voraus.). Analog Bsp. 12.29(a):

$f_n \geq g \in \overline{\mathcal{L}^1} \Rightarrow \{f_n = -\infty\}$ Nullmenge. O.E.: $f_n > -\infty$ (sonst: ändere f_n, f, g auf $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n = -\infty\}$ zu 0; ändert Voraus. & $\int f_n d\mu$ nicht). Analog für f. (d.h. auf $\{f = -\infty\}$).

Setze $h_n := f_n - g \in E^*$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $h := f - g \in E^*$; damit $h_n \nearrow h$, also (Satz 12.20 (mon. Kgz)):

$$\lim_{n\to\infty} \int \underbrace{h_n}_{f_n - g} d\mu = \int h \, d\mu \qquad (1)$$

Aus $g \in \overline{\mathcal{L}^1}$ und $(f_n)_- \leq g_-$ folgt $(f_n)_- \in \mathcal{L}^1$ und damit (Bmk. 12.23(c)): $\int f_n d\mu$ exist. Aus (1) also

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \int h \, d\mu + \int g \, d\mu \qquad (2).$$

<u>1. Fall</u>: $\int h \, d\mu < \infty$. Also, $h \in \overline{\mathcal{L}^1}$. Dann ist

$f = h + g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ und $\int f\,d\mu = \int h\,d\mu + \int g\,d\mu \overset{(2)}{\Rightarrow}$ Beh.

2. Fall $\int h\,d\mu = \infty$. Aus $g \leq f$ (da $g \leq f_n \uparrow f$)

folgt $f_- \leq g_-$, also $\int f_-\,d\mu < \infty$

$\overset{h = f_+ - f_- - g}{\Rightarrow}$ $\int f_+\,d\mu = \infty \Rightarrow \infty = \int f\,d\mu = \int h\,d\mu + \int g\,d\mu \overset{(2)}{\Rightarrow}$ Beh. ∎

Verzichtet man auf Isotonie, so gilt immer noch:

12.34. Satz (Lemma von Fatou)

Sei $f_n : X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$, sei $g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ mit $f_n \geq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Mit $f := \liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ gilt:

$$\liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \geq \int f\,d\mu \quad \left(= \int \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \right)$$

(Die Integrale wieder wie im Sinn von Bem. 12.23(3))

Beweis: Da $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \sup\limits_{m\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf\limits_{n: n\geq m} f_n}_{=: g_m}$ messbar

$\Rightarrow g_m \geq g$ und $g_m \nearrow f \overset{\text{Satz 12.33}}{\Rightarrow}$

$$\int f\,d\mu = \lim_{m\to\infty} \int g_m\,d\mu = \liminf_{m\to\infty} \int \underbrace{g_m}_{\leq f_m}\,d\mu$$ ∎

12.35. Bemerkung

(1) Analog gilt für $f_n \leq g$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $(g \in \overline{\mathcal{L}}^1)$:

$$\limsup_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu \leq \int \limsup_{n\to\infty} f_n\,d\mu$$

(ersetze $f_n \to -f_n$ in Fatou)

(2) Auf die Bed. $f_n \geq g \in \overline{\mathcal{L}}^1$ kann nicht verzichtet werden!

$\boxed{\text{12.36. Satz}}$ (von der majorisierten (oder dominierten) Konvergenz von H. Lebesgue)

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{L}}^1$, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, $h \in \overline{\mathcal{L}}^1$ mit $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ f.ü.,

und $|f_n| \le h$ f.ü. $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann $\exists \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ mit $\tilde{f} = f$ f.ü. und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$$

Ist f auch messbar, so folgt: $f \in \overline{\mathcal{L}}^1$ und

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int f \, d\mu \qquad \left(= \int \lim_{n\to\infty} f_n \, d\mu \right)$$

Beweis: Sei $A := \{ \limsup_{n\to\infty} f_n = \liminf_{n\to\infty} f_n \} \in \mathcal{A}$ (da f_n messbar)

und: $(f_n)_n$ konv. auf A, d.h. $\mu(A^c) = 0$.

$\exists \tilde{h} \in \overline{\mathcal{L}}^1$, $\tilde{h} = h$ f.ü. mit $|f_n| \le \tilde{h}$ (überall!) $\forall n \in \mathbb{N}$

Setze $\varphi := \lim_{n\to\infty} f_n \cdot \mathbb{1}_A \Rightarrow$ messbar und $|\varphi| \le \tilde{h} \overset{12.25(v)}{\Longrightarrow} \varphi \in \overline{\mathcal{L}}^1$

$\Rightarrow \exists \tilde{f} \in \mathcal{L}^1$ mit $\varphi = \tilde{f}$ f.ü.

Nun: $\underbrace{\limsup_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu}$ $\underset{\text{Bem. 12.35(1)}}{\overset{f_n \le \tilde{h}}{\le}} \int \limsup_{n\to\infty} f_n \, d\mu \overset{\mu(A^c)=0 \,\&\, 12.31}{=} \int \limsup_{n\to\infty} f_n \mathbb{1}_A \, d\mu$

$$= \underbrace{\int \varphi \, d\mu}_{\overset{12.31}{=} \int \tilde{f} d\mu} \underset{\text{Def. } \varphi \,\&\, A}{=} \int \liminf_{n\to\infty} f_n \mathbb{1}_A \overset{\mu(A^c)=0 \,\&\, 12.31}{=} \int \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu$$

$$\underset{f_n \ge -\tilde{h}}{\overset{\text{Fatou}}{\le}} \underbrace{\liminf_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int f_n \, d\mu = \int \tilde{f} \, d\mu$$

Zusatz: Falls f messbar $\exists \mu$-Nullmenge $N \in \mathcal{A}$ mit

$f \mathbb{1}_{N^c} = \varphi \mathbb{1}_{N^c} \quad \Rightarrow \quad$ Beh. mit Satz 12.31 (b) ∎

12.37. Definition (Konvergenzbegriffe)

Seien $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$.

- Konvergenz (μ-) f.ü.: $f_n \xrightarrow[f.ü.]{n\to\infty} f \;:\Leftrightarrow$

  $\exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ existiert $\forall x \in X \setminus N$

  und $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$

  (schon bekannt!)

- (μ-) stochastische Konvergenz: (oder: Kgz. dem Maße nach)

  $f_n \xrightarrow[\mu]{n\to\infty} f :\Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ $\forall \varepsilon > 0$ gilt:

  $$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in A : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}) = 0$$

[Im Fall $\mu(X) < \infty$ genügt es $A = X$ zu betrachten!]

- Konvergenz in L^1 (-Norm): $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{n\to\infty} f \;:\Leftrightarrow$

  $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$, wobei $\|g\|_1 := \int |g| \, d\mu$ (L^1-Norm)

12.38. Satz

Konvergenz fastüberall (f.ü.) $\Rightarrow$ stochastische Konvergenz

Konvergenz in L^1 $\Rightarrow$ stochastische Konvergenz

Hilfsmittel zum Beweis:

12.39. Lemma (Tschebyscheff-Ungleichung)

Sei $f \in \overline{\mathcal{L}^1}$, $f \geq 0$, und $\varepsilon > 0$ bel. Dann gilt

$$\mu(\{f \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \int f \, d\mu$$

Beweis:
$$f \geq f \cdot \mathbb{1}_{\{f \geq \varepsilon\}} \geq \varepsilon \cdot \mathbb{1}_{\{f \geq \varepsilon\}}$$
$$\Rightarrow \int f \, d\mu \geq \varepsilon \mu(\{f \geq \varepsilon\}) \qquad \blacksquare$$

Beweis von Satz 12.38.

„$\Rightarrow$": Tschebyscheff mit $|f-f_n|$:
$$\mu(\{|f-f_n| \geq \varepsilon\}) \leq \frac{1}{\varepsilon} \|f-f_n\|_1$$

„$\Downarrow$": Sei $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ bel. fest, sei $\varepsilon > 0$.
n.V. $\exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0: f_n(x) \to f(x) \quad \forall x \in X \setminus N$.

Setze $C_n := \{x \in X : |f_n(x) - f(x)| > \varepsilon\}$
$$B_n := \bigcup_{\substack{m \in \mathbb{N}: \\ m \geq n}} C_m = \{x \in X : \exists m \geq n : |f_m(x) - f(x)| > \varepsilon\}$$
$$\Rightarrow B_n \downarrow B \text{ für } n \to \infty \quad \text{mit } B := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} B_k \subseteq N$$
$$\Rightarrow 0 \leq \mu(A \cap C_n) \leq \mu(A \cap B_n) \xrightarrow{n \to \infty} 0$$
Stetigkeit von oben $\blacksquare$

12.40 Warnung: Es gelten keine Umkehrungen in Satz 12.38, auch nicht „$\Uparrow$" oder „$\Downarrow$".

Bsp. für $\not\Downarrow$: $X = \mathbb{R}, \mathcal{A} = \mathcal{B}, \mu = \lambda$,
$$f_n := \frac{n}{2} \mathbb{1}_{]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$\Rightarrow f_n \xrightarrow[\text{f.ü.}]{n \to \infty} 0, \text{ aber } \|f_n - 0\|_1 = \int_{\mathbb{R}} f_n(x) \, dx = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
(also hier keine Limitenvertauschung)

Für „$\Uparrow$" (und damit auch „$\Uparrow$") existiert Abschwächung:

$\boxed{\text{12.41. Satz}}$ Sei μ σ-endlich und seien $f_n, f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ messbar $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$f_n \xrightarrow[\mu]{n\to\infty} f \iff \begin{cases} \forall \text{ Teilfolgen } (f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}} \text{ von } (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \\ \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_{k_\ell}})_{\ell\in\mathbb{N}} \text{ mit } f_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{\ell\to\infty} f \end{cases}$$

(Satz gilt auch ohne Vorraus., dass μ σ-endlich; siehe Bauer)

$\boxed{\text{12.42. Korollar}}$ Unter den Vor. wie in 12.40 gilt

$$f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{n\to\infty} f \implies \begin{array}{l} \forall \text{ Teilfolgen } (f_{n_k})_k \text{ von } (f_n)_n \\ \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_{k_\ell}})_\ell \text{ mit } f_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{\ell\to\infty} f \end{array}$$

Beweis von Satz 12.41: O.E. sei $f = 0$!

„$\Leftarrow$": Ann.: $f_n \not\xrightarrow{\mu} 0 \implies \exists\, \varepsilon, \delta > 0$, $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$
und Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $\mu(\{x \in A : |f_{n_k}(x)| > \varepsilon\}) > \delta \quad \forall k \in \mathbb{N}$ (*)

n.V. hat $(f_{n_k})_k$ f.ü. kgt.'e Teilfolge $(f_{n_{k_\ell}})_\ell$

$\overset{\text{Satz 12.38}}{\implies} \quad f_{n_{k_\ell}} \xrightarrow[\mu]{\ell\to\infty} 0$ $\lightning$ zu (*).

„$\Rightarrow$": Ohne E. genügt es zu zeigen:

$$f_n \xrightarrow[\mu]{n\to\infty} 0 \implies \exists \text{ Teilfolge } (f_{n_k})_k \text{ von } (f_n)_n \text{ mit } f_{n_k} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{k\to\infty} 0 \quad (**)$$

– denn, sei $(f_{m_k})_k$ bel. Teilfolge von $(f_n)_n \implies f_{m_k} \xrightarrow[\mu]{k\to\infty} 0$ (n.V.)

$\overset{(**)}{\implies} (f_{m_k})_k$ besitzt f.ü. kgt.'e Teilfolge.

zu (**): Sei $X_\ell \in \mathcal{A}$, $\mu(X_\ell) < \infty$ $\forall \ell \in \mathbb{N}$ und $X_\ell \nearrow X$ (σ-endlich)

Sei ℓ fix. N.V. gilt: $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_k \in \mathbb{N}$: $\forall n \ge n_k$:

$$\mu(\{x \in X_\ell : |f_n(x)| > \tfrac{1}{k}\}) = \mu(\{|f_n \mathbb{1}_{X_\ell}| > \tfrac{1}{k}\}) \leq \frac{1}{2^k}$$

O.E.: wähle n_k so $n_{k+1} > n_k \ \forall k \in \mathbb{N}$; setze

$$A_k^\ell := \{|f_{n_k} \mathbb{1}_{X_\ell}| > \tfrac{1}{k}\} \quad \text{und} \quad A^\ell := \bigcap_{j \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N}: \\ k \geq j}} A_k^\ell$$

(NB: $x \in A^\ell \Leftrightarrow x \in A_k^\ell$ für unend. viele $k \in \mathbb{N}$).

Dann gilt: (ℓ fix)

- $x \notin A^\ell \Rightarrow \underbrace{x \in X \setminus A_k^\ell}_{}$ für schließlich alle k

$$\Leftrightarrow |f_{n_k}(x) \mathbb{1}_{X_\ell}(x)| \leq \frac{1}{k}$$

$$\Rightarrow (f_{n_k} \mathbb{1}_{X_\ell})(x) \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

- $\mu(A^\ell) \leq \mu\Big(\bigcup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq j}} A_k^\ell\Big) \leq \sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{2^k} \quad \underline{\forall j \in \mathbb{N}}$

$$\overset{j \to \infty}{\Rightarrow} \mu(A^\ell) = 0$$

$\Rightarrow A := \bigcup_{\ell \in \mathbb{N}} A^\ell$ ist Nullmenge und $\forall x \in X \setminus A_\ell$ gilt

$$(f_{n_k} \mathbb{1}_{X_\ell})(x) \xrightarrow{k \to \infty} 0 \quad \forall \ell \in \mathbb{N} \underset{J}{\Rightarrow} f_{n_k}(x) \xrightarrow{k \to \infty} 0$$

wähle ℓ, so $x \in X_\ell$ ($X_\ell \uparrow X$)

d.h. $$f_{n_k} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{k \to \infty} 0$$

Nun noch zu „$\Leftarrow$" in Satz 12.38.:

12.43. Definition Sei $f_j \in \mathcal{L}^1 \ \forall j \in J$ (Indexmenge)

$(f_j)_{j \in J}$ gleichgradig integrierbar $:\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0 \ \exists h \in \mathcal{L}^1,\ h \geq 0: \\ \int |f_j| \cdot \mathbb{1}_{\{|f_j| \geq h\}} \, d\mu < \varepsilon \quad \forall j \in J \end{cases}$

12.44. Bemerkung: Ist μ endlicher Maß (z.B. W.-Raum) ist gleichgradig int.-bar äquiv. zu def. als

$$(f_j)_{j\in J} \text{ gleichgradig int.-bar} \iff \sup_{j\in J} \int |f_j| \cdot \mathbb{1}_{\{|f_j|\geq N\}} \, d\mu \xrightarrow{N\to\infty} 0$$

12.45. Beispiel: Es gebe $g \in \mathcal{L}^1$ mit $|f_j| \leq g$ f.ü. $\forall j \in J$ (insbesondere erfüllt, falls J endlich: Wähle $g := \max_j |f_j|$)
$\Rightarrow (f_j)_{j\in J}$ gleichgradig integrierbar. (wähle z.B. $h = 2g$).

$\boxed{12.46.\ \text{Satz}}$ Seien $f, f_n \in \mathcal{L}^1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Dann sind äquivalent:

(i) $f_n \xrightarrow[\mu]{n\to\infty} f$ und $(f_n)_n$ gleichgradig integrierbar

(ii) $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_1]{n\to\infty} f$.

Beweis. Siehe z.B. Bauer.

12.47. Bemerkung

(1) Sei $f_n \xrightarrow[\text{f.ü.}]{n\to\infty} f$, $|f_n| \leq g \in \mathcal{L}^1 \Rightarrow$ Satz 12.38, Bsp. 12.45 & Satz 12.46 (Teil „(i) $\Rightarrow$ (ii)"): $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_1 = 0$

(2) Da $\|f_n - f\|_1 = \int |f_n - f| \, d\mu \geq \left| \int f_n \, d\mu - \int f \, d\mu \right|$

ist (1) eine Verschärfung von Satz 12.36 (maj. Konv.)

Wir beweisen (1) später auf andere Weise...

Am Ende 2 wichtige Anwendungen von maj. Konv.:

12-48. Satz (Stetigkeit & Diff.barkeit von Parameterintegralen)

Sei (M, d) metrischer Raum, $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $f: M \times X \to \mathbb{R}$ eine Abb. so daß:

(1) $\forall t \in M$: $f(t, \cdot)$ ist integrierbar

Sei $F: M \to \mathbb{R}$, $t \mapsto F(t) := \int_X f(t,x)\, d\mu(x)$

(a) Sei $t_0 \in M$; angenommen (zusätzlich zu (1)):

(2) $\forall x \in X$: $f(\cdot, x)$ ist stetig in t_0

(3) $\exists g: X \to [0,\infty]$ integrierbar mit $|f(t,x)| \leq g(x)$ $\forall t \in M$ $\forall x \in X$

Dann gilt: F ist stetig in t_0

(b) Sei $M = I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall. Es gelte (1) und

(2') $\forall x \in X$: $f(\cdot, x)$ diff.bar auf I

(3') $\exists g: X \to [0,\infty]$ integrierbar mit $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\right| \leq g(x)$ $\forall t \in I$, $\forall x \in X$

Dann ist F diff.bar, $\forall t \in I$ ist $\frac{\partial f}{\partial t}(t, \cdot)$ integrierbar, und es gilt

$$F'(t) = \frac{dF}{dt}(t) = \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, d\mu(x).$$

Beweis: (a) Sei $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ Folge in M mit $t_k \to t_0$, $k \to \infty$.

Dann, $\forall x \in X$: $f_k(x) := f(t_k, x) \xrightarrow[k\to\infty]{(2)} f(t_0, x)$,

$\forall k$: $f_k \in \mathcal{L}^1(\mu)$ wegen (1), und $|f_k| \leq g$ aus (3)

$\overset{\text{maj. Konv.}}{\Longrightarrow}$ $\underbrace{\int f_k(x)\, d\mu(x)}_{= F(t_k)} \xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{\int f(t_0,x)\, d\mu(x)}_{= F(t_0)} \Rightarrow F$ folgenstetig in t_0 ✓

(b) Seien $t \in I$, $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Nullfolge mit $t+h_n \in I$ $\forall n \in \mathbb{N}$ und setze

$$f_n : x \longmapsto \frac{f(t+h_n, x) - f(t,x)}{h_n} .$$

Es gilt, $\forall x \in X$: $\quad f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ (wegen (2'))

Nach dem MWS: $\forall x, n \; \exists \, \theta_{x,n} \in \,]0,1[$ mit

$$f_n(x) = \frac{\partial f}{\partial t}(t + \theta h_n, x)$$

Nach (3') gilt $\quad |f_n| \leq g \quad \forall n \in \mathbb{N}$,

und damit

$$F'(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(t+h_n) - F(t)}{h_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int_X f_n(x) \, d\mu(x)$$

$$\underset{12\text{-}36}{\overset{\text{maj.-Konv.}}{=}} \int_X \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) \, d\mu(x) \qquad \blacksquare$$

13. Lebesgue-Räume und der Satz von Radon-Nikodym

Grundlegende Konzepte für verschiedene Zweige der Mathematik!

13.1. L^p als normierter Raum

Im folgende sei stets $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

13.1. Definition

(a)
- $f: X \to \mathbb{C}$ messbar $:\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$ messbar
- $f: X \to \mathbb{C}$ (μ-)integrierbar $:\Leftrightarrow$ $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im}(f) \in \mathcal{L}^1(X, \mu)$

  in diesem Fall: $\int_X f \, d\mu := \int_X \operatorname{Re}(f) \, d\mu + i \int_X \operatorname{Im}(f) \, d\mu$

(b) Sei $f: X \to \mathbb{K}$ (oder $\overline{\mathbb{R}}$) messbar, sei $p \in [1, \infty]$

$p \in [1, \infty[$: $\|f\|_p := \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{1/p}$ p-Norm

$$p = \infty: \quad \|f\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$$
$$:= \inf\{\alpha > 0 : \mu(\{|f| > \alpha\}) = 0\}$$
$$= \inf_{\substack{N \in \mathcal{A} \\ \mu(N) = 0}} \sup_{x \in X \setminus N} |f(x)|$$

(μ-) wesentliches Supremum

(c)
$$\mathcal{L}^p := \mathcal{L}^p(\mu) := \mathcal{L}^p(X, \mu) := \left\{ f: X \to \mathbb{K} : \begin{array}{l} f \text{ messbar und} \\ \|f\|_p < \infty \end{array} \right\}$$

p-fach integrierbare Fkt'en

13.2. Lemma (a) Alle bisherigen Eigenschaften des Integrals, die nicht von der Ordnung auf $\mathbb{R}$ (bzw. $\overline{\mathbb{R}}$) abhängen, gelten auch für $\mathbb{C}$-wertige Integranden (vor allem: $\int$ ist $\mathbb{C}$-Linearform)

(b) Auch für $f \in \mathcal{L}^1$ $\mathbb{C}$-wertig gilt Dreiecks Ung.

$$\left| \int f \, d\mu \right| \leq \int |f| \, d\mu$$

Beweis: (a) Zerlege in Real- und Imaginärteil

(b) Wähle $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$, so dass

$$0 \leq \left| \int f \, d\mu \right| = \alpha \int f \, d\mu = \int \alpha f \, d\mu$$

$$= \operatorname{Re} \int \alpha f \, d\mu \quad (+ \underbrace{i \operatorname{Im} \int \alpha f \, d\mu}_{=0})$$

$$= \int \underbrace{\operatorname{Re}(\alpha f)}_{\leq |\alpha f| = |f|} d\mu \leq \int |f| \, d\mu \qquad \blacksquare$$

13.3. Satz Seien $f, g : X \to \mathbb{K}$ (oder $\overline{\mathbb{R}}$) messbar. Dann gilt

(a) $\forall r, p, q \in [1, \infty] : \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \Rightarrow$

$$\|fg\|_r \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q \quad \text{(verallg. Hölder-Ungleichung)}$$

(b) $\forall p \in [1, \infty]$:

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p \quad \text{(Minkowski-Ungleichung)}$$

(c) Falls $\mu(X) < \infty$ und $1 \leq p \leq q \leq \infty$, dann

$$\mathcal{L}^q \subseteq \mathcal{L}^p \quad \text{und} \quad \|f\|_p \leq [\mu(X)]^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

13.4. Bemerkung

(1) Aus (b) $\Rightarrow$ $\|\cdot\|_p$ ist Halbnorm auf $\mathcal{L}^p$, d.h.

$$\underset{\substack{\uparrow \\ 0\text{-Fkt}}}{\|0\|_p = 0}, \quad \underset{(\alpha \in \mathbb{K})}{\|\alpha f\|_p = |\alpha| \cdot \|f\|_p}, \quad \|f+g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

Klar: aus $\|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0$ f.ü., also keine Norm

(2) Voraussetzung $\mu(X) < \infty$ wesentlich in (c):

Bsp.: $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, $\mu = \lambda$

$\Rightarrow$ $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{konstante Fkt} = 1}}{1} \in \mathcal{L}^\infty$ aber $1 \notin \mathcal{L}^p$ $\forall p \in [1, \infty[$

Beweis von Satz 13.3.

(a) mit $r = 1$ & (b): analog zu Satz 7.7. in Ana2

ersetze lediglich $\sum_{j=1}^{\nu}$ durch $\int_X d\mu$ im letzten Schritt.

Verallg. Hölder $(r \geq 1)$: aus Hölder $(r = 1)$:

$$\|fg\|_r = (\underbrace{\| |f|^r |g|^r \|_1}_{\substack{\text{Hölder mit } \frac{1}{\tilde p} + \frac{1}{\tilde q} = 1 \\ \leq \| |f|^r \|_{\tilde p} \| |g|^r \|_{\tilde q}}})^{1/r} \leq \underbrace{\| |f|^r \|_{\tilde p}^{1/r}}_{\|f\|_p} \underbrace{\| |g|^r \|_{\tilde q}^{1/r}}_{\|g\|_q}$$

mit $p := r\tilde p$, $q := r\tilde q$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$ ✓

(c): aus (a) mit $g = 1$: Sei $1 \leq p < q \leq \infty$ ($p = q$: klar)

(a) mit $r = p$ und $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$ gibt

$$\|f\|_p = \|1 \cdot f\|_p \leq \underbrace{\|1\|_{p'}}_{\mu(X)^{\frac{1}{p'}}} \cdot \|f\|_q = \mu(X)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \|f\|_q$$

D.h. $f \in \mathcal{L}^q \Rightarrow f \in \mathcal{L}^p$ ∎

13.5. Korollar Sei $\mu(X) < \infty$ und $1 \le p \le q \le \infty$.

Dann ist $\mathcal{L}^q$ dicht in $\mathcal{L}^p$ (bzgl. $\|\cdot\|_p$).

Genauer: $\forall f \in \mathcal{L}^p \; \exists (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{L}^q : \; \|f - f_n\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$.

Beweis: Wegen Satz 13.3.(c) genügt es zu zeigen:

$\mathcal{L}^\infty$ dicht in $\mathcal{L}^p$ für $p \in [1,\infty[$.

Sei also $f \in \mathcal{L}^p$. O.E. sei $f \ge 0$ (sonst zerlege in Re, Im, und $+,-$ - Anteile).

Setze $f_n := \min(f, n) \in \mathcal{L}^\infty$ für $n \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow \|f - f_n\|_p^p = \int_X |f - \min(f,n)|^p \, d\mu = \int_{\{f \ge n\}} (f - \min(f,n))^p \, d\mu$$

$$\le \int_{\{f \ge n\}} f^p \, d\mu = \int_X f^p \, d\mu - \int_{\{f < n\}} f^p \, d\mu \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

da $\int_{\{f<n\}} f^p = \int_X f^p \, \mathbb{1}_{\{f<n\}} \xrightarrow[\text{monot. Kgz.}]{n\to\infty} \int_X f^p$ $\blacksquare$

13.6. Definition Sei $p \in [1,\infty]$ und $\sim$ die Äquiv. rel. ($f \sim g :\Leftrightarrow f = g$ f.ü.) auf $\mathcal{L}^p$. Dann ist

$$L^p := L^p(\mu) := L^p(X,\mu) := \mathcal{L}^p/\sim$$

ein normierter Vektorraum bzgl. $\|\cdot\|_p$.

Zudem definiert $\langle f, g\rangle := \int_X \bar{f} g \, d\mu = \int_X \overline{f(x)}\, g(x) \, d\mu(x)$

ein Skalarprodukt auf L^2, das $\|\cdot\|_2$ induziert.

13.7. Konvention

(a) Üblicherweise schreibt man $f \in L^p$ für die Äquivalenzklasse $\{g : X \to \mathbb{K} : g = f \text{ f.ü.}\}$ von $f \in \mathcal{L}^p$

(b) $f \in L^p$ hat Eigenschaft $\mathcal{E}$

$:\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \underline{\forall} \text{ Repräsentanten } g \text{ der Äquiv.klasse } f \text{ gilt:} \\ \quad g \text{ hat Eigenschaft } \mathcal{E} \text{ f.ü.} \end{array} \right.$

13.8. Satz (Majorisierte Kgz. – L^p-Version)

Sei $p \in [1, \infty[$, sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ ex. pkt. weis (d.h. für bel. Wahl von Repräsentanten $\tilde{f}_n$ von f_n, $n \in \mathbb{N}$, $\exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0$: $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{f}_n(x)$ ex. $\forall x \in X \setminus N$).

Es gebe $g \in L^p$ mit $|f_n| \leq g \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Dann ist $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n \in L^p$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$

(vgl. Bem. 12.47.(2) für $p = 1$).

Beweis: Wir unterscheiden nicht zwischen f_n und $\tilde{f}_n$!

Also setze $\quad f(x) := \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) & , x \in X \setminus N \\ 0 & , x \in N \end{cases}$

$\Rightarrow f$ messbar und, da $|f(x)|^p \leq g(x)^p$ für f.a. $x \in X$ (Repräsentant) mit $|g|^p \in \mathcal{L}^1$

$\overset{\text{Kor. 12.32.}}{\Rightarrow} |f|^p \in \mathcal{L}^1$, also $f \in L^p$ (Äquiv.klasse!)

Betrachte $h_n := |f_n - f|^p \Rightarrow \bullet\ h_n \xrightarrow[\text{f.ü.}]{n\to\infty} 0$

$\bullet\ 0 \leq h_n \leq (\underbrace{|f_n|}_{\leq g} + \underbrace{|f|}_{\leq g})^p \overset{\text{f.ü.}}{\leq} 2^p g^p \in \mathcal{L}^1$

$\xRightarrow[\text{(maj. Kgz.)}]{\text{Satz 12.36.}} \lim\limits_{n\to\infty} \int_X h_n \, d\mu = 0 \quad \blacksquare$

13.2. Vollständigkeit von L^p

zur Vorbereitung:

$\boxed{13.9.\ \text{Lemma}}$ Sei $p \in [1,\infty[$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$, $f_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dann gilt
$$\Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \Big\|_p \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$$

Insbes. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p < \infty \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in L^p$ (messbar klar!)

__Beweis:__ Moral: Minkowski-Ungl.!

Sei $N \in \mathbb{N}$; da $f_n \geq 0$ messbar $\forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim\limits_{N\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)^p \in E^*$ existiert, isoton in N

monot. Kgz.
$$\Rightarrow \lim_{N\to\infty} \int \left(\sum_{n=1}^{N} f_n\right)^p d\mu = \int \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n\right)^p d\mu$$

$$\Rightarrow \Big\| \sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \Big\|_p = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\Big\| \sum_{n=1}^{N} f_n \Big\|_p}_{\overset{\text{Minkowski}}{\leq} \sum_{n=1}^{N} \|f_n\|_p} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_p$$

■

$\boxed{13.10.\ \text{Satz}}$ (Riesz-Fischer)

L^p ist Banach-Raum $\forall p \in [1,\infty]$.

Insbes. ist L^2 Hilbertraum bzgl. Skalarprodukt
$$\langle f, g \rangle := \int_X \overline{f(x)}\, g(x)\, d\mu \quad \left(\|f\|_2^2 = \langle f, f \rangle \right)$$

__Beweis:__ Nur die Vollständigkeit bzgl. $\|\cdot\|_p$ ist zu zeigen.

__1. Fall:__ $p \in [1,\infty[$

1. Schritt: Zeige: $\exists$ Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $(f_{n_k}(x))_k \subseteq \mathbb{K}$ Cauchy in $\mathbb{K}$ für f.a. $x \in X$

Also: $(f_n)_n \subseteq L^p$ Cauchy (bzg. $\|\cdot\|_p$) $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_k \in \mathbb{N}$,
$n_k < n_{k+1}\ \forall k$, mit $\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < 2^{-k}\quad \forall k \in \mathbb{N}$

setz $h := |f_{n_1}| + \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \overset{\text{Lemma 13.9.}}{\Longrightarrow} h \in L^p$,

da $\quad \|f_{n_1}\|_p + \sum_{k\in\mathbb{N}} \underbrace{\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p}_{< 2^{-k}} < \infty$

$f_{n_1} \in L^p$
$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \in L^p \Rightarrow$ für f.a. $x \in X$ gilt:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)| < \infty$$

$\Rightarrow \forall k, k' \in \mathbb{N},\ k' \geq k$

$$|f_{n_{k'}}(x) - f_{n_k}(x)| \leq \sum_{j=k}^{k'-1} |f_{n_{j+1}} - f_{n_j}| \xrightarrow[\text{glm. in } k' \geq k]{k\to\infty} 0$$

$\Rightarrow$ Beh.

2. Schritt: verwende Vollständigkeit von $\mathbb{K}$, um einen Kandidaten für gesuchten Grenzwert (in L^p) zu konstruieren.

Also: 1. Schritt & $\mathbb{K}$ vollst $\Rightarrow \exists N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0\ \forall x \in X \setminus N$:

$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x) =: f(x)$ exist.; setze $f(x) := 0$ für $x \in N$

$\Rightarrow \quad f: X \to \mathbb{K}$ messbar ✓

3. Schritt: Zeige $f \in L^p$ und $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_p = 0$

Also: da $f_{n_k} = f_{n_1} + \sum_{j=1}^{k-1} (f_{n_{j+1}} - f_{n_j}) \Rightarrow |f_{n_k}| \leq h\quad \forall k$

$\overset{\text{Satz 13.8}}{\Longrightarrow}$ (maj.-Kgz. in L^p) $\quad f \in L^p$ und $\lim_{k\to\infty} \|f_{n_k} - f\|_p = 0$

$(f_n)_n$ Cauchy (in L^p) & $f_{n_k} \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{k\to\infty} f \Rightarrow f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{n\to\infty} f$

2. Fall: $p=\infty$.

Sei $(f_n)_n$ Cauchy in L^∞, d.h. $\forall k\in\mathbb{N}\ \exists N\in\mathbb{N}$:

$$\|f_n-f_m\|_\infty < \frac{1}{k}$$

Per def. $\|\cdot\|_\infty$: es folgt

$\forall k\in\mathbb{N}\ \exists N\in\mathbb{N}: \forall n,m\geq N\ \exists \mathcal{N}_{n,k,m}\in\mathcal{A}$ Nullmenge

mit
$$\sup_{x\in X\setminus\mathcal{N}_{n,k,m}} |f_n(x)-f_m(x)| < \frac{1}{k}$$

Setze $\mathcal{N} := \bigcup_{n,m,k\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_{n,m,k}$ Nullmenge (abz. Vereir. Nullm.)

Dann:

$\forall k\in\mathbb{N}\ \exists N\in\mathbb{N}\ \forall n,m\geq N$:
$$\sup_{x\in X\setminus\mathcal{N}} |f_n(x)-f_m(x)| < \frac{1}{k} \quad (*)$$

- also ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}\subseteq\mathbb{K}$ Cauchy für alle $x\in X\setminus\mathcal{N}$

$\mathbb{K}$ vollst. $\Rightarrow \exists f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) \quad \forall x\in X\setminus\mathcal{N}$

Setze
$$f(x) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(x), & x\in X\setminus\mathcal{N} \\ 0, & x\in\mathcal{N}\end{cases}$$
– messbar (12.9 (d))

Aus $(*)$, durch $m\to\infty$, folgt

$\forall k\in\mathbb{N}\ \underset{(N=N(k))}{\exists N\in\mathbb{N}}: \forall n\geq N \quad \sup_{x\in X\setminus\mathcal{N}} |f_n(x)-f(x)| \leq \frac{1}{k}$

$\Rightarrow f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_\infty]{n\to\infty} f, \quad \sup_{x\in X\setminus\mathcal{N}} |f(x)| \leq 1 + \|f_{N(1)}\|_\infty < \infty$

$\Rightarrow f\in L^\infty$ ∎

13.11. Korollar Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^p$, $f \in L^p$ ($p \in [1,\infty[$) mit $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_p]{n\to\infty} f$. Dann $\exists$ Teilfolge $(f_{n_k})_k$ mit $f_{n_k} \xrightarrow[\text{f.ü.}]{k\to\infty} f$.

Beweis: Folgt aus Bew. von Satz 13.10. $\blacksquare$

13.3. Dichte Unterräume von L^p

Hier: $(X, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, \lambda^d)$

13.12. Definition

Sei $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ messbar

- (wesentlicher) Träger: $\text{ess supp} f := \text{supp} f := \Big(\bigcup_{\substack{A \subseteq \mathbb{R}^d \text{ offen} \\ f|_A = 0 \ \lambda^d\text{-f.ü.}}} A \Big)^c$

[NB: (i) supp f abgeschlossen.
(ii) $f = g$ f.ü. $\Rightarrow$ $\text{supp} f = \text{supp}\, g$ $\Rightarrow$ wohldef für $f \in L^p$]

- $C(\mathbb{R}^d) := \{ f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} : f \text{ stetig} \}$ Vektorraum der $\mathbb{K}$-wertigen stetigen Fkt'en über $\mathbb{R}^d$

für $k \in \mathbb{N}$: $C^k(\mathbb{R}^d) := \{ f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{K} : f \text{ } k\text{-mal stetig partiell diff-bar} \}$

$C^\infty(\mathbb{R}^d) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(\mathbb{R}^d)$ beliebig oft diff-bare Fkt.

$C_c(\mathbb{R}^d) := \{ f \in C(\mathbb{R}^d) : \text{supp} f \text{ kompakt} \}$

$C_c^k(\mathbb{R}^d) := \{ f \in C^k(\mathbb{R}^d) : \text{supp} f \text{ kompakt} \}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

13.13. Lemma

(a) $f \in C(\mathbb{R}^d) \Rightarrow \text{supp} f = \overline{\{ x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0 \}}$ - topologischer Träger von f

(b) $\forall p \in [1, \infty]$ $\forall k \in \mathbb{N}$:

$$C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \subseteq C_c^k(\mathbb{R}^d) \subseteq C_c(\mathbb{R}^d) \subseteq L^p(\mathbb{R}^d)$$

identifiziere $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$ mit Äquiv.kl. $\{ g \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) : g = f \text{ f.ü.} \} \in L^p$

Beweis: (a) Übung.

(b) nur rechte Inklusion nicht trivial. Sei $f \in C_c(\mathbb{R}^d)$.

f stetig auf Kompaktum $\Rightarrow$ messbar (Satz 12.3(b)) und beschränkt (Satz 7.50)

$\Rightarrow f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

$\forall p \in [1,\infty[\, : \int_{\mathbb{R}^d} |f|^p \, d\lambda^d \leq \|f\|_\infty^p \cdot \lambda^d(\operatorname{supp} f) < \infty \Rightarrow f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ ∎

13.14. Beispiel: $d = 1$, $f = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

$\Rightarrow$ wesentlicher Träger $= \emptyset$ (da $f = 0$ λ-f.ü. in $\mathbb{R}$)

topologischer Träger $= \mathbb{R}$ (da $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$).

13.15. Satz $\forall p \in [1,\infty[$ (nicht ∞) gilt:

$C_c(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$ (bzgl. $\|\cdot\|_p$)

Beweis: Zu zeigen: $\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists g \in C_c(\mathbb{R}^d)$:

$$\|f - g\|_p < \varepsilon$$

o.E. reicht es dies für $f \geq 0$ zu tun (sonst zerlege f in $(\operatorname{Re} f)_\pm$ und $(\operatorname{Im} f)_\pm$).

o.E. darf man auch noch $\operatorname{supp} f$ kompakt annehmen,

denn $\|f \mathbb{1}_{[-n,n]^d} - f\|_p \xrightarrow{n\to\infty} 0$ nach major. Kgz. 13.8.

Sei also $\varepsilon > 0$ und $0 \leq f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp} f$ kpt.

$f \in E^*$ $\Rightarrow$ $\exists (\varphi_n)_n \subseteq E$ Treppenfkt. mit $\operatorname{supp} \varphi_n \subseteq \operatorname{supp} f$ $\forall n$

und $\varphi_n \nearrow f$

Satz 12.9. $\Rightarrow$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n \geq n_0$: $\|\underbrace{\varphi_n}_{\sum_{j=1}^J \underbrace{\alpha_j}_{>0} \mathbb{1}_{A_j}} - f\|_p < \varepsilon$ $\quad (*)$

$A_j \in \mathcal{B}^d$ beschränkt

Beh: $\forall \tilde{\varepsilon} > 0$ $\forall A \in \mathcal{B}^d$ beschränkt $\exists h \in C_c(\mathbb{R}^d)$

mit $\|\mathbb{1}_A - h\|_p < \tilde{\varepsilon}$ (Beweis später)

Beh.

$\Rightarrow \exists h_j \in C_c(\mathbb{R}^d): \|\mathbb{1}_{A_j} - h_j\|_p < \frac{\varepsilon}{J\alpha_j}$

$\Rightarrow h := \sum_{j=1}^{J} \alpha_j h_j \in C_c(\mathbb{R}^d)$ und mit (*). $\Rightarrow$

$$\|h-f\|_p \le \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \|\mathbb{1}_{A_j} - h_j\|_p + \|\varphi_u - f\| < 2\varepsilon$$

Also folgt Satz 13.15 aus Beh.!

Beweis der Beh.: Aus Regularität von λ^d (Satz 11.42): $\exists\, \mathcal{U}, K \subseteq \mathbb{R}^d$, K kpt., $\mathcal{U}$ offen mit $K \subseteq A \subseteq \mathcal{U}$ und $\lambda^d(\mathcal{U}\setminus K) < \tilde{\varepsilon}^p$; da A beschränkt, kann man auch $\mathcal{U}$ beschränkt wählen!

1. Fall: $K = \emptyset$; wähle $h = 0$ (stetig!) $\Rightarrow \|\mathbb{1}_A - h\|_p = \|\mathbb{1}_A\|_p \le (\lambda^d(\mathcal{U}))^{1/p} < \tilde{\varepsilon}$

2. Fall: $K \neq \emptyset$: $\forall x \in K \subseteq \mathcal{U}\ \exists \delta_x > 0: B_{\delta_x}(x) \subseteq \mathcal{U}$

$\Rightarrow \operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c) \ge \delta_x > 0 \quad \forall x \in K$; hier, $\operatorname{dist}(x,\mathcal{U}^c) := \inf_{y \in \mathcal{U}^c} |x-y|$

Beh: $\begin{array}{l} K \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c) \end{array}$ ist stetig (sogar Lipschitz-stetig)

denn: $\operatorname{dist}(\tilde{x}, \mathcal{U}^c) = \inf_{y \in \mathcal{U}^c} \underbrace{|\tilde{x}-y|}_{\le |\tilde{x}-x| + |x-y|} \le |x-\tilde{x}| + \operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c)$

zusammen mit $x \leftrightarrow \tilde{x} \Rightarrow |\operatorname{dist}(x,\mathcal{U}^c) - \operatorname{dist}(\tilde{x},\mathcal{U}^c)| \le |x-\tilde{x}|$

Satz 7.50 $\Rightarrow$ (K kpt.) $\quad 0 < \min_{x \in K} \operatorname{dist}(x, \mathcal{U}^c) =: \operatorname{dist}(K, \mathcal{U}^c)$

Setze $h: \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to [0,1] \\ x \mapsto \min\left\{1, \dfrac{\operatorname{dist}(x,\mathcal{U}^c)}{\operatorname{dist}(K,\mathcal{U}^c)}\right\} \end{array}$

$\Rightarrow h$ stetig, $h|_K = 1$, $h|_{\mathcal{U}^c} = 0 \Rightarrow \operatorname{supp} h$ kpt., da $\subseteq \mathcal{U}$

– also $h \in C_c(\mathbb{R}^d)$ und

$$\underbrace{\|h - \mathbb{1}_A\|_p}_{(h-\mathbb{1}_A)\mathbb{1}_{\mathcal{U}\setminus K}} \le \underbrace{\|h - \mathbb{1}_A\|_\infty}_{\le 1} \underbrace{\|\mathbb{1}_{\mathcal{U}\setminus K}\|_p}_{\lambda^d(\mathcal{U}\setminus K)^{1/p}} < \tilde{\varepsilon}$$

■

13.16. Bemerkung

Man kann zeigen, dass $C_c(\mathbb{R}^d)$ eine abzählbare dichte Teilmenge bzgl. $\|\cdot\|_p$ (sogar bzgl. $\|\cdot\|_\infty$!) besitzt (z.B. mittels Approximationssatz von Weierstraß; siehe "Numerik I"), d.h. $C_c(\mathbb{R}^d)$ ist separabel; $\Rightarrow$ $L^p(\mathbb{R}^d)$ separabel $\forall p \in [1, \infty[$.

13.17. Korollar (a) $\forall p \in [1, \infty]$ gilt:

$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $C_c(\mathbb{R}^d)$ (bzgl. $\|\cdot\|_p$; d.h.

$\forall f \in C_c(\mathbb{R}^d), \forall \varepsilon > 0 \; \exists \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d) : \|f - \varphi\|_p < \varepsilon$)

(b) Insbes.: $\forall p \in [1, \infty[$ gilt:

$C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist dicht in $L^p(\mathbb{R}^d)$.

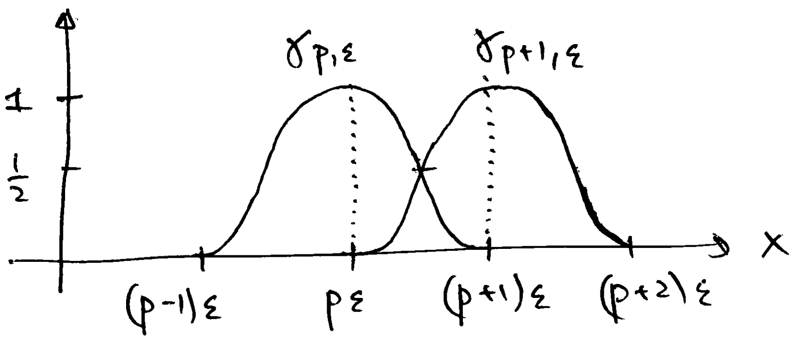
Zum Beweis, Hilfsmittel: „Teilung der Eins":

13.18. Definition Sei $\varepsilon > 0$.

$\{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p \in \mathbb{Z}^d}$ (C^∞-) Teilung der Eins (von $\mathbb{R}^d$) $:\Leftrightarrow$ $\forall p \in \mathbb{Z}^d$ sei $\gamma_{p,\varepsilon} \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit

- $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} = \displaystyle\mathop{\times}_{j=1}^{d} [\varepsilon p_j - \varepsilon, \varepsilon p_j + \varepsilon]$
- $\gamma_{p,\varepsilon} \geq 0$
- $\displaystyle\sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\varepsilon}(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Illustration für $d = 1$:



13.19. Beispiel

Für $\psi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to [0,1] \\ t \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{1-t^2}\right), & |t| < 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$

gilt $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \psi = [-1, 1]$ (d.h. $C_c^\infty(\mathbb{R}^d) \neq \{0\}$)

(Beweis: Analog zu Üb. 4.1, Ana 2)

Sei $\gamma(t) := \dfrac{\psi(t)}{\sum_{k\in\mathbb{Z}} \psi(t-k)}$ $\Rightarrow$
- $\gamma \in C_c^\infty(\mathbb{R})$
- $\operatorname{supp}\gamma = [-1,1]$
- $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma(t-k) = 1$

$\neq 0 \ \forall t$

Für $x\in\mathbb{R}^d$, $p\in\mathbb{Z}^d$, $\varepsilon>0$ sei

$$\gamma_{p,\varepsilon}(x) := \prod_{j=1}^d \gamma\left(\frac{x_j}{\varepsilon} - p_j\right) \Rightarrow \{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p\in\mathbb{Z}^d} \text{ ist Teilung der Eins}$$

Beweis von Kor. 13.17: Es reicht (a) zu zeigen (denn (b) folgt aus (a) & Satz 13.15.)

Um (a) zu zeigen reicht es zu zeigen:

Beh: Für alle $f\in C_c(\mathbb{R}^d)$, mit $\operatorname{supp} f \subseteq \overline{B_R(0)}$, $R>0$, und $\forall \tilde{\varepsilon}>0$ $\exists\, \varphi\in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit $\operatorname{supp}\varphi \subseteq \overline{B_{R+1}(0)}$ und

$$\underbrace{\sup_{x\in \overline{B_{R+1}(0)}} |\varphi(x)-f(x)|}_{=:\ \|\varphi-f\|_{\infty,\overline{B_{R+1}}}} < \tilde{\varepsilon}$$

denn: Beh $\Rightarrow$ $\|\varphi-f\|_\infty < \tilde{\varepsilon}$ & $\forall p\in[1,\infty[$:

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi-f|^p\, d\lambda^d \le \|\varphi-f\|^p_{\infty,\overline{B_{R+1}}} \cdot \lambda^d(\overline{B_{R+1}(0)}) < \tilde{\varepsilon}^p \lambda^d(\overline{B_{R+1}(0)}) \equiv \varepsilon^p \Rightarrow 13.17.(a). \checkmark$$

Beweis Beh: Sei $\{\gamma_{p,\delta}\}_{p\in\mathbb{Z}^d}$ Teil. der Eins aus 13.19. $(\delta>0)$

setze
$$f_\delta := \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} f(p\delta)\gamma_{p,\delta} \quad \left(\text{d.h. } f_\delta(x) = \sum_{p\in\mathbb{Z}^d} f(p\delta)\gamma_{p,\delta}(x)\right)$$

- endliche Summe, da $f\in C_{\underset{\approx}{c}}(\mathbb{R}^d)$, d.h. $f_\delta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$. $(\forall\delta>0)$

Bem.: $f(p\delta)\gamma_{p,\delta}(x) \neq 0 \Rightarrow p\delta \in \overline{B_R(0)}$ & $|x_\nu - p_\nu\delta| \le \delta$ $\nu = 1,\dots,d$

wähle $\delta < \frac{1}{\sqrt{d}}$; $\Rightarrow$ $\operatorname{supp} f_\delta \subseteq \overline{B_{R+1}(0)}$.

Da f gleichm. stetig auf $\overline{B_{R+1}(0)}$ (kpt! Satz 7.52.):

$$\forall\tilde{\varepsilon}>0\ \exists\tilde{\delta}>0: \ \begin{matrix} |x_\nu - y_\nu| \le \tilde{\delta} \\ \forall \nu = 1,\dots,d \\ (x,y\in\overline{B_{R+1}(0)}) \end{matrix} \Rightarrow |f(x)-f(y)| \le \tilde{\varepsilon} \quad (*)$$

Für $\tilde{\varepsilon} > 0$, sei $\tilde{\delta} > 0$ $\left(\land \tilde{\delta} < \frac{1}{\sqrt{d}} \right)$, so $(*)$ gilt.

Dann: $\gamma_{p,\tilde{\delta}}(x) \neq 0 \Rightarrow |x_\nu - p_\nu \tilde{\delta}| \leq \tilde{\delta} \overset{y = p\tilde{\delta}}{\Rightarrow} |f(x) - f(p\tilde{\delta})| \leq \tilde{\varepsilon}$

supp $\gamma_{p,\tilde{\delta}}$! $\quad \nu = 1, \dots, d$

$$\Rightarrow |f_{\tilde{\delta}}(x) - f(x)| \overset{(!)}{=} \Big| \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \big(f(p\tilde{\delta}) - f(x) \big) \gamma_{p,\tilde{\delta}}(x) \Big|$$

$1 = \sum_p \gamma_{p,\tilde{\delta}}$ $\qquad$ $1 = \sum_p \gamma_{p,\tilde{\delta}}$

$$\underset{\gamma_{p,\tilde{\delta}} \geq 0}{\leq} \tilde{\varepsilon} \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\tilde{\delta}}(x) = \tilde{\varepsilon}.$$

Wähle $\varphi := f_{\tilde{\delta}} \Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

13.20. Bemerkung

(a) $C_c(\mathbb{R}^d)$ (und damit auch nicht $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$) ist nicht dicht in $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ (Üb.!).

(b) Nach 13.17(b) ist $C_c^\infty(\mathbb{R}^d)$ nicht abgeschlossen bzg. $\|\cdot\|_p$ für $p \in [1, \infty[$.
Da endl. dim. Unterräume immer abgesch.
$\Rightarrow \dim C_c^\infty(\mathbb{R}^d) = +\infty$.

13.4. Geometrie in Hilbert-Räumen

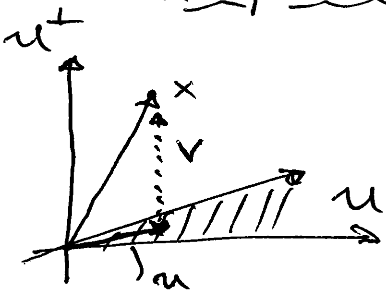
Hier: $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum über $\mathbb{K}$ mit Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$

($\Rightarrow$ Norm: $\|x\|^2 = \langle x,x\rangle \ \forall x\in\mathcal{H}$; $d(x,y) := \|x-y\|$ Metrik; $(\mathcal{H},d)$ vollständig). (Bsp.: L^2)

13.21. Definition Sei $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{H}$ ein (lin.) Unterraum.

$\mathcal{U}^\perp := \{y\in\mathcal{H} : \langle x,y\rangle = 0 \ \forall x\in\mathcal{U}\}$ orthogonales Komplement von $\mathcal{U}$

13.22. Bemerkung



$\mathcal{U}\cap\mathcal{U}^\perp = \{0\}$, denn sei

$x\in\mathcal{U}\cap\mathcal{U}^\perp \Rightarrow 0 = \langle x,x\rangle = \|x\|^2$

$= x = 0$

13.23. Lemma Sei $\mathcal{U}\subseteq\mathcal{H}$ ein abgeschlossener Unterraum und $x\in\mathcal{H}$. Dann $\exists!\, u\in\mathcal{U}$ und $\exists!\, v\in\mathcal{U}^\perp$ mit

$$x = u + v$$

Beweis: Sei $x\in\mathcal{H}$, sei $(y_n)_n\subseteq\mathcal{U}$: $\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\| = \inf_{y\in\mathcal{U}}\|x-y\| =: \delta \geq 0$

$\forall a,b\in\mathcal{H}$ gilt Parallelogrammidentität: (nachrechnen!)

$$\frac{1}{2}\left(\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2\right) = \|a\|^2 + \|b\|^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(\langle a,b\rangle + \langle b,a\rangle - \langle a,b\rangle - \langle b,a\rangle\right)}_{0}$$

also für $a := x-y_m$, $b := x-y_n$:

$$\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2 - 2\underbrace{\Big\|x - \underbrace{\frac{y_m+y_n}{2}}_{\in\mathcal{U}}\Big\|^2}_{\geq\delta^2} = \frac{1}{2}\|y_m-y_n\|^2$$

$\Rightarrow \limsup_{m,n\to\infty} \frac{1}{2}\|y_m - y_n\|^2 \leq \delta^2 + \delta^2 - 2\delta^2 = 0 \Rightarrow (y_n)_n \subseteq \mathcal{U}$ Cauchy

$\mathcal{H}$ vollständig $\Rightarrow \exists u \in \mathcal{H}$ mit $y_n \xrightarrow[\|\cdot\|]{n\to\infty} u$;

$\mathcal{U}$ abgeschlossen $\Rightarrow u \in \mathcal{U}$.

Nun für $t \in \mathbb{R}$ und $u' \in \mathcal{U}$ bel. betrachte

$$f(t) := \|x - \underbrace{u - tu'}_{\in \mathcal{U}}\|^2 = \|x-u\|^2 + t^2\|u'\|^2 - 2t \operatorname{Re}\langle x-u, u'\rangle$$

per. def. von u ist $t=0$ globale Minimalstelle von f

$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt} f(t)\Big|_{t=0} = -2\operatorname{Re}\langle x-u, u'\rangle$

analog mit $f(it)$ falls $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\Rightarrow$ $\langle x-u, u'\rangle = 0$

$\Rightarrow v := x - u \in \mathcal{U}^\perp$.

Eindeutigkeit: sei $u_1 + v_1 = x = u_2 + v_2$

$\Rightarrow \underbrace{u_1 - u_2}_{\in \mathcal{U}} = \underbrace{v_2 - v_1}_{\in \mathcal{U}^\perp} \overset{13.22}{\Rightarrow} u_1 = u_2 \wedge v_1 = v_2$ ∎

$\boxed{13.24.\ \text{Satz}}$ (Riesz-Darstellung stetiger linearer Funktionale)

Sei $\ell : \mathcal{H} \to \mathbb{K}$ stetig, linear (d.h. $\ell(\alpha x + \beta y) = \alpha \ell(x) + \beta \ell(y)$ $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$, $\forall x, y \in \mathcal{H}$)

Dann $\exists!\ x_\ell \in \mathcal{H}$: $\ell(x) = \langle x_\ell, x\rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

Beweis: $\mathcal{U} := \ker \ell = \{x \in \mathcal{H} : \ell(x) = 0\} = \ell^{-1}(\{0\})$

ist abgeschlossener (lin.) Unterraum von $\mathcal{H}$

↑ da ℓ stetig.

o.E. sei $\ell \neq 0$ (sonst tut es $x_\ell = 0$!).

$\Rightarrow \mathcal{U} \subsetneq \mathcal{H} \Rightarrow \exists y \in \mathcal{H} \setminus \mathcal{U} \overset{\text{Lem.}}{\underset{13.23}{\Longrightarrow}} y = \underset{\mathcal{U}}{\underset{\uparrow}{u}} + \underset{\mathcal{U}^\perp}{\underset{\uparrow}{v}}$ und $v \neq 0$

Sei $v_1 := \frac{v}{\|v\|} \Rightarrow \ell(v_1) = \frac{1}{\|v\|} \ell(v) \neq 0$

$\Rightarrow \forall x \in \mathcal{H}$ gilt: $x - \frac{\ell(x)}{\ell(v_1)} v_1 \in \mathcal{U}$ (rechnen!)

$\overset{v_1 \in \mathcal{U}^\perp}{\Longrightarrow} \quad 0 = \langle v_1, x - \frac{\ell(x)}{\ell(v_1)} v_1 \rangle = \langle v_1, x \rangle - \frac{\ell(x)}{\ell(v_1)} \underbrace{\|v_1\|^2}_{1}$

$\Rightarrow \ell(x) = \langle x_\ell, x \rangle$ mit $x_\ell := \overline{\ell(v_1)}\, v_1 \in \mathcal{H}$

Eindeutigkeit: gelte $\langle x_\ell^1, x \rangle = \ell(x) = \langle x_\ell^2, x \rangle \quad \forall x \in \mathcal{H}$

$\Rightarrow \langle x_\ell^1 - x_\ell^2, x \rangle = 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$

$\overset{\text{wähle } x = x_\ell^1 - x_\ell^2}{\Longrightarrow} \quad x_\ell^1 = x_\ell^2$ ∎

13.5. Satz von Radon - Nikodym

Jetzt wieder $(X, \mathcal{A})$ bel. Messraum!

13.25. Definition Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$.

(i) ν absolut stetig bzgl. μ (in Zeichen: $\nu \ll \mu$) $:\Leftrightarrow$ $\forall A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) = 0$ gilt auch $\nu(A) = 0$ $(\mu(A) = 0 \Rightarrow \nu(A) = 0)$

(ii) ν hat Dichte bzgl. μ $:\Leftrightarrow$ $\exists f \in E^*: \nu(A) = \int_A f \, d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$

Notation: $f =: \dfrac{d\nu}{d\mu}$ μ-Dichte von ν oder Radon-Nikodym-Ableitung von ν bzgl. μ

(Falls μ σ-endlich! Siehe auch 13.26(b))

13.26. Bemerkung

(a) μ Maß auf $\mathcal{A}$, $f \in E^*$, $\nu(A) := \int_A f \, d\mu$, $A \in \mathcal{A}$
$\Rightarrow$ ν ist Maß auf $\mathcal{A}$ (Üb!).

(b) Falls f und g beide μ-Dichten von ν, und μ σ-endlich, gilt $f = g$ μ-f.ü. Also ist Dichte wohldef. (f.ü.) und in diesem Fall eindeutig. Notation „$\dfrac{d\nu}{d\mu}$" hat also Sinn.

13.27 Satz (Radon-Nikodym) Seien μ, ν Maße auf $\mathcal{A}$.

Dann gilt

(a) ν hat eine μ-Dichte $\dfrac{d\nu}{d\mu}$ $\Rightarrow$ $\nu \ll \mu$

(b) Falls μ σ-endlich ist, gilt auch

$$\nu \ll \mu \Rightarrow \nu \text{ hat } \mu\text{-Dichte } \frac{d\nu}{d\mu}$$

(die μ-f.ü. eindeutig ist; siehe 13.26(b)).

Beweis

(a) Klar, da für $A \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A)=0 \Rightarrow f\mathbb{I}_A = 0$ μ-f.ü.

$\Rightarrow \nu(A)=0.$

(b) Wir beweisen nur Spezialfall μ, ν endliche Maße.
(siehe z.B. Elstrodt VII.2 für den allg. Fall, oder Bauer)

$\forall A \in \mathcal{A}$ setze $\eta(A) := \mu(A) + \nu(A) \Rightarrow \eta$ ist endliches Maß auf $\mathcal{A}$ und $\underbrace{L^2(X,\eta;\mathbb{R})}_{\text{reellwertige Fkt'en}} =: L^2(\eta) \subseteq L^2(\nu) \underset{\nu \text{ endlich! } (13.3(c))}{\subseteq} L^1(\nu)$

$$\ell : L^2(\eta) \to \mathbb{R}, \quad f \mapsto \ell(f) := \int_X f\,d\nu$$
stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{H} = L^2(\eta)$

denn $|\ell(f)| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\int f^2 d\nu\right)^{1/2} [\nu(X)]^{1/2} \leq \|f\|_{L^2(\eta)} \sqrt{\nu(X)}$

$\Rightarrow$ für $f_n \xrightarrow[\|\cdot\|_{L^2(\eta)}]{n\to\infty} f \Rightarrow \underbrace{|\ell(f_n) - \ell(f)|}_{\ell(f_n - f)} \leq (\nu(X))^{1/2} \|f_n - f\|_{L^2(\eta)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Somit Riesz-Darstellung (Satz 13.24.):

$$\exists!\, f_0 \in L^2(\eta) : \ell(f) = \langle f_0, f\rangle_{L^2(\eta)} = \int_X f_0 f\, d\eta \quad (*)$$

$\Rightarrow$

- $\forall A \in \mathcal{A}$ gilt: $\int_A f_0\, d\eta = \int_X f_0 \mathbb{I}_A\, d\eta \overset{(*)}{=} \ell(\mathbb{I}_A) = \nu(A) \geq 0 \quad (**)$

$\Rightarrow f_0 \geq 0$ η-f.ü. (denn wähle $A_- := \{f_0 < 0\} \Rightarrow f_0 \mathbb{I}_{A_-} = -(f_0)_-$

$\Rightarrow 0 \leq \int (f_0)_- d\eta = -\int_{A_-} f_0\, d\eta \overset{(**)}{=} -\nu(A_-) \leq 0$

$\Rightarrow \int (f_0)_- d\eta = 0 \underset{\text{Satz 12.30.}}{\Rightarrow} (f_0)_- = 0$ η-f.ü.)

- $\forall A \in \mathcal{A}$ gilt: $\int_A (1-f_0)\,d\eta \overset{(**)}{=} \eta(A) - \nu(A) = \mu(A) \geq 0$

wie oben
$\Rightarrow \quad 1 - f_0 \geq 0 \quad \eta$ - f.ü.

Also $\exists$ Repräsentant von f_0 (wird auch mit f_0 bezeichnet) mit $\quad 0 \leq f_0(x) \leq 1 \quad \forall x \in X$ und es gilt $(*)$.

Setze $X_1 := \{f_0 = 1\}$, $X_2 := \{0 < f_0 < 1\}$, $X_3 := \{f_0 = 0\}$

$\Rightarrow X_j \in \mathcal{A}$, $j = 1,2,3$, und $X_1 \dot\cup X_2 \dot\cup X_3 = X$

Es gilt:

(1): $\nu(X_3) = 0$ wegen $(**)$

(2): $\int_A (1-f_0)\,d\nu = \underbrace{\nu(A)}_{\int_A f_0\,d\eta \ (**)} - \int_A f_0\,d\nu \underset{\eta = \mu + \nu}{=} \int_A f_0\,d\mu \quad \forall A \in \mathcal{A}$.

$\Rightarrow$ (2a): $\mu(X_1) = 0$ (wähle $A = X_1$ in (2))

(2b): $\int_{X_2} f(1-f_0)\,d\nu = \int_{X_2} f f_0\,d\mu \quad \forall f : X_2 \to \overline{\mathbb{R}}_{\geq 0}$ messbar

denn: wahr für $f = \mathbb{1}_{A_2}$ $\forall A_2 \subseteq X_2$ messbar nach (2); $\Rightarrow$ wahr für Element. Fkt'en $\Rightarrow$ wahr für messbare Fkt'en (mon. Kgz. & $0 \leq f_0 \leq 1$)

Sei nun $A_2 \subseteq X_2$, $A_2 \in \mathcal{A}$, setze $f := \mathbb{1}_{A_2} \frac{1}{1-f_0}$ in (2b):

$\Rightarrow$ (3): $\nu(A_2) = \int_{A_2} \frac{f_0}{1-f_0}\,d\mu$

Schließlich, sei $A \in \mathcal{A} \Rightarrow$

$$\nu(A) \underset{(1),\,(2a)\ \&\ \nu \ll \mu}{=} \nu(A \cap X_2) \underset{(3)}{=} \int_A \mathbb{1}_{X_2} \frac{f_0}{1-f_0}\, d\mu \underset{\substack{\bullet\ (2a) \\ \bullet\ f_0(x) = 0\ \forall x \in X_3}}{=} \int_A \underbrace{\frac{f_0}{1-f_0}}_{=: \frac{d\nu}{d\mu} \geq 0} d\mu$$

Insbes. ist $\frac{d\nu}{d\mu}$ μ-f.ü.-eindeutig bestimmt ∎

14. Produktmaße und der Satz von Fubini

Hier: nur endliche Produkte!

14.1. Produkt-σ-Algebren

14.1. Definition Seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$, $j = 1, \dots, n$ Messräume

$$X := \mathop{\times}_{j=1}^{n} X_j \quad \text{(kartes. Produkt) und } \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

$$p_j : \begin{array}{l} X \to X_j \\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j \end{array} \qquad \text{Projektion auf } j\text{'te Koordinate}$$

Produkt-σ-Algebra (auf X) : $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j := \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n := \sigma(p_1, \dots, p_n)$

- kleinste σ-Algebra auf X, bzgl. der alle p_j messbar (siehe Def. 12.4.)

14.2. Satz Für $j = 1, \dots, n$ sei $\mathcal{E}_j$ Erzeuger von $\mathcal{A}_j$ in X_j, zudem $\exists (E_j^k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}_j$ mit $E_j^k \uparrow X_j$ für $k \to \infty$.

Dann gilt

$$\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n = \sigma(\{\underbrace{A_1 \times \dots \times A_n}_{\text{„Produktmenge"}} : A_j \in \mathcal{E}_j \ \forall j = 1, \dots, n\})$$

Beweis: „$\supseteq$": $A_1 \times \dots \times A_n = p_1^{-1}(A_1) \cap \dots \cap p_n^{-1}(A_n) \in \sigma(p_1, \dots, p_n)$
$\forall A \in \mathcal{E}_j, j = 1, \dots, n$

„$\subseteq$": folgt aus: $\forall j = 1, \dots, n$ ist p_j $\tilde{\mathcal{A}}$-$\mathcal{A}_j$-messbar

mit $\tilde{\mathcal{A}} := \sigma(\{A_1 \times \dots \times A_n : A_l \in \mathcal{E}_l \ \forall l\})$.

Also: fixiere $j \in \{1, \dots, n\}$, o.E. $j = 1$: Sei $A_1 \in \mathcal{E}_1$

$$\Rightarrow p_1^{-1}(A_1) = \underbrace{A_1 \times X_2 \times \dots \times X_n}_{\in \tilde{\mathcal{A}}} \overset{\text{n.V.}}{=} \bigcup_{k_2 \in \mathbb{N}} \dots \bigcup_{k_n \in \mathbb{N}} \underbrace{A_1 \times E_2^{k_2} \times \dots \times E_n^{k_n}}_{\in \tilde{\mathcal{A}}}$$

Da $\mathcal{E}_1$ Erzeuger von $\mathcal{A}_1$ $\overset{\text{Satz 12.3.(a)}}{\Longrightarrow}$ p_1 messbar ∎

<u>14.3. Bemerkung</u>: Die Voraussetzung $E_j^k \uparrow X_j \; \forall j$ ist wesentlich (Übung!).

<u>14.4. Beispiel</u> $\mathcal{B}^d = \underbrace{\mathcal{B} \otimes \dots \otimes \mathcal{B}}_{d \text{ Faktoren}}$ Borel-σ-Algebra in $\mathbb{R}^d$ ($\mathcal{B}$: " — — — $\mathbb{R}$)

da $\mathcal{B}^d = \sigma(\{ \bigtimes_{j=1}^d [a_j, b_j[\; : \; a_j \le b_j \})$, $\mathcal{B} = \sigma(\{ [a,b[\; : \; a \le b \})$

<u>und</u> $[-n, n[\; \uparrow \mathbb{R}$ für $n \to \infty$.

$\boxed{\text{14.5. Lemma}}$ Für $n, m \in \mathbb{N}$ gilt die Assoziativität:

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j \right) \otimes \left(\bigotimes_{j=n+1}^{m} \mathcal{A}_j \right) = \bigotimes_{j=1}^{m} \mathcal{A}_j$$

<u>Beweis</u>: Identifiziere $(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$ und $X_1 \times \dots \times X_n$ vermöge der Bijektion

$$((x_1, \dots, x_{n-1}), x_n) \longmapsto (x_1, \dots, x_n)$$

Mit Satz 14.2. folgt

$\{ A_1 \times \dots \times A_{n-1} : A_j \in \mathcal{A}_j$ für $j = 1, \dots, n-1 \}$ ist Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}$

Damit ist

$$\mathcal{E} := \{ (A_1 \times \dots \times A_{n-1}) \times A_n : A_j \in \mathcal{A}_j, \, j = 1, \dots, n \}$$

Erzeuger von $(\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n$ in $(X_1 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$.

$\mathcal{E}$ ist zu identifizieren mit $\{A_1 \times \dots \times A_n : A_j \in \mathcal{A}_j,\ j=1,\dots,n\}$,
was ein Erzeuger von $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ in
$X_1 \times \dots \times X_n$ ist. Dies liefert

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathcal{A}_j\right) \otimes \mathcal{A}_n = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{A}_j \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

und somit das Lemma nach sukzess. Anw. ☒

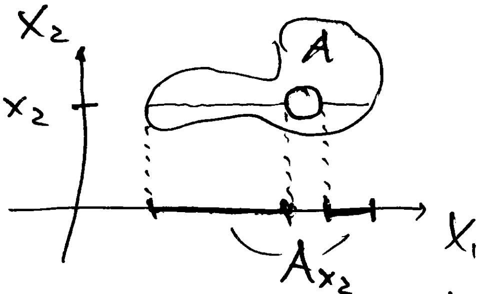
14.2. Produktmaße

Zunächst alles nur für $n=2$, also $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ Messräume

14.6. Definition Sei $A \subseteq X_1 \times X_2$, $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$.

$$A_{x_1} := \{ x_2 \in X_2 : (x_1, x_2) \in A \} \qquad x_1\text{-Schnitt von } A$$

$$A_{x_2} := \{ x_1 \in X_1 : (x_1, x_2) \in A \} \qquad x_2\text{-Schnitt von } A$$



x_2-Schnitt von A

14.7. Lemma Sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, sei $x_i \in X_i$, $i = 1,2$. Dann gilt

$$A_{x_1} \in \mathcal{A}_2 \text{ und } A_{x_2} \in \mathcal{A}_1$$

Beweis: nur für x_1-Schnitte; x_2 analog.

Sei $\tilde{\mathcal{A}} := \{ Q \subseteq \underbrace{X_1 \times X_2}_{=:X} : Q_{x_1} \in \mathcal{A}_2 \} \Rightarrow$

(i) $Q \in \tilde{\mathcal{A}} \Rightarrow (X \setminus Q)_{x_1} \overset{(!)}{=} X_2 \setminus \underbrace{Q_{x_1}}_{\in \mathcal{A}_2 \text{ n.V.}} \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow X \setminus Q \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(ii) $(X)_{x_1} = X_2 \in \mathcal{A}_2 \Rightarrow X \in \tilde{\mathcal{A}}$.

(iii) $A^{(k)} \in \tilde{\mathcal{A}} \ \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^{(k)} \right)_{x_1} \overset{(!)}{=} \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{A^{(k)}_{x_1}}_{\in \mathcal{A}_2} \in \mathcal{A}_2$

$\Rightarrow \bigcup_{k \in \mathbb{N}} A^{(k)} \in \tilde{\mathcal{A}}$

(i)-(iii): $\tilde{\mathcal{A}}$ ist σ-Algebra auf X.

Außerdem: $(A_1 \times A_2)_{x_1} \overset{(!)}{=} \begin{cases} A_2, & x_1 \in A_1 \\ \emptyset, & x_1 \notin A_1 \end{cases}$ (□)

$\Rightarrow$ insbesondere, wenn $A_j \in \mathcal{A}_j$, $j = 1,2 \Rightarrow A_1 \times A_2 \in \tilde{\mathcal{A}}$

Somit gilt $\tilde{\mathcal{A}} \supseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ ■

14.8. Lemma Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, 2$, σ-endliche Maßräume, und sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Dann gilt:

$$S_A^{(1)}: \begin{array}{l} X_1 \to [0,\infty] \\ x_1 \mapsto \mu_2(A_{x_1}) \end{array} \quad \mathcal{A}_1\text{-messbar}, \qquad S_A^{(2)}: \begin{array}{l} X_2 \to [0,\infty] \\ x_2 \mapsto \mu_1(A_{x_2}) \end{array} \quad \mathcal{A}_2\text{-messbar}.$$

Beweis: Nur für $S_A := S_A^{(1)}$; für $S_A^{(2)}$ analog. 14.7.: S_A wohldef.

1. Akt: μ_2 endliches Maß.

Beh: $\mathcal{D} := \{ D \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 : S_D \ \mathcal{A}_1\text{-messbar} \}$ ist Dynkin-System in $X_1 \times X_2 =: X$.

denn:

- $S_X : x_1 \mapsto \mu_2(X_2)$ ist $\mathcal{A}_1$-messbar (da konstant).
  $\Rightarrow X \in \mathcal{D}$
- $$S_{X \setminus D} : x_1 \mapsto \mu_2\big(\underbrace{(X \setminus D)_{x_1}}_{X_2 \setminus D_{x_1}}\big) \overset{\mu_2 \text{ endlich}}{=} \mu_2(X_2) - \underbrace{\mu_2(D_{x_1})}_{S_D(x_1)}$$
  also: S_D messbar $\Rightarrow$ $S_{X \setminus D}$ messbar, $\Rightarrow$ $\mathcal{D}$ ist ^{c}-stabil.
- sei $(D_n)_n \subseteq \mathcal{D}$ paarw. disjunkt
  $$\Rightarrow S_{\dot\bigcup_n D_n} : x_1 \mapsto \mu_2\Big(\underbrace{\big(\dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n\big)_{x_1}}_{\overset{(!)}{=} \dot\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (D_n)_{x_1}}\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} S_{D_n}(x_1) \quad \text{ist messbar}$$
  also ist $\mathcal{D}$ $\dot\cup_\infty$-stabil.

Außerdem: Für $A_1 \in \mathcal{A}_1$, $A_2 \in \mathcal{A}_2$ gilt:

$$S_{A_1 \times A_2} : x_1 \mapsto \mu_2\big((A_1 \times A_2)_{x_1}\big) = \underbrace{\mu_2(A_2)\, \mathbb{1}_{A_1}(x_1)}_{\text{messbar}} \quad \text{(siehe (II) Bew. 14.7.)}$$

also: $\mathcal{D} \supseteq \{ A_1 \times A_2 : A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2 \} =: \mathcal{E}$

da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil und $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ $\underset{\text{Satz 11.17.}}{\Longrightarrow}$ $\mathcal{D} = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

2. Akt: μ_2 ist σ-endlich.

$\Rightarrow \exists (B_n)_n \subseteq \mathcal{A}_2$ mit $B_n \nearrow X_2$ und $\mu_2(B_n) < \infty \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \ s_A : x_1 \to \mu_2(A_x) \underset{\substack{\text{Stetigkeit} \\ \text{von unten}}}{\nearrow} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\mu_2(B_n \cap A_{x_1})}_{=: \mu_{2,n}(A_{x_1})}$$

1. Akt $\Rightarrow$ $x_1 \mapsto \mu_{2,n}(A_{x_1})$ messbar, da $\mu_{2,n} := \mu_2(B_n \cap \cdot)$ endliches Maß

$\Rightarrow s_A$ messbar ■

$\boxed{\text{14.9. Satz}}$ Für $j=1,2$ seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$ σ-endl. Maßräume.

Dann $\exists!$ Maß π auf $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$:

$$(*) \quad \pi(A_1 \times A_2) = \mu_1(A_1)\mu_2(A_2) \quad \forall A_1 \in \mathcal{A}_1, \ \forall A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

$\pi =: \mu_1 \otimes \mu_2$ heißt Produktmaß und ist σ-endlich

$\forall A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ gilt:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(A) = \int_{X_1} \mu_2(A_{x_1})\, d\mu_1(x_1) = \int_{X_2} \mu_1(A_{x_2})\, d\mu_2(x_2).$$

Für die Eindeutigkeit von π genügt es $(*)$ nur $\forall A_1 \in \mathcal{E}_1$ und $\forall A_2 \in \mathcal{E}_2$ zu fordern, wobei $\mathcal{E}_j$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_j$ und $\exists (B_k^j)_k \subseteq \mathcal{E}_j$ mit $B_k^j \nearrow X_j$ und $\mu_j(B_k^j) < \infty \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall j = 1,2$.

Beweis: Sei $A \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Gemäß Lemma 14.7, 14.8. ist $\pi_1(A) := \int_{X_1} s_A^{(1)} d\mu_1 \in [0,\infty]$ wohldef. und

$\pi(\emptyset) = 0$, sowie für $(A^n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$

paarw. disj.,

$$\Pi_1\Big(\dot{\bigcup_{n\in\mathbb{N}}} A^n\Big) = \int_{X_1} \underbrace{s^{(1)}_{\bigcup_n A^n}}_{\sum_n s^{(1)}_{A^n}}\, d\mu_1 \underset{\uparrow \text{ mon. Kgz.}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \Pi_1(A^n)$$

$\Rightarrow$ Π_1 ist Maß auf $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$; sei nun $A_1\in\mathcal{A}_1$, $A_2\in\mathcal{A}_2$

– wegen $s^{(1)}_{A_1\times A_2} = \mu_2(A_2)\,\mathbb{1}_{A_1}$ $\Rightarrow$ $\Pi_1(A_1\times A_2) = \mu_2(A_2)\,\mu_1(A_1)$

Analog: $\Pi_2(A) := \int_{X_2} s^{(2)}_A\, d\mu_2$ def. Maß auf $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$
mit $\Pi_2(A_1\times A_2) = \mu_1(A_1)\,\mu(A_2)$

Seien $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ Erzeuger von $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ wie gefordert

Satz 14.2
$\Rightarrow$ $\mathcal{E} := \{A_1\times A_2 : A_1\in\mathcal{E}_1, A_2\in\mathcal{E}_2\}$ ist $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$, außerdem

$$(**)\quad \begin{cases} B^1_k\times B^2_l \nearrow X_1\times X_2 & \text{für } k,l\to\infty \\ \text{und } \underset{(i=1,2)}{\Pi_i}(B^1_k\times B^2_l) = \mu_1(B^1_k)\,\mu_2(B^2_l) < \infty & \forall k,l\in\mathbb{N} \end{cases}$$

Satz 11.28.
$\Rightarrow$ jedes Maß auf $\mathcal{A}_1\otimes\mathcal{A}_2$ ist bereits eindeutig durch Wert auf $\mathcal{E}$ festgelegt.

$\Rightarrow$ $\Pi_1 = \Pi_2$ sowie Eindeutigkeit; zudem aus $(**)$:
$\Pi := \Pi_1 = \Pi_2$ σ-endl.

$\blacksquare$

14.10. Korollar Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j = 1, \dots, n$, σ-endl. Maßräume. Dann $\exists !$ Maß $\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j := \mu_1 \otimes \dots \otimes \mu_n$ auf $\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ mit

$$(1) \qquad \Big(\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j\Big)\Big(\mathop{\times}_{j=1}^{n} A_j\Big) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(A_j) \qquad \forall A_j \in \mathcal{A}_j,\ j = 1, \dots, n.$$

Zudem ist $\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j$ σ-endlich.

Falls $\mathcal{E}_j$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{A}_j$ und $\exists (B_k^j)_k \subseteq \mathcal{E}_j$ mit $B_k^j \nearrow X_j$ für $k \to \infty$ und $\mu_j(B_k^j) < \infty$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j = 1, \dots, n$, so genügt es (1) für $A_j \in \mathcal{E}_j$, $j = 1, \dots, n$ zu fordern (für die Eindeut.)

Beweis: σ-Endlichkeit und Eindeutigkeit von $\pi := \bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j$ wie im Beweis von Satz 14.9.

Existenz von π per Induktion: $n = 2$ aus Satz 14.9.

Ind. ann.: $\exists \pi' = \bigotimes_{j=1}^{n-1} \mu_j$ für ein $n > 2$

$\Rightarrow \pi'$ σ-endlich $\overset{\text{Satz 14.9}}{\Rightarrow}$ $\pi := \pi' \otimes \mu_n$ wohldef.

auf $(\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n$ mit $\pi(A' \times A_n) = \pi'(A')\, \mu_n(A_n)$

$\forall A' \in \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}$, $\forall A_n \in \mathcal{A}_n$.

Da $(\mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_{n-1}) \otimes \mathcal{A}_n = \mathcal{A}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{A}_n$ (Lem. 14.5.)

und $\pi'(A_1 \times \dots \times A_{n-1}) = \prod_{j=1}^{n-1} \mu_j(A_j) \Rightarrow$ Ind. ann. für $n+1$ $\blacksquare$

14.11. Bemerkung

Zusammen mit Lemma 14.5. folgt $\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$:

$$\Big(\bigotimes_{j=1}^{m} \mu_j\Big) \otimes \Big(\bigotimes_{j=m+1}^{n} \mu_j\Big) = \bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j .$$

Als Anwendung:

Noch ausstehender Beweis von Satz 11.38 für $d \geq 2$:

14.12. Korollar (Neufassung von Satz 11.38.).

$\exists !$ Maß λ^d auf $\mathcal{B}^d$, das Produktmaß $\lambda^d = \bigotimes_{j=1}^{d} \lambda = \lambda \otimes \dots \otimes \lambda$, mit

$$\lambda^d \Big(\underbrace{\mathop{\times}_{j=1}^{d} [a_j, b_j[}_{\in \mathcal{I}^d} \Big) = \prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j)$$

$\forall -\infty < a_j \leq b_j < \infty$, $j = 1, \dots, d$.

Beweis (geg. der schon bewiesene Fall für $d=1$ in 11.38).

- λ σ-endlich auf $\mathcal{B}$
- $\mathcal{I}$ $\cap$-stabil; für $I_n := [-n, n[\in \mathcal{I}$ gilt

  $I_n \nearrow \mathbb{R}$ $(n \to \infty)$, $\lambda(I_n) = 2n < \infty$

  und $\sigma(\mathcal{I}) = \mathcal{B}$ (also, $\mathcal{I}$ ist Erzeuger wie in 14.10 gefordert)
- $\prod_{j=1}^{d} (b_j - a_j) = \prod_{j=1}^{d} \lambda([a_j, b_j[)$

$\Rightarrow$ Beh. aus Kor. 14.10. ☒

14.3. Integration bzgl. Produktmaßen

14.13. Definition Sei $f: X_1 \times X_2 \to X'$ und $x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$,

$$f_{x_1}: \begin{array}{l} X_2 \to X' \\ x_2 \mapsto f(x_1,x_2) \end{array}, \qquad f_{x_2}: \begin{array}{l} X_1 \to X' \\ x_1 \mapsto f(x_1,x_2) \end{array}$$

Schnitt-abbildungen

14.14 Beispiel: Sei $A \subseteq X_1 \times X_2 \Rightarrow (\mathbb{1}_A)_{x_j} = \mathbb{1}_{A_{x_j}}$, $j = 1,2$.

14.15. Lemma Seien $(X_j, \mathcal{A}_j)$, $j=1,2$, und $(X', \mathcal{A}')$ Messräume, sei $(X, \mathcal{A}) := (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ und $f: X \to X'$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar.
Dann gilt $\forall x_1 \in X_1$ und $\forall x_2 \in X_2$:

f_{x_1} ist $\mathcal{A}_2$-$\mathcal{A}'$-messbar und f_{x_2} ist $\mathcal{A}_1$-$\mathcal{A}'$-messbar.

Beweis. Sei $A' \in \mathcal{A}'$

$$\Rightarrow f_{x_1}^{-1}(A') = \{x_2 \in X_2 : (x_1,x_2) \in f^{-1}(A')\} = (\underbrace{f^{-1}(A')}_{\in \mathcal{A}})_{x_1} \underset{\text{Lem. 14.7}}{\in} \mathcal{A}_2$$

x_1-Schnitt ∎

14.16. Satz (Fubini-Tonelli)

Seien $(X_j, \mathcal{A}_j, \mu_j)$, $j=1,2$, σ-endliche Maßräume und $(X, \mathcal{A}, \mu) := (X_1 \times X_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2)$. Sei $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) $\mathcal{A}$-messbar. Dann ist, für $g \in \{\mathrm{Re} f_+, \mathrm{Re} f_-, \mathrm{Im} f_+, \mathrm{Im} f_-\}$

$$\begin{array}{l} X_1 \to [0,\infty] \\ x_1 \mapsto \int_{X_2} g(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2) \end{array}, \qquad \begin{array}{l} X_2 \to [0,\infty] \\ x_2 \mapsto \int_{X_1} g(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1) \end{array}$$

$\mathcal{A}_1$-messbar $\qquad\qquad$ $\mathcal{A}_2$-messbar

Außerdem:

(i) (Tonelli) Ist $f \geq 0$ f.ü. (d.h. $f(X \setminus N) \subseteq [0,\infty]$, $\mu(N)=0$)

so gilt:
$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} f(x_1,x_2)\,d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1)$$
$$= \int_{X_2} \left(\int_{X_1} f(x_1,x_2)\,d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2) \qquad (*)$$

(Möglicherweise sind alle Integrale $+\infty$!)

(ii) (Fubini) Ist eines der 3 Integrale $\int_X |f(x)|\,d\mu(x)$,
$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} |f(x_1,x_2)|\,d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1), \quad \int_{X_2} \left(\int_{X_1} |f(x_1,x_2)|\,d\mu_1(x_1) \right) d\mu_2(x_2)$$
endlich, so sind alle 3 endlich, und es gilt $(*)$

Beweis: 1. Schritt: Elementarfunktionen: $f = \sum_{j=1}^{J} \underbrace{\alpha_j}_{\geq 0} \mathbb{1}_{\underbrace{A_j}_{\in \mathcal{A}}}$

Bsp. 14.13 $\Rightarrow$ $f_{x_1} = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \mathbb{1}_{(A_j)_{x_1}} \Rightarrow x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}\,d\mu_2 = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \mu_2((A_j)_{x_1}) \geq 0$

$\mathcal{A}_1$ - messbar (Lemma 14.8.)

- also ist wohldef.:
$$\int_{X_1} \left(\int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\,d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) = \sum_{j=1}^{J} \alpha_j \underbrace{\int_{X_1} \mu_2((A_j)_{x_1})\,d\mu_1(x_1)}_{\mu(A_j)} \quad \text{Satz. 14.9}$$
$$= \int_X f(x)\,d\mu(x)$$

Analog mit $1 \leftrightarrow 2$

$\Rightarrow (*)$ ✓ (Für Elementar Fkt'en)

2. Schritt: $f : X \to [0,\infty]$ messbar

$\Rightarrow \exists (\varphi_n)_n$ Folge von Elementarfkt.'en mit $\varphi_n \nearrow f$

$\Rightarrow (\varphi_n)_{x_j} \nearrow f_{x_j}$ $(j=1,2) \Rightarrow x_1 \mapsto \int_{X_2} f_{x_1}\, d\mu_2 \overset{\text{Mon. Kgz.}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1}\, d\mu_2}_{\mathcal{A}_1\text{-messbar (1. Schr.)}}$

ist messbar (also erste Teil der Behaupt. für g)) &

$$\int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1) \overset{\text{Mon. Kgz.}}{=} \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_{X_1}\left(\int_{X_2} (\varphi_n)_{x_1}(x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1)}_{\overset{\text{1. Schritt}}{=} \int_X \varphi_n(x)\, d\mu(x)}$$

$$\overset{\text{Mon. Kgz.}}{=} \int_X f(x)\, d\mu(x)$$

(analog für $1 \leftrightarrow 2$) $\Rightarrow$ (*) ✓ (für $f : X \to [0,\infty]$ messbar)

3. Schritt: Sei $f \geq 0$ μ-f.ü. Dann für $f_- \geq 0$ gilt

$$0 \underset{f_-=0\ \mu\text{-f.ü.}}{=} \int_X f_-(x)\, d\mu(x) \overset{\text{2. Schr.}}{=} \int_{X_1}\left(\int_{X_2} f_-(x_1,x_2)\, d\mu_2(x_2)\right) d\mu_1(x_1)$$

$$= \int_{X_2}\left(\int_{X_1} f_-(x_1,x_2)\, d\mu_1(x_1)\right) d\mu_2(x_2)$$

und für $f_+ \geq 0$ gilt (i) (2. Schritt). Substrahieren $\Rightarrow$ (*) ✓ (für $f \geq 0$ μ-f.ü.).

4. Schritt: $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$ messbar)

aus 3. Schritt + Zerlegung in $(\mathrm{Re} f)_\pm$, $(\mathrm{Im} f)_\pm$ ∎

14.17. Bemerkung

(a) Gebräuchliche Schreibweise:

$$\int_X f(x)\, d\mu(x) = \int_{X_1 \times X_2} f(x_1, x_2)\, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(x_1, x_2)$$

(b) Beträge in (ii) sind wesentliche (siehe Übung!)

(c) Analog für n-faches Produkt (z.B. $n = 3$).

14.4. Anwendung: Transformationsformel für das Lebesgue-Maß.

14.18. Definition & Lemma

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ ein Messraum, und $\varphi : X \to X'$ messbar.

Bildmaß (von μ unter φ): $\varphi(\mu) := \mu \circ \varphi^{-1} : \begin{array}{l} \mathcal{A}' \to [0, \infty] \\ A' \mapsto \mu(\varphi^{-1}(A')) \end{array}$

ist Maß auf $\mathcal{A}'$.

Beweis: Sei $(A_n')_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}'$ Folge paarw. disjunkter Mengen

$$\Rightarrow \varphi^{-1}\Big(\dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} A_n'\Big) = \dot{\bigcup_{n \in \mathbb{N}}} \underbrace{\varphi^{-1}(A_n')}_{\in \mathcal{A}} ; \quad \text{Rest klar} \quad \blacksquare$$

14.19. Beispiele: $X = X' = \mathbb{R}^d$; $\mathcal{A} = \mathcal{A}' = \mathcal{B}^d$; $\mu = \lambda^d$

(a) $T_y : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ x \mapsto x + y \end{array}$ für $y \in \mathbb{R}^d$ (fix) Translation

$$\overset{\text{Satz 11.41.}}{\Rightarrow} \quad T_y(\lambda^d) = \lambda^d$$

(b) $\Lambda_\alpha : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ x \mapsto \alpha x \end{array}$, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Skalierung

$$\Rightarrow \Lambda_\alpha(\lambda^d) = \frac{1}{|\alpha|^d} \lambda^d \quad \text{(siehe Übung!)}$$

(c) $\Pi_{jk} : \begin{array}{l} \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ (\ldots x_j \ldots x_k \ldots) \mapsto (\ldots x_k \ldots x_j \ldots) \end{array}$ Permutation

$$\Rightarrow \Pi_{jk}(\lambda^d) = \lambda^d$$

(da $\lambda^d = \lambda \otimes \ldots \otimes \lambda^d$ Produkt gleicher Faktoren)

14.20. Satz (<u>vom Bildmaß</u>)

Sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ Maßraum, $(X', \mathcal{A}')$ Messraum, $\varphi : X \to X'$ messbar und $f : X' \to \overline{\mathbb{R}}$ (oder $\mathbb{C}$) messbar. Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(X', \mathcal{A}', \varphi(\mu)) \iff f \circ \varphi \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{A}, \mu)$$

In diesem Fall ist, $\forall A' \in \mathcal{A}'$,

$$\int_{A'} f(x')\, d(\varphi(\mu))(x') = \int_{\varphi^{-1}(A')} (f \circ \varphi)(x)\, d\mu(x)$$

<u>Beweis</u>: O.E. $A' = X'$ (sonst ersetze f durch $\mathbb{1}_{A'} f$)

Beh. wahr für $f = \mathbb{1}_{B'}$, $B' \in \mathcal{A}'$, denn

$$\int_{X'} \mathbb{1}_{B'}\, d\varphi(\mu) = (\varphi(\mu))(B') \underset{\text{Def } \varphi(\mu)}{=} \mu(\varphi^{-1}(B')) = \int_X \mathbb{1}_{B'} \circ \varphi\, d\mu$$

$\Rightarrow$ Beh. wahr für Elementarfkt.

$\underset{\text{mon. Kgz.}}{\Rightarrow}$ " " " $f \geq 0$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}'$-messbar

$\Rightarrow$ " " " f $\varphi(\mu)$-integrierbar ☒

14.21. Satz (<u>Transformationsformel für λ^d</u>)

Sei $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^d$ stetig diff.bar und $\varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{U}) \to \mathcal{U}$ stetig diff.bar (<u>Diffeomorphismus</u>)

Dann gilt, $\forall A \subseteq \mathcal{U}$, $A \in \mathcal{B}^d$:

$$\lambda^d(\varphi(A)) = \int_A |\det(D\varphi)(x)|\, d\lambda^d(x) \qquad (*)$$

$(d\lambda^d(x) \equiv dx)$

(Hier: $D\varphi(x)$ Differential von φ (Jacobi-Matrix).)

Mit Satz vom Bildmaß mit $\mu = \lambda^d \circ \varphi$ folgt

14.22. Korollar Unter den Vorauss. von Satz 14.21 gilt $\forall f \in \mathcal{L}^1(\varphi(\mathcal{U}), \lambda^d)$:

$$(\nabla) \qquad \int_{\varphi(\mathcal{U})} f(y)\,dy = \int_{\mathcal{U}} (f \circ \varphi)(x)\,|\det(D\varphi)(x)|\,dx$$

(Merkregel: "Aus $y = \varphi(x)$ folgt $dy = |\det(D\varphi)(x)|\,dx$" - "Substitution")

Beweis Kor. 14.22: Für Borel'sche $B' = \varphi(B)$, $B \in \mathcal{B}^d$, sagt Satz 14.21:

$$\int_{\varphi(\mathcal{U})} \mathbb{1}_{B'}(y)\,dy = \int_{\mathcal{U}} (\mathbb{1}_{B'} \circ \varphi)(x)\,|\det(D\varphi)(x)|\,dx$$

Damit gilt Kor. 14.22 (∇) für $f \in E$ (Linearität) und damit für $f \in E^*$ (mon. Kgz.). Zerlegung in $\operatorname{Re} f_\pm$, $\operatorname{Im} f_\pm$ gibt die Beh. $\blacksquare$

14.23. Beispiel: Sei $\beta : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ eine Bewegung d.h. $\exists\, y \in \mathbb{R}^d$, $M \in O(d)$ (orthogonale Matrix), so daß

$\beta(x) = Mx + y$, $x \in \mathbb{R}^d$. Es gilt die

Invarianz des Lebesgue-Maßes unter Bewegungen:

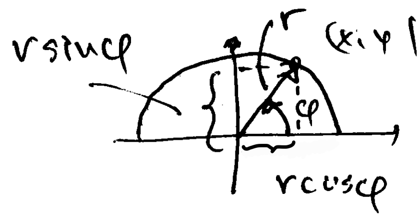
$$\beta(\lambda^d) = \lambda^d,$$

da $|\det D\beta| = |\det(M)| = 1$ $\blacksquare$

14.24. Beispiel (Polarkoordinaten ($d=2$))

Sei $p : [0,\infty[\times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ die Funktion der ebenen Polarkoordinaten:

$$p(r,\varphi) := \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \quad 0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$$



Dann gilt, für $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ integrierbar:

$$\int_{\mathbb{R}^2} f\,d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,d(x,y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}_{\ge 0}} \int_{[0,2\pi]} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, d\varphi\, dr$$
$$= \int_{[0,\infty[\times[0,2\pi]} (f\circ p)(r,\varphi)\, d\lambda^2(r,\varphi)$$

Beweis: Sei $R := \{(x,0) : x \ge 0\}$; R λ^2-Nullmenge, da Teilmenge Hyperebene (!); $\{0\}\cup\{2\pi\}$ ist λ-Nullmenge $\Rightarrow$ Beh. äquiv zu

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus R} f\,d\lambda^2 = \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{]0,2\pi[} (f\circ p)(r,\varphi)\, r\, d\varphi\, dr$$

Einschränkung $p :]0,\infty[\times]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2\setminus R$ ist Diffeomorph. mit $p^{-1}(x,y) = \left(\sqrt{x^2+y^2}, \arg(x,y)\right)$, wobei

$$\arg(x,y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & y>0 \\ \frac{3\pi}{2} - \arctan\frac{x}{y}, & y<0 \\ \pi + \arctan\frac{y}{x}, & x<0 \end{cases}$$

ist stetig diff.bar auf $\mathbb{R}^2\setminus R$

Es gilt $\det(Dp)(r,\varphi) = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r$

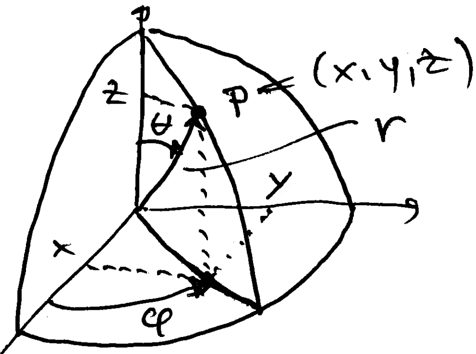
und nach Kor. 14.22 & Fubini (!):

$$\int_{\mathbb{R}^2\setminus\mathbb{R}} f \, d\lambda^2 = \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[} (f\circ p)(r,\varphi)\,|\det(Dp)(r,\varphi)|\,d(r,\varphi) \overset{\text{Fub.}}{=} \int_{\mathbb{R}_{>0}} \int_{]0,2\pi[} (f\circ p)(r,\varphi)\, r \, d\varphi \, dr \qquad \blacksquare$$

14.25. Beispiel (Kugelkoordinaten ($d=3$))

Sei $\Phi : \mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,\pi]\times[0,2\pi] \to \mathbb{R}^3$ die Funktion der *Kugelkoordinaten* (*räumlichen Polarkoordinaten*):

$$\Phi(r,\theta,\varphi) := \begin{pmatrix} r\sin\theta\cos\varphi \\ r\sin\theta\sin\varphi \\ r\cos\theta \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} 0 &\leq r < \infty, \\ 0 &\leq \theta \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$



Dann gilt, für $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ integrierbar:

$$\int_{\mathbb{R}^3} f \, d\lambda^3 = \int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\, d(x,y,z)$$

$$= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}} \int_{[0,2\pi]} \int_{[0,\pi]} f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta) \times r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr$$

$$= \int_{\mathbb{R}_{\geq 0}\times[0,\pi]\times[0,2\pi]} (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)\, r^2\sin\theta \, d\lambda^3(r,\theta,\varphi)$$

Beweis: Seien $U := \mathbb{R}_{>0}\times]0,\pi[\times]0,2\pi[$ und $V := \mathbb{R}^3\setminus(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\{0\}\times\mathbb{R})$. Dann sind $U, V \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $\Phi : U \to V$ Diffeomorphismus, mit

$$\Phi^{-1}(x,y,z) = \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}, \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}, \arg(x,y)\right)$$

(mit $\arg \in C^1(\mathbb{R}^2\setminus(\mathbb{R}_{\geq 0}\times\{0\}))$, siehe 14.24.)

Es gilt $(D\Phi)(r,\theta,\varphi) = \big(\; \cdots \; \big)$ und $\det(D\Phi)(r,\theta,\varphi)$ $= r^2 \sin\theta$

Nach Trans.satz/formel (14-22) gilt

$$\int_V f(x,y,z)\,d(x,y,z) = \int_{\mathcal{U}} (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)\, r^2 \sin\theta \, d(r,\theta,\varphi) \underset{\text{Fubini}}{\Longrightarrow} \text{Beh.} \; \square$$

Üb. 11.1 Ana2

14.26. Bemerkung: Geht auch allgemein in $\mathbb{R}^d$, $d>3$ – für d-dim. Polarkoordinaten, siehe z.B. Walter II, § 7.19, Amann-Escher X.8 (Band III), oder Elstrodt V.4.

Beweis von Satz 14.21 (Trans.satz/-formel):

In 6(!) Akten; Induktion nach d (Akte 5 & 6). Erst 4 Akte Vorb.:

1. Akt: $(*)$ in 14.21 $\Longleftrightarrow$

$$(**)\begin{cases} \forall y\in\mathcal{U}\ \exists\, U_y \subseteq \mathcal{U}, \text{ offen, mit } y\in U_y \ \& \ (*) \text{ in 14.21 gilt für} \\ \qquad \varphi|_{U_y} \text{ und } \forall \tilde{A}\in\mathcal{B}^d,\ \tilde{A}\subseteq U_y \end{cases}$$

Bew.: "$\Rightarrow$" klar; globale $\Rightarrow$ lokale Aussage.

"$\Leftarrow$": Aus Lem. 11.16: $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, K_n kpt. Quader

Heine-Borel $\Rightarrow$ jedes K_n wird von endlich viele U_y, $y\in K_n$, überdeckt $\Rightarrow \exists$ abz. Teilüberdeckung $\{U_{y_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{U}$.

Mache diese disjunkt: $\bigcup_{j\in\mathbb{N}} U_{y_j} = \dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} \underset{\in\mathcal{B}^d}{B_j} = \mathcal{U}$ (Lem. 11.12) $(B_j \subseteq U_{y_j})$

Sei nun $\mathcal{B}^d \ni A \subseteq \mathcal{U}$; Folge $(\varphi(A\cap B_j))_{j\in\mathbb{N}}$ paarw. disj.

da $(B_j)_{j\in\mathbb{N}}$ paarw. disj. & φ Diffeomorphism. (insbes. Injekt.)

$$\Rightarrow \lambda^d(\varphi(A)) = \lambda^d\Big(\dot{\bigcup_{j\in\mathbb{N}}} \varphi(A\cap B_j)\Big) \overset{\sigma\text{-add.}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \lambda^d(\varphi(A\cap B_j))$$

$$\overset{\substack{(**) \text{ mit } \tilde{A} := A\cap B_j \\ \subseteq U_{y_j}\ \forall j}}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |\det[(D\varphi)(x)]|\, \mathbb{1}_{A\cap B_j}(x)\,dx$$

$$\overset{\text{mon. Kgz.}}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |\det[(D\varphi)(x)]| \underbrace{\sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_{A\cap B_j}(x)}_{\mathbb{1}_{\dot{\bigcup}_{j=1}^{\infty}(A\cap B_j)}(x)}\,dx = \int_A |\det[(D\varphi)(x)]|\,dx$$

d.h., (*) in 14.21 gilt ✓

<u>2. Akt</u>: Seien $\psi : U \to \psi(U)$, $\chi : \psi(U) \to \chi(\psi(U))$ Diffeomorphismen, für die (*) in 14.21 gelte.
Dann gilt (*) in 14.21 auch für $\chi\circ\psi$.

<u>Bew</u>: Sei $A \subseteq U$, $A \in \mathcal{B}^d$; dann, aus (*) in 14.21 für χ:

$$\lambda^d\big(\underbrace{(\chi\circ\psi)(A)}_{\chi(\psi(A))}\big) = \int_{\psi(A)} |\det[(D\chi)(x)]|\,dx$$

Aus Kor. 14.22 (mit $\varphi := \psi$, $U := A$; $f := |\det(D\chi)|$) folgt

$$= \int_A \underbrace{|\det[(D\chi)(\psi(x))]| \cdot |\det[(D\psi)(x)]|}_{= |\det[(D(\chi\circ\psi))(x)]|}\,dx$$

aus $(\det M_1)(\det M_2) = \det(M_1 M_2)$ und Kettenregel

$$(D\chi)(\psi(x)) \cdot (D\psi)(x) = (D(\chi\circ\psi))(x). \quad ✓$$

3. Akt: (*) in 14.21 gilt für die Permutationsabb. Π_{jk} in Bsp. 14.19(c)

Bew: • $\lambda^d \circ \Pi_{jk} = \lambda^d$ nach 14.19(c)

• $|\det[(D\Pi_{jk})(x)]| = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$, da $D\Pi_{jk}$ Permutationsmatrix (siehe LA). ✓

4. Akt: O.E.: $\forall y \in \mathcal{U}$ kann lokale Diffeo. $\varphi|_{U_y}$ in (**) auf Form $\quad U_y \ni (x_1, .., x_d) \mapsto (x_1, \alpha_{x_1}(x_2, .., x_d))$

gewählt werden, wo: Für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ wo $(U_y)_{x_1} \neq \emptyset$ (x_1-Schnitt) ist α_{x_1} Diffeo. definiert auf $(U_y)_{x_1}$; erinnerung:

$$(U_y)_{x_1} := \{ (x_2, .., x_d) \in \mathbb{R}^{d-1} : (x_1, x_2, .., x_d) \in U_y \}$$

Bew: Sei $y \in \mathcal{U}$ fest. O.E. sei $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(y) \neq 0$ - denn,

falls nicht, $\exists j, k \in \{1, .., d\}$ mit $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}(y) \neq 0$ (aus Inv.barkeit $(D\varphi)(y)$: $Id = \varphi^{-1} \circ \varphi \Rightarrow \mathbb{1}_{d\times d} = ((D\varphi^{-1}) \circ \varphi) \cdot D\varphi$)

$\Rightarrow \tilde{\varphi} := \Pi_{1j} \circ \varphi \circ \Pi_{1k}$ erfüllt $\frac{\partial \tilde{\varphi}_1}{\partial x_1}(y) \neq 0$ und

$\varphi = \Pi_{1j} \circ \tilde{\varphi} \circ \Pi_{1k}$. Ist also (*) in 14.21 gezeigt für $\tilde{\varphi}$

$\overset{2,3.\text{Akt}}{\Longrightarrow}$ (*) gilt für bel. Diffeo. φ ✓

Sei also $\varphi : U_y \to \varphi(U_y)$ Diffeo. mit $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(y) \neq 0$.

Ziel: Zerlege φ in Diffeo's von gesuchter Form.

(ii) Sei $\psi : U_y \ni x \mapsto \psi(x) := (\varphi_1(x), x_2, \dots, x_d)$

Weil

$$D\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

($\mathbb{1}_{k\times k}$ ist $k \times k$ - Einheitsmatrix)

ist $(D\psi)(y)$ inv.-bar; Satz über Umkehrfkt. (Kor 9.6 Anm 2)

$\Rightarrow \exists\, \hat{U}_y \subseteq U_y$ offene Umgeb y, worauf ψ Diffeomorp.

$\Rightarrow \tilde{\psi} := \pi_{12} \circ \psi \circ \pi_{12}$ auch Diffeo (dort) und

$$\tilde{\psi}(x) = (x_1, \underbrace{\varphi_1(x_2, x_1, x_3, \dots, x_d), x_3, \dots, x_d}_{=: \alpha_{x_1}(x_2, x_3, \dots, x_d)}) \quad \forall x \in \pi_{12}(\hat{U}_y)$$

$\Rightarrow$ gesuchter Form – denn $\alpha_{x_1}(\hat{x})$ ist stet. diff.-bar in $\hat{x} := (x_2, x_3, \dots, x_d) \in (\pi_{12}(\hat{U}_y))_{x_1}$ $\forall x_1 \in \mathbb{R}$, und

$$(D\alpha_{x_1})(\hat{x}) = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} \circ \pi_{12}\right)(x_1, \hat{x}) & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & \mathbb{1}_{(d-2)\times(d-2)} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

(Kettenregel!)

$\Rightarrow (D\alpha_{x_1})(\hat{x})$ invertierbar für $(x_1, \hat{x}) = \pi_{12}(y)$

$\Rightarrow$ (Kor 9.6) $\exists$ (evt. kleinere) Umgebung $(\pi_{12}\tilde{U}_y)_{x_1} \subseteq (\pi_{12}\hat{U}_y)_{x_1}$ in $\mathbb{R}^{d-1}$, so α_{x_1} ist Diffeom., für alle $x_1 \in \mathbb{R}$ für die $(\pi_{12}\tilde{U}_y)_{x_1} \neq \emptyset$ gilt.

(ii) Damit ist $\chi := \varphi \circ \psi^{-1}$ ein Diffeomorphismus auf off. Umgebung $\psi(\tilde{U}_y)$ von $\psi(y)$.

Sei $z = (z_1, \hat{z}) \in \psi(\tilde{U}_y)$, dann gilt $\psi^{-1}(z) = (\eta_{\hat{z}}(z_1), \hat{z})$

mit $\eta_{\hat{z}}$ die Umkehrfkt von $\varphi_1(\cdot, \hat{z})$

(existiert, da $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in \tilde{U}_y$).

$$\Rightarrow \quad \chi(z) = (z_1, \underbrace{\varphi_2(\eta_{\hat{z}}(z_1), \hat{z}), \dots, \varphi_d(\eta_{\hat{z}}(z_1), \hat{z})}_{=: \alpha_{z_1}(\hat{z})}) \quad \forall z \in \psi(\tilde{U}_y)$$

Da χ Diffeo $\Rightarrow$

$$(D\chi)(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ * & \\ \vdots & (D\alpha_{z_1})(\hat{z}) \\ * & \end{pmatrix}$$

inv.bar $\forall z \in \psi(\tilde{U}_y)$,

also $(D\alpha_{z_1})(\hat{z})$ inv. bar (Abl. bzg. $\hat{z}$)

$\Rightarrow$ Für alle $z_1 \in \mathbb{R}$ wo $(\psi(\tilde{U}_y))_{z_1} \neq \emptyset$ ist

α_{z_1} Diffeomorphismus, def. auf $(\psi(\tilde{U}_y))_{z_1}$

(i) & (ii) $\Rightarrow$ Diffeo's $\tilde{\psi}$ & χ sind von gesuchten Form. Falls (*) in 14.21 für $\tilde{\psi}$ & χ gilt

$\Rightarrow$ (*) in 14.21 gilt für φ, denn

2. & 3. Abl

$$\varphi = \chi \circ \pi_{12} \circ \tilde{\psi} \circ \pi_{12} \quad \checkmark$$

Wir sind für die Induktion jetzt bereit!

5. Abt: Induktionsanfang: (*) in 14.21 wahr für $d=1$

Bew.: Sei $[a,b[\subseteq \mathcal{U}$ ein Intervall ($a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$)

Dann gilt (*) in 14.21 wegen HDI für Riemann-Integrale,

denn $\lambda(\varphi([a,b[)) \underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ streng monoton} \\ (\text{Diffeo!})}}{=} |\varphi(b) - \varphi(a)| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{HDI}}}{=} \left| \int_a^b \varphi'(x)\,dx \right|$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \varphi \text{ wechselt nicht Vorzeichen } (\varphi' \neq 0 \text{ da Diffeo})}}{=} \int_a^b |\varphi'(x)|\,dx = \int_{[a,b[} |\det[(D\varphi)(x)]| \, d\lambda^1(x)$$

$\Rightarrow$ (*) gilt auf $\mathcal{I} \cap \mathcal{U}$ ($\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathcal{B} \cap \mathcal{U}$ mit Ausschöpfungsbed. wie in 11.28).

Da beide Seiten von (*) in 14.21 je ein Maß auf $\mathcal{B} \cap \mathcal{U}$ definieren $\Rightarrow$ Eind.keitssatz 11.28: (*) in 14.21 gilt $\forall A \in \mathcal{B} \cap \mathcal{U}$ ✓

6. Abt: Induktionsschritt: Sei $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Gilt (**) für $d-1$, dann auch für d.

Bew.: Sei $d \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $y \in \mathcal{U}$ bel. fest, und $A \subseteq U_y$, $A \in \mathcal{B}^d$

O.E. sei φ von der Form aus 4. Abt

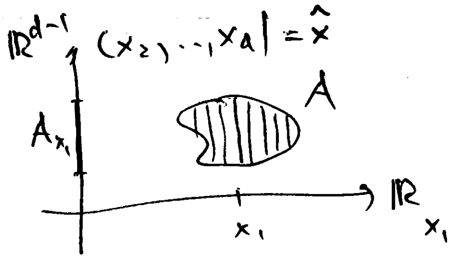
$$\Rightarrow \quad (D\varphi)(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & & & \\ \vdots & & (D\alpha_{x_1})(\hat{x}) & \\ * & & & \end{pmatrix}, \quad x = (x_1, \hat{x}) \in U_y$$

$$\Rightarrow \quad \det[(D\varphi)(x)] = \det[(D\alpha_{x_1})(\hat{x})]$$

Sei $A_{x_1} := \{\hat{x} \in \mathbb{R}^{d-1} : (x_1,\hat{x}) \in A\}$ x_1-Schnitt von A für $x_1 \in \mathbb{R}$

Damit ist

$$A = \dot{\bigcup_{x_1 \in \mathbb{R}}} \left(\{x_1\} \times A_{x_1}\right) \quad \text{woraus}$$



$$\boxed{\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_{A_{x_1}}(\hat{x})} \qquad (\text{„Prinzip von Cavalieri"})$$

Es folgt

$$\varphi(A) = \dot{\bigcup_{x_1 \in \mathbb{R}}} \underbrace{\varphi(\{x_1\} \times A_{x_1})}_{= \{x_1\} \times \alpha_{x_1}(A_{x_1})} \overset{\text{Cavalieri}}{\Longrightarrow} \mathbb{1}_{\varphi(A)}(x) = \mathbb{1}_{\alpha_{x_1}(A_{x_1})}(\hat{x})$$

da φ von der Form in 4. Abs

Damit folgt

$$\lambda^d(\varphi(A)) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\varphi(A)}(x)\, d\lambda^d(x) \overset{\text{Tonelli}}{=} \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{\mathbb{1}_{\varphi(A)}(x_1,\hat{x})}_{\mathbb{1}_{\alpha_{x_1}(A_{x_1})}(\hat{x})} d\lambda^{d-1}(\hat{x}) \Big)}_{\lambda^{d-1}(\alpha_{x_1}(A_{x_1}))} dx_1$$

$$\overset{\text{Ind.-Ann.}}{=} \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{A_{x_1}} \underbrace{|\det[(D\alpha_{x_1})(\hat{x})]|}_{= |\det[(D\varphi)(x_1,\hat{x})]|} d\lambda^{d-1}(\hat{x}) \Big) dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \Big(\int_{\mathbb{R}^{d-1}} \underbrace{\mathbb{1}_{A_{x_1}}(\hat{x})}_{= \mathbb{1}_A(x_1,\hat{x})} |\det[(D\varphi)(x_1,\hat{x})]| \, d\lambda^{d-1}(\hat{x}) \Big) dx_1$$

$$\overset{\text{Tonelli}}{=} \int_A |\det[(D\varphi)(x)]| \, d\lambda^d(x) \qquad \checkmark$$

$\Longrightarrow$ Satz folgt aus 1., 5. & 6. Abs. $\blacksquare$

15. Untermannigfaltigkeiten und der Satz von Gauß

15.1. Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^d$

15.1. Definition Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ versehen mit Relativtop. des $\mathbb{R}^d$ (mit der Eukl. Top.), sei $n \in \mathbb{N}$, $n \leq d$.

(a) M *n-dimensionaler C^1-(Unter-)Mannigfaltigkeit* (des $\mathbb{R}^d$)

$:\Leftrightarrow$ $\forall a \in M$ $\exists V \subseteq M$ offen in Relativtop. auf M mit $a \in V$, $\exists$ *Kartengebiet* $T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\exists$ (lokale) *Karte*

$\varphi: T \to V$ mit
$\varphi = (\varphi_1, .., \varphi_d)$

(i) φ bijektiv
(ii) φ, φ^{-1} stetig
} Homöomorphismus

(iii) φ stetig diff.bar

(iv) $$\text{Rang} \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t) \right)_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 1 \leq k \leq n}}}_{\frac{\partial(\varphi_1, .., \varphi_d)}{\partial(t_1, .., t_n)}(t)} = n \quad \forall t \in T$$

(b) Sei A eine Indexmenge

Atlas von M $:\Leftrightarrow$ Familie von Karten $\{\varphi_\alpha : T_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha \in A}$

mit $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha = M$

15.2. Bemerkung (a) (iii) heisst: $\varphi: T \to \mathbb{R}^d$ (T offen) diff.bar
($\varphi(T) = V \subseteq M \subseteq \mathbb{R}^d$ nicht i.A. in $\mathbb{R}^d$ offen).
(iv) heisst, Matrix hat voller Rang $\forall t$

(b) Vorsicht: häufige Konvention anderswo:

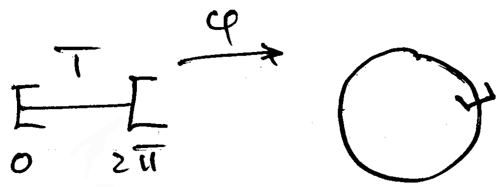
Die Abbildung $V \to T$ heisst "Karte"
(unseren dann „Parameterdarst.")

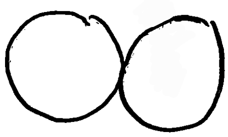
(c) Falls statt (iii): φ l-mal stetig diff.bar, $l \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$

$\rightsquigarrow$ C^l-Mfkt.

(d) Konvention: j kartesischer Index für $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_d)$;
α Familienindex von φ in einem Atlas ($\varphi_\alpha : T_\alpha \to V_\alpha$).

15.3. Beispiel (a) Die Einheitsphäre in $\mathbb{R}^2$:
$S^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ (Kreis!) ist 1-dim C^∞-Mfkt.
Nur 2 Karten nötig für Atlas, z.B. Einschränkungen auf $]0, 2\pi[$ und $]-\pi, \pi[$ der Abb.
$\mathbb{R} \to S^1$
$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

NB:  keine zulässige Wahl, da T nicht offen in $\mathbb{R}$.

(b)  ist keine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^2$
(Begr.: "Behaupt." am Ende Bew. Lemma 15.5)

$\boxed{\text{15.4. Lemma}}$ Sei M C^1-Mfkt. Dann hat M abzählbaren Atlas.

Beweis: Aus Satz von Lindelöf (10.24), denn: Eukl. Top. $\mathcal{T}$ auf $\mathbb{R}^d$ erfüllt 2. AA. (Bsp. 10.14) $\Rightarrow$ $(M, \mathcal{T}_M)$ ← Relativtop.
erfüllt 2. AA – denn: Sei $V \in \mathcal{T}_M \Rightarrow \exists U \in \mathcal{T} : V = U \cap M$
u.V. gilt $U = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} B_{n_j}$ ($\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ abz. Basis $\mathcal{T}$ – 2. AA)

$\Rightarrow V = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} (B_{n_j} \cap M)$; d.h. $\{\underbrace{B_k \cap M}_{=: C_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ ist Basis von $\mathcal{T}_M$. ☒

$\varphi^{-1}: V \to T$ macht M lokal flach und ist im folgenden Sinn diff-bar (NB: V i.A. nicht offen in $\mathbb{R}^d$!)

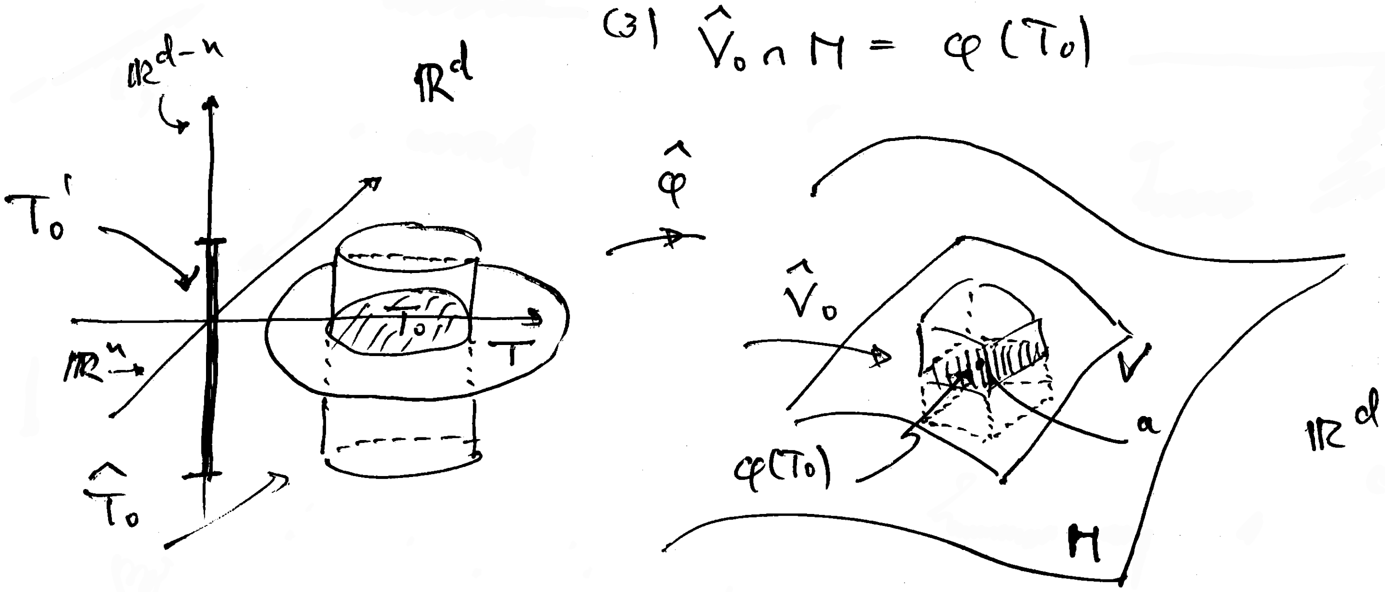
15.5. Lemma Sei $\varphi: T \to V$ Karte der C^1-Mfkt. M, sei $a \in V$. Dann $\exists\, T_0 \subseteq T \subseteq \mathbb{R}^n$ offen mit $a \in \varphi(T_0)$, $T_0' \subseteq \mathbb{R}^{d-n}$ offene Umgebung der $0 \in \mathbb{R}^{d-n}$, und $\hat{V}_0 \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, sowie

$$\hat{\varphi}: \underbrace{T_0 \times T_0'}_{=: \hat{T}_0 \subseteq \mathbb{R}^d} \to \hat{V}_0 \quad (\text{„Flachmacher" bzgl. } a) \text{ mit}$$

(1) $\hat{\varphi}$ ist Diffeomorphismus

(2) $\hat{\varphi}|_{T_0 \times \{0\}} = \varphi|_{T_0}$

(3) $\hat{V}_0 \cap M = \varphi(T_0)$



<u>Beweis</u>: Def. 15.1. (iv) $\Rightarrow \exists\, 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_n \leq d$ mit

$$\text{Rang} \frac{\partial(\varphi_{j_1}, \dots, \varphi_{j_n})}{\partial(t_1, \dots, t_n)}(\tau) =: \text{Rang}\, J(\tau) = n, \quad \text{wobei } \tau := \varphi^{-1}(a)$$

O.E. sei $j_k = k \;\; \forall k = 1, \dots, n$ (sonst nummeriere Koord. in $\mathbb{R}^d$ um; wenn Beh wahr für $\Pi \circ \varphi$ und $\Pi M \Rightarrow$ Beh. wahr für φ und M).
Π Perm.-Abb.

Sei $\delta > 0$, $\hat{t} := (t, t') \in T \times]-\delta, \delta[^{d-n} =: \hat{T}$; $\hat{\tau} := (\tau, 0)$

und $\quad \hat{\varphi}_j(\hat{t}) := \varphi_j(t)$, $j = 1, \dots, n$

$\quad\quad \hat{\varphi}_j(\hat{t}) := \varphi_j(t) + t'_{j-n}$, $j = n+1, \dots, d$

$\Rightarrow$ $\hat{\varphi}$ stetig diff'bar. auf $\hat{T}$ mit

$$(D\hat{\varphi})(\hat{\tau}) = \frac{\partial(\hat{\varphi}_1, \dots, \hat{\varphi}_d)}{\partial(\hat{t}_1, \dots, \hat{t}_d)}(\hat{\tau}) = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} t & t' \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ d \end{array} & \left(\begin{array}{c|ccc} J(\tau) & & 0 & \\ \hline & 1 & & \\ * & & \ddots & \\ & & & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

hat Rang d $\Rightarrow$ invertierbar

$\overset{\text{Kor. 2.6}}{\Rightarrow}$ (Satz über Umkehrfkt.)

$\exists$ Umgebung $\hat{T}_0$ von $\hat{\tau}$ in $\mathbb{R}^d$ mit

$\hat{\varphi} : \hat{T}_0 \to \hat{\varphi}(\hat{T}_0) =: \hat{V}_0$ ist Diffeomorphismus

Durch weiteres Verkleinern kann man $\hat{T}_0$ von der Form $T_0 \times T_0'$ wählen (Dreiecksungleichung !) $\Rightarrow$ (1)

Da $\hat{\varphi}|_{T \times \{0\}} = \varphi|_T \Rightarrow (2)$

Zu (3): Kann durch weiteres Verkleinern von T_0 und δ erreicht werden, denn es gilt:

Behauptung: $\exists\, \varepsilon > 0 : B_\varepsilon^{(d)}(a) \cap M \subseteq \varphi(T_0)$

Bew. Beh: $\varphi(T_0)$ offen in Rel-top (d.h. $\varphi(T_0) \in \mathcal{T}_M$) & $a \in \varphi(T_0)$

$\Rightarrow$ $\exists$ offene Umgebung U_M von a in $\varphi(T_0)$

$\Rightarrow$ $U_M = U \cap M$, wobei U offen in $\mathbb{R}^d$ und

$a \in U$, also $U \cap M \subseteq \varphi(T_0)$ $\quad\boxtimes$

15.6. Satz (Kartenwechsel)

Sei M n-dim. C^1-Mfkt. Dann gilt

(a) $n =: \dim M$ ist eindeutig bestimmt, d.h. falls

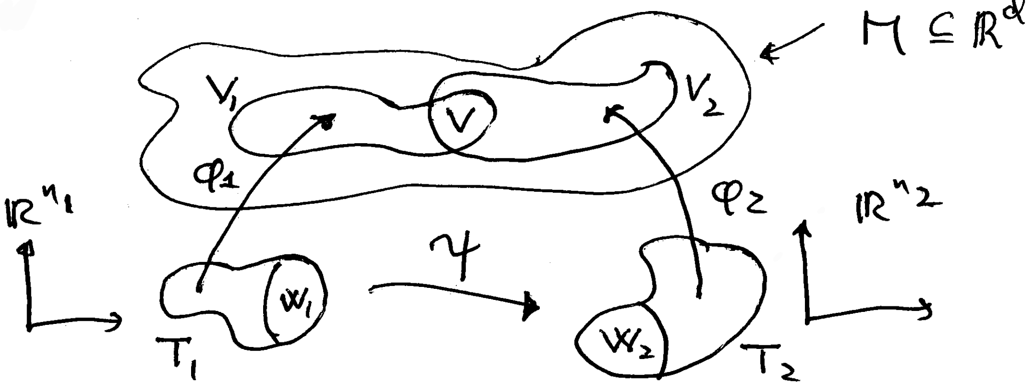
φ Karte von M mit Kartengebiet $\subseteq \mathbb{R}^m \Rightarrow m = n$.

(b) Für $\gamma = 1,2$ sei $\varphi_\gamma : T_\gamma \to V_\gamma$ Karte von M (siehe 15.2(d))

mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ (V offen in M u.V.).

Sei $W_\gamma := \varphi_\gamma^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ (offen in $\mathbb{R}^n$!).

Dann ist $\psi := \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : W_1 \to W_2$ ein Diffeomorphismus



15.7. Bemerkung: (a) $\exists\, \psi : [0,1] \to [0,1]^2 = [0,1] \times [0,1]$

stetig & surjektiv (Peano-Kurve)! – aber:

ψ nicht injektiv.

(b) $\nexists$ Diffeomorphismus zwischen offenen Mengen

von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$ für $n \neq m$ (siehe Übung)

(Nicht einmal ein Homöomorphismus!)

Beweis von Satz 15-6: Für $\gamma = 1,2$ seien $T_\gamma \subseteq \mathbb{R}^{n_\gamma}$ offen, $n_\gamma \in \mathbb{N}$, und $\varphi_\gamma : T_\gamma \to V_\gamma$ Karten mit $V := V_1 \cap V_2 \neq \phi$.

(i) ψ ist Homöom., da φ_1, φ_2 Homöom.'en.

(ii) Zur Diff.-barkeit: sei $a \in V$ beliebig fest,

sei $\tau_\gamma := \varphi_\gamma^{-1}(a) \in W_\gamma \subseteq T_\gamma$. Sei $\hat{\varphi}_\gamma : \hat{T}_{0,\gamma} \to \hat{V}_{0,\gamma}$ Flachmacher zu φ_γ bzgl. a (Notation wie in Lemma 15.5, mit angehängtem γ), d.h. $\hat{T}_{\gamma,0}$ ist offene Umgebung von $(\tau_\gamma, \underset{\in \mathbb{R}^{d-n_\gamma}}{0}) \in \mathbb{R}^d$, $\hat{V}_{\gamma,0}$ off. Umgeb. von a in $\mathbb{R}^d$

Sei $\hat{Y} := \hat{V}_{0,1} \cap \hat{V}_{0,2}$ ($\neq \phi$, da $\ni a$), offen in $\mathbb{R}^d$,

$\hat{X}_\gamma := \hat{\varphi}_\gamma^{-1}(\hat{Y})$ (offen in $\mathbb{R}^d$), $\hat{\psi} := \hat{\varphi}_2^{-1} \circ \hat{\varphi}_1 : \hat{X}_1 \to \hat{X}_2$

- Da $\hat{\varphi}_1, \hat{\varphi}_2$ Diffeom.'en $\Rightarrow$ $\hat{\psi}$ Diffeom mit Umkehrung
$$\hat{\psi}^{-1} = \hat{\varphi}_1^{-1} \circ \hat{\varphi}_2$$
- Setze $X_\gamma := \hat{X}_\gamma \cap W_\gamma$ (offene Umgeb. von τ_γ in $\mathbb{R}^{n_\gamma}$)

(2) in Lem. 15.5 $\Rightarrow$ & $\hat{\varphi}_\gamma$ bijektiv
$$\hat{\psi}\Big(\Big(\begin{matrix} t \\ \underset{\in \mathbb{R}^{d-n_1}}{0} \end{matrix}\Big)\Big) = \begin{pmatrix} \psi(t) \\ \underset{\in \mathbb{R}^{d-n_2}}{0} \end{pmatrix} \quad \forall t \in X_1 \quad (*)$$

(von rechts nach links lesen) $\Rightarrow$ ψ stetig diff.-bar in $\tau_1 \in W_1$

(aus $(*)$ $\Rightarrow$ $\psi_k(t) = \hat{\psi}_k\left(\binom{t}{0}\right)$ $\forall k = 1, \dots, n_2$

$\Rightarrow$ $\forall j = 1, \dots, n_1$, $\forall k = 1, \dots, n_2$: $(\partial_j \psi_k)(t) = (\partial_j \hat{\psi}_k)\left(\binom{t}{0}\right)$ existiert & ist stetig $\forall t \in X_1$)

Da $\tilde{\imath}_1 \in W_1$ bel. (da $a \in V$ bel.) $\Rightarrow \psi$ stetig diff.bar auf W_1

Analog: ψ^{-1} stetig diff.bar auf W_2 (vertausche $1 \leftrightarrow 2$)

$\overset{(i)}{\Rightarrow}$ ψ Diffeom. $\Rightarrow$ (b) ✓

(i) & (ii) $\Rightarrow$ ψ ist Diffeom. zwischen offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^{n_1}$ & $\mathbb{R}^{n_2}$ $\overset{\text{Bem. 15.7(b)}}{\Longrightarrow}$ $n_1 = n_2$ $\Rightarrow$ (a) ✓

Mfkt. als Lösungsmenge lokaler Gleichungssysteme (vgl. lin. Unterräume von $\mathbb{R}^d$ als Lösungsmenge eines lin. Glg.systems):

15.8. Satz Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ und $n \in \mathbb{N}, n \leq d$.

Dann sind äquivalent:

(i) M ist n-dim. C^1-Mfkt.

(ii) $\forall a \in M$ $\exists$ offene Umgebung $\mathcal{U} \ni a$ in $\mathbb{R}^d$ und $\exists f_1, \ldots, f_{d-n}: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ stetig diff.bar mit

(1) $M \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : f_1(x) = \ldots = f_{d-n}(x) = 0\}$

(2) $\text{Rang} \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_{d-n})}{\partial(x_1, \ldots, x_d)}(a) = d-n$

Beweis: „(i) $\Rightarrow$ (ii)":

Benutze Flachmacher $\hat{\varphi}$ von Karte φ bzgl. a aus Beweis von Lem. 15.5 mit $U := \hat{V}_0$

und $f_j := (\hat{\varphi}^{-1})_{n+j}$ für $j = 1, \ldots, d-n$.

(404)

(1) Folgt aus Eig.schaft (3) Lem. 15.5 & Def. von $\hat{\varphi}$

(2) Für (tot.) Differential von Umkehrfkt des Flachmachers gilt:

$$(D\hat{\varphi}^{-1})(a) = \left[(D\hat{\varphi})(\varphi^{-1}(a))\right]^{-1} = \begin{array}{c|c} & \begin{array}{cc} 1 \cdots n & n+1 \cdots d \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ n \\ n+1 \\ \vdots \\ d \end{array} & \left(\begin{array}{c:c} A & 0 \\ \hdashline -BA & \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \end{array}\right) \end{array}$$

(durch Invert. der Matrix $(D\hat{\varphi})(\hat{\imath})$ im Bew. Lem. 15.5, wobei $A := \left[J(\varphi^{-1}(a))\right]^{-1}$ & B den $(d-n)\times n$ - Block dort mit "$*$" bezeichnet).

Die $(d-n)\times d$ - Matrix $\left(-BA \;\vdots\; \begin{smallmatrix}1 & \\ & \ddots \\ & & 1\end{smallmatrix}\right)$ ist gerade $\frac{\partial(f_1,\dots,f_{d-n})}{\partial(x_1,\dots,x_d)}(a)$, und hat Rang $d-n$. ✓

"(i) ⇐ (ii)": Ziel: Konstruiere eine Karte φ !

(2) $\Rightarrow \exists\, 1 \le j_1 < \dots < j_{d-n} \le d$ mit

$$(*) \qquad \text{Rang}\ \frac{\partial(f_1,\dots,f_{d-n})}{\partial(x_{j_1},\dots,x_{j_{d-n}})}(a) = d-n \quad (\Rightarrow \text{invertierbar})$$

- o.E. sei $j_k = n+k$. $\forall k = 1,\dots,d-n$ (sonst umnummerier.)

Sei $U' \subseteq \mathbb{R}^n$ offene Umgebung von $(a_1,\dots,a_n) =: a'$

sei $U'' \subseteq \mathbb{R}^{d-n}$ " " " $(a_{n+1},\dots,a_d) =: a''$

so dass $U' \times U'' \subseteq U$ (geht wegen Dreiecks-Ungl.!)

$(U \ni a = (a', a''))$

Sei $F: \begin{array}{ccc} \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' & \longrightarrow & \mathbb{R}^{d-n} \\ (x', x'') & \longmapsto & \begin{pmatrix} f_1(x', x'') \\ \vdots \\ f_{d-n}(x', x'') \end{pmatrix} \end{array}$ $\Rightarrow$ stetig diff-bar (n.V.)

und (n.V.) $M \cap (\mathcal{U}' \times \mathcal{U}'') = \{ (x', x'') \in \mathcal{U}' \times \mathcal{U}'' : F(x', x'') = 0 \}$

$(*) \Rightarrow$ Satz 9.4 (Impl. Fkt'en)

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{U}_0' \subseteq \mathcal{U}'$ offene Umg. von a',

$\exists\, \mathcal{U}_0'' \subseteq \mathcal{U}''$ " " " a'',

$\exists\, g : \mathcal{U}_0' \to \mathcal{U}_0''$ stetig diff-bar mit

$(**)$ $M \cap (\mathcal{U}_0' \times \mathcal{U}_0'') = \{ (x', x'') \in \mathcal{U}_0' \times \mathcal{U}_0'' : x'' = g(x') \}$

$\Rightarrow \varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_0' & \longrightarrow & M \cap (\mathcal{U}_0' \times \mathcal{U}_0'') \; (\subseteq \mathbb{R}^d) \\ \mathbb{R}^n \ni t & \longmapsto & \begin{pmatrix} t \\ g(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \end{array}$ stetig diff-bar

mit $(D\varphi)(t) = \begin{array}{c} n \\ \left(\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{matrix} \\ \hline * \end{array} \right) \end{array} \begin{array}{l} n \\ d-n \end{array}$ $\quad d \geq n \Rightarrow$ Rang n $\forall t \in \mathcal{U}_0'$

zudem

- φ injektiv per def.
- φ bijektiv wegen $(**)$
- φ^{-1} stetig, denn sei $x^1 := \varphi(t^1)$, $x^2 := \varphi(t^2)$

$$\Rightarrow |\varphi^{-1}(x^2) - \varphi^{-1}(x^1)|_{\mathbb{R}^n} = |t^2 - t^1|_{\mathbb{R}^n}$$

$$\leq \left| \begin{pmatrix} t^2 \\ g(t^2) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} t^1 \\ g(t^1) \end{pmatrix} \right|_{\mathbb{R}^d} = |x^2 - x^1|_{\mathbb{R}^d}$$

$\blacksquare$

15.2. Tangential- und Normalenvektoren

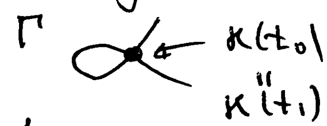
$\boxed{\text{15.9. Definition}}$ (a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall (auch uneigentliches), sei $t_0 \in I$.

$\kappa : I \to \mathbb{R}^d$ stetig diff-bar. $\;:\;$ C^1-Kurve (in $\mathbb{R}^d$)

mit C^1-Kurvenbogen $\Gamma := \kappa(I) \subseteq \mathbb{R}^d$

$v := \kappa'(t_0) \in \mathbb{R}^d$ Tangentialvektor von κ in $\kappa(t_0)$

- kann mehrere geben, falls κ nicht injektiv:



(b) Sei M C^1-Mfkt, $a \in M$ in $\mathbb{R}^d$.

$$\left.\begin{array}{l} v \in \mathbb{R}^d \text{ Tangentialvektor von } M \\ \text{in } a \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \exists\, \varepsilon > 0 \text{ und } C^1\text{-Kurve} \\ \kappa :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M \subseteq \mathbb{R}^d : \\ \kappa(0) = a \quad \text{und } v = \kappa'(0) \end{array}\right.$$

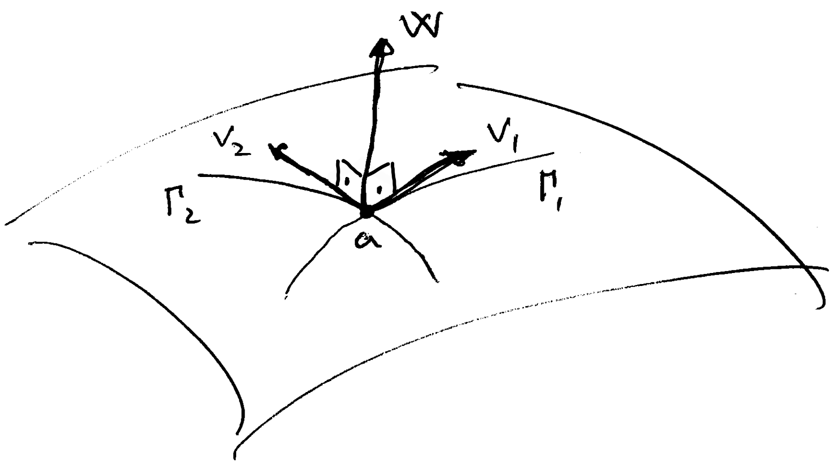
Tangentialraum von M in a:

$$T_a M := \{ v \in \mathbb{R}^d : v \text{ ist Tang. vektor von } M \text{ in } a \}$$

$$\left.\begin{array}{l} w \in \mathbb{R}^d \text{ Normalenvektor von } M \\ \text{in } a \end{array}\right\} :\Longleftrightarrow w \perp T_a M$$

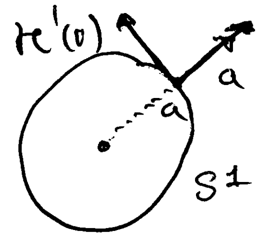
Normalenraum von M in a:

$$N_a M := \{ w \in \mathbb{R}^d : w \text{ ist Normalenvekt. von } M \text{ in } a \}$$



$M \subseteq \mathbb{R}^d$

15.10. Beispiel $M = S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$



Sei $a = \begin{pmatrix} \cos t_0 \\ \sin t_0 \end{pmatrix} \in S^1$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$

C^1-Kurve $\kappa : \begin{array}{l}]-\varepsilon, \varepsilon[\to S^1 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\lambda t + t_0) \\ \sin(\lambda t + t_0) \end{pmatrix} \end{array}$; $\kappa(0) = a$

$\kappa'(0) = \lambda \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix}$

$\in T_a S^1 \; \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Nächster Satz zeigt:

$T_a S^1 = \operatorname{span}\left\{ \begin{pmatrix} -\sin t_0 \\ \cos t_0 \end{pmatrix} \right\}$ – und damit $N_a S^1 = \operatorname{span}\{a\}$

15.11. Satz Sei $M \subseteq \mathbb{R}^d$ n-dim. C^1-Mfkt, sei $a \in M$. Dann gilt:

(a) $T_a M = \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\varphi^{-1}(a)), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\varphi^{-1}(a)) \right\}$ lin. unab. per def.

ist Unabh. von Wahl der Karte $\varphi : T \to M$ mit $a \in \varphi(T)$.

Insbes.: $T_a M$ lin. Unterraum von $\mathbb{R}^d$, $\dim(T_a M) = n$

(b) Sei U offene Umgebung von a in $\mathbb{R}^d$ und $\exists f_1, \dots, f_{d-n} \in C^1(U)$ mit $M \cap U = \{x \in U : f_1(x) = \dots = f_{d-n}(x) = 0\}$

und $\operatorname{Rang} \frac{\partial(f_1, \dots, f_{d-n})}{\partial(x_1, \dots, x_d)} = d - n$ (exist. nach Satz 15.8).

Dann ist

lin. unab.

$$N_a M = \operatorname{span}\{(\nabla f_1)(a), \dots, (\nabla f_{d-n})(a)\}$$

unabh. von Wahl der $f_1, \dots, f_{d-n}$.

Insbes.: $\dim(N_a M) = d - n$, und für alle $v \in T_a M$ und alle $j = 1, \dots, d-n$ gilt

$$v \cdot (\nabla f_j)(a) = 0$$

Beweis: Sei $X := \operatorname{span}\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\varphi^{-1}(a)), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\varphi^{-1}(a)) \right\}$

$Y := \operatorname{span}\{ (\nabla f_1)(a), \dots, (\nabla f_{d-n})(a) \}$

Also: $X, Y^{\perp}$ sind je n-dim lin. Unterräume von $\mathbb{R}^d$ (*)

Wir zeigen: $X \subseteq T_a M \subseteq Y^{\perp}$ ($\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $X = T_a M = Y^{\perp}$ $\Rightarrow$ alle Beh.)

„$X \subseteq T_a M$": Sei $v := \sum_{j=1}^{n} \underset{\in \mathbb{R}}{\lambda_j} \frac{\partial \varphi}{\partial t_j}(\underbrace{\varphi^{-1}(a)}_{=: t_0 \in \mathbb{R}^n}) \in X$ bel.

$\exists\, \varepsilon > 0 : B_{\tilde{\varepsilon}}(t_0) \subseteq T$
mit $\tilde{\varepsilon} := (\sqrt{n} \max_{j=1,\dots,n} |\lambda_j|)\varepsilon$ $\Rightarrow$ $\kappa : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\,\to M$, $\tau \mapsto \varphi(t_{0,1} + \lambda_1 \tau, \dots, t_{0,n} + \lambda_n \tau)$

ist wohldef C^1-Kurve mit $\kappa(0) = \varphi(t_0) = a$, $\kappa'(0) = v$
(Kettenregel!)

$\Rightarrow v \in T_a M$ ✓

„$T_a M \subseteq Y^{\perp}$": Sei $\kappa : \,]-\varepsilon, \varepsilon[\,\to M$ bel. C^1-Kurve mit $\kappa(0) = a$, $\kappa'(0) = v$ (d.h. $v \in T_a M$). Da $\kappa(\tau) \in M$ $\forall |\tau| < \varepsilon$

$\Rightarrow f_j(\kappa(\tau)) = 0$ $\forall |t| < \varepsilon$, $\forall j = 1, \dots, d-n$

$(\frac{d}{d\tau} = 0) \Rightarrow$ $0 = \frac{d}{d\tau} f_j(\kappa(\tau))\Big|_{\tau=0} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial f_j}{\partial x_k}(a)\, \kappa_k'(0)$

$= (\nabla f_j)(a) \cdot \underbrace{\kappa'(0)}_{v}$ $\Rightarrow$ $v \in Y^{\perp}$ ✓

$\boxtimes$

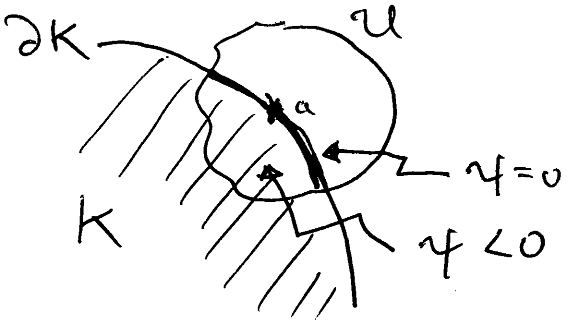
15.12. Definition Sei $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^d$

K ist *d-dim. Teilmenge mit C^1-Rand* $:\Longleftrightarrow$ $\forall a \in \partial K \; \exists$ offene Umgebung $\mathcal{U} \ni a$ in $\mathbb{R}^d$ sowie $\psi \in C^1(\mathcal{U};\mathbb{R})$ mit

(1) $K \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : \psi(x) \leq 0\}$

(2) $(\nabla \psi)(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$

(3) $\partial K \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : \psi(x) = 0\}$



15.13. Bemerkung • (3) ist keine eigenständige Forderung, sondern folgt bereits aus (1) & (2) (siehe Forster 3, (8. Aufl.), §15, p. 179-180).

• Es genügt (2) für $x = a$ zu fordern, da $\psi \in C^1$.

• Falls K zudem kompakt, nennen wir K *d-dim Kompaktum mit C^1-Rand*

15.14. Beispiel: $\overline{B_1(0)} := \overline{B_1^d(0)} := \{x \in \mathbb{R}^d : \underbrace{|x|^2 - 1}_{=:\psi(x)} \leq 0\} \subseteq \mathbb{R}^d$ ist d-dim. Komp. mit C^1-Rand

$\Rightarrow \quad S^{d-1} := \partial \overline{B_1(0)} = \{x \in \mathbb{R}^d : \psi(x) = 0\}$ und

$N_a S^{d-1} = \operatorname{span}\{a\} \quad \forall a \in S^{d-1}$ (vgl. Bsp. 15.10.)

15.15. Satz Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine d-dim Teilmenge mit C^1-Rand. Dann ist ∂K eine $(d-1)$-dim C^1-Mfkt in $\mathbb{R}^d$

Beweis: Satz 15.8, (ii) $\Rightarrow$ (i), mit $n = d-1$ und $f_1 = \psi$ ∎

15.16. Satz u. Def. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^d$ eine d-dim. Teilmenge mit C^1-Rand. Dann gilt

(a) $\forall a \in \partial K \; \exists !$ äußerer Normalen-Einheitsvektor

$$\nu(a) := \frac{(\nabla \psi)(a)}{|(\nabla \psi)(a)|} \in \mathbb{R}^d \quad (\psi \text{ wie in Def. 15.12})$$

von K in a, mit

(1) $\nu(a) \perp T_a(\partial K)$

(2) $|\nu(a)| = 1$

(3) $\exists \varepsilon_0 > 0 : a + \varepsilon \nu(a) \notin K \;\; \forall \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

(b) Das äußere Normalen-Einheitsvektorfeld

$$\nu : \begin{array}{l} \partial K \to \mathbb{R}^d \\ a \mapsto \nu(a) \end{array}$$

ist stetig.

Beweis: Sei $a \in \partial K$, ψ wie in Def. 15.12 $\Rightarrow \nu(a)$ wohldef. & erfüllt (2); Stetigkeit klar ($\psi \in C^1$); (1) folgt wie Bew. 15.11(b) & 15.15.

zu (3): $$\psi(a + \varepsilon \nu(a)) \overset{\text{diff.-bar}}{=} \underbrace{\psi(a)}_{0} + \underbrace{(\nabla \psi)(a) \cdot \varepsilon \nu(a)}_{|(\nabla\psi)(a)| \cdot \varepsilon} + o(\varepsilon) \quad (\varepsilon \to 0)$$

$\Rightarrow \psi(a + \varepsilon \nu(a)) > 0 \;\; \forall \varepsilon > 0$ hinreichend klein

$\Rightarrow a + \varepsilon \nu(a) \notin K$.

Bleibt noch Eindeutigkeit: Satz 15.11(b) & (1)

$\Rightarrow$: $\tilde{\nu} \in N_a(\partial K) = \operatorname{span}\{(\nabla\psi)(a)\}$, $|\tilde{\nu}| = 1$

$\overset{(2)}{\Rightarrow} \tilde{\nu} = \pm \nu(a) \overset{(3)}{\Rightarrow} \tilde{\nu} = + \nu(a)$ ■

15.17 Beispiel: Für S^{d-1} (siehe Bsp. 15.14) ist $\nu(a) = a \;\; \forall a \in S^{d-1}$.

15.3. Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Faktum: (!) Für $n < d$ ist die n-dim Mfkt. M eine Nullmenge bzgl. λ^d.

Idee: Lebesgue-Maß auf $M \cap \underset{\uparrow \text{Karte}}{\varphi}(T)$ = Bildmaß unter φ von geeignetem Maß auf Kartengeb. $T \subseteq \mathbb{R}^n$ so, daß Ergebnis unabh. von Wahl der Karte.

Zentrale Rolle dabei:

15.18. Definition $M \subseteq \mathbb{R}^d$ n-dim C^1-Mfkt., $\varphi: T \to M$ Karte, $\alpha, \beta \in \{1, .., n\}$: Sei

$$G_{\alpha\beta}: \begin{array}{l} T \to \mathbb{R} \\ t \mapsto \frac{\partial\varphi}{\partial t_\alpha}(t) \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t_\beta}(t) \end{array},$$

Skalarprod. in $\mathbb{R}^d$

Dann heißt

$$G := G_\varphi: \begin{array}{l} T \to \mathrm{Mat}(n\times n, \mathbb{R}) \\ t \mapsto (G_{\alpha\beta}(t))_{1\le\alpha,\beta\le n} \end{array} = [(D\varphi)(t)]^T (D\varphi)(t)$$

(T: transponierte)

Gram-Matrix / metrischer Tensor, und

$$g := g_\varphi: \begin{array}{l} T \to [0, \infty[\\ t \mapsto \det G(t) = \det [(D\varphi)(t)]^T (D\varphi)(t) \end{array}$$

die Gram-Determinante / Gramsche Determinante.

15.19. Bemerkung:

$$G(t) = [(D\varphi)(t)]^T (D\varphi)(t) \quad \forall t \in T$$

$\Rightarrow$ $G(t) \geq 0$ (siehe 8.35 & 8.37) (denn $v \cdot A^T A v = (Av)\cdot(Av) \geq 0$)

$\Rightarrow$ $G(t)$ diagonalisierbar; nicht-neg Eigenwerten; $g(t)$ Produkt Eigenwerte.

Trafo-Verhalten von g unter Kartenwechsel:

15.20. Lemma Sei M n-dim. C^1-Mfkt., seien $\varphi : T \to V \subseteq M$, $\tilde{\varphi} : \tilde{T} \to \tilde{V} \subseteq M$ zwei Karten mit $V \cap \tilde{V} \neq \emptyset$, sowie $W := \varphi^{-1}(V \cap \tilde{V})$, $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(V \cap \tilde{V})$ und $\psi := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : W \to \tilde{W}$ (Diffeom. laut Satz 15.6.)

Dann gilt
$$g(t) = \left[\det(D\psi)(t)\right]^2 \tilde{g}(\psi(t)) \quad \forall t \in W$$
wobei $g := g_\varphi$, $\tilde{g} := g_{\tilde{\varphi}}$ Gram-Determ. bzgl. Karten φ & $\tilde{\varphi}$

Beweis: $\varphi(t) = (\tilde{\varphi} \circ \psi)(t) \overset{\text{Kettenregel}}{\Longrightarrow} (D\varphi)(t) = (D\tilde{\varphi})(\psi(t)) \cdot (D\psi)(t)$

$$\Rightarrow g(t) = \det\left[(D\varphi)(t)\right]^T (D\varphi)(t)$$

$(AB)^T = B^T A^T$

$$= \det\Big[\underbrace{(D\psi)(t)^T}_{n\times n\text{-Matrix}} \underbrace{\big((D\tilde{\varphi})(\psi(t))\big)^T (D\tilde{\varphi})(\psi(t))}_{n\times n\text{-Matrix}} \underbrace{(D\psi)(t)}_{n\times n\text{-Matrix}}\Big]$$

$\Rightarrow$ Beh. mit $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ & $\det A^T = \det A$ ∎

15.21 Beispiel (Graphen) $(n = d-1)$ Sei $T \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ offen, $\rho \in C^1(T; \mathbb{R})$. Für

$$x := ((x_1, \dots, x_{d-1}), x_d) \in T \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^d,$$
$$f(x) := x_d - \rho(x_1, \dots, x_{d-1}), \quad f : T \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

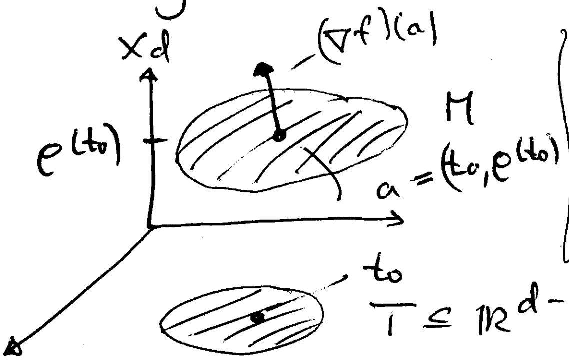
gilt
$$(\nabla f)(x) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \rho}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_{d-1}) \\ \vdots \\ -\frac{\partial \rho}{\partial x_{d-1}}(x_1, \dots, x_{d-1}) \\ 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\overbrace{\nabla \rho(x_1, \dots, x_{d-1})^T}^{\in \mathbb{R}^{d-1}} \\ 1 \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^d$$

$$\neq 0 \qquad = (-\nabla \rho(x_1, \dots, x_{d-1}), 1)$$

(a)
$$M := \{x \in T \times \mathbb{R} : x_d = \rho(x_1, \dots, x_{d-1})\} \quad (\text{Graph von } \rho)$$
$$= \{x \in T \times \mathbb{R} : f(x) = 0\}$$

ist $(d-1)$-dim. C^1-Mfkt. mit globaler Karte

$$\varphi : \begin{array}{l} T \to \mathbb{R}^d \\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \rho(t) \end{pmatrix} \end{array}$$



Siehe Ana2, Tut. Auf. 11, T4

(b) Normalenraum von M

in $a = (t_0, \rho(t_0))$:
$$N_a M = \operatorname{span}\{(\nabla f)(a)\} = \operatorname{span}\{(-\nabla\rho(t_0), 1)\} \quad (\text{siehe } 15.11\,(b))$$

(c) Gram-Matrix und -Determinante:

$$(D\varphi)(t) = \left.\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \\ \hline \underbrace{(\partial_1\rho)(t) & \cdots & (\partial_{d-1}\rho)(t)}_{d-1} \end{pmatrix}\right\} d = \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} \\ \hline (\nabla\rho)(t) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow G(t) = (D\varphi)(t)^T (D\varphi)(t) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} & (\nabla\rho)(t)^T \end{array}\right) \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} \\ \hline (\nabla\rho)(t) \end{pmatrix}$$

$$= \mathbb{1}_{(d-1)\times(d-1)} + P(t), \quad P_{\alpha\beta}(t) := (\partial_\alpha\rho)(t)(\partial_\beta\rho)(t)$$
$$\alpha, \beta = 1, \dots, d-1$$

P ist Orthogonalprojektor (in $\mathbb{R}^{d-1}$)
auf Vektor $(\nabla\rho)(t)^T$, d.h. $\forall v \in \mathbb{R}^{d-1}$: $Pv = [\underbrace{(\nabla\rho)(t) \cdot v}_{\in \mathbb{R}}]\,(\nabla\rho)(t)^T$
$\Rightarrow G(t)$ selbstadj. $(d-1)\times(d-1)$-Matrix,
Eigenwerte $1 + |(\nabla\rho)(t)|^2, \underbrace{1, \dots, 1}_{d-2 \text{ Stück}}$

$$\Rightarrow \quad \boxed{g(t) = 1 + |(\nabla\rho)(t)|^2}$$

15.22. Def. & Satz Sei M n-dim. C^1-Mfkt. in $\mathbb{R}^d$ mit Atlas $\{\varphi_\alpha : T_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$ (siehe Lem. 15.4) und der Zerlegung

$$M = \dot{\bigcup_{\alpha\in\mathbb{N}}} U_\alpha \qquad \text{wobei } U_\alpha \subseteq V_\alpha,\ U_\alpha \in \mathcal{B}^d \cap M.$$

Sei $g_\alpha := g_{\varphi_\alpha}$ Gram-Determinante bzgl. Karte φ_α.

Dann gilt:

$$\lambda_M : \begin{array}{l} \mathcal{B}^d \cap M \longrightarrow [0,\infty] \\ B \longmapsto \sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}} \int\limits_{\varphi_\alpha^{-1}(B\cap U_\alpha)} \sqrt{g_\alpha(t)}\, d\lambda^n(t) \end{array}$$

ist ein Maß, das Lebesgue-(Borel)-Maß auf M (auch: Flächen-Maß), und unabhängig von Wahl des abzähl. Atlas (Notation: $d\sigma_M$, dS, ...)

Beweis: λ_M ist ein Maß: Für $\alpha\in\mathbb{N}$ ist

$$\tau_\alpha := \tau_{\varphi_\alpha} : \begin{array}{l} \mathcal{B}^n \cap \varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow [0,\infty] \\ S' \longmapsto \int\limits_{S'} \sqrt{g_\alpha(t)}\, d\lambda^n(t) \end{array} \qquad (*)$$

ein Maß (Leb. Maß mit Dichte - klar!).

$\Rightarrow$ Bildmaß $\varphi_\alpha(\tau_\alpha)$ ist Maß auf $\mathcal{B}^d \cap U_\alpha$

$$\Rightarrow \quad \lambda_M = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} (\varphi_\alpha(\tau_\alpha))(\,\cdot \cap U_\alpha) \qquad (**)$$

ist Maß auf $\mathcal{B}^d \cap M$ (verwende „großen Umordnungssatz für Reihen" - Fubini für Zählmaß - für σ-Additivität).

Unabh. von λ_M von Wahl der Karte:

Seien $\varphi, \tilde{\varphi}$ zwei Karten wie in Lemma 15.20

$\Rightarrow \psi := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : W \to \tilde{W}$ ist Diffeom. und für alle $B \in \mathcal{B}^d \cap (V \cap \tilde{V})$ gilt ($\varphi(\tau), \tilde{\varphi}(\tilde{\tau})$ Bildmaße von $\tau, \tilde{\tau}$ wie in (*)):

$$(\varphi(\tau))(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \underbrace{\sqrt{g(t)}}_{\substack{\text{Lem. 15.20} \\ = \\ |\det(D\psi)(t)|\sqrt{\tilde{g}(\psi(t))}}} \, d\lambda^n(t) \overset{\substack{\text{Trafo-Form. 14.21}}}{=} \int_{\underbrace{\psi(\varphi^{-1}(B))}_{\tilde{\varphi}^{-1}(B)}} \sqrt{\tilde{g}(\tilde{t})} \, d\lambda^n(\tilde{t})$$

$$= (\tilde{\varphi}(\tilde{\tau}))(B)$$

– d.h. Bildmaße auf M stimmen im Schnittgebiet überein

$\Rightarrow$ Beh. folgt mit Form von λ_M in (**) $\blacksquare$

$\boxed{\text{15.23 Korollar}}$ Mit der Notation des vorigen Satzes gilt

$$f \in \mathcal{L}^1(M, \mathcal{B}^d \cap M, \lambda_M) \Leftrightarrow \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha)} f_\pm(\varphi_\alpha(t)) \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t) < \infty$$

In dem Fall:

$$\int_M f(x) \, d\lambda_M(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha)} f(\varphi_\alpha(t)) \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t). \quad (*)$$

Beweis: Sei $B \in \mathcal{B}^d \cap M$, dann

$$\int_M \mathbb{1}_B(x) \, d\lambda_M(x) = \lambda_M(B) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(B \cap V_\alpha)} \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t)$$

$$= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(V_\alpha)} \mathbb{1}_B(\varphi_\alpha(t)) \sqrt{g_\alpha(t)} \, d\lambda^n(t) \quad \Rightarrow (*) \text{ gilt für } \mathbb{1}_B$$

$\Rightarrow$ (*) gilt für Elem. Fkt. $\overset{\text{monotone Konv.}}{\Rightarrow}$ (*) ok für $f \geq 0$, $\mathcal{B}^d \cap M$-messbar $\Rightarrow$ Beh. $\blacksquare$

15.24 Beispiel (a) Sphäre $S_r^1 := \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = r\}$, $r > 0$

2 Karten: $\varphi : \begin{array}{l}]0,2\pi[\to S_r^1 \\ t \mapsto r\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}\end{array}$, $\tilde{\varphi} : \begin{array}{l}]-\pi,\pi[\to S_r^1 \\ t \mapsto r\begin{pmatrix}\cos t \\ \sin t\end{pmatrix}\end{array}$

Sei $U := S_r^1 \setminus \left\{\begin{pmatrix} r \\ 0\end{pmatrix}\right\}$, $\tilde{U} := \left\{\begin{pmatrix} r \\ 0\end{pmatrix}\right\}$;

$\Rightarrow \tilde{\varphi}^{-1}(\tilde{U}) = \{0\}$ Nullmenge von λ^1 ($\Rightarrow$ keine Rolle!)

$\forall t \in \varphi^{-1}(U) =]0,2\pi[$: $(D\varphi)(t) = r\begin{pmatrix}-\sin t \\ \cos t\end{pmatrix}$

$\Rightarrow G(t) = r^2(-\sin t, \cos t) \cdot \begin{pmatrix}-\sin t \\ \cos t\end{pmatrix} = r^2 \Rightarrow g(t) = r^2$

Also: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ messbar ($\Rightarrow f|_{S_r^1}$ $\mathcal{B}^2 \cap S_r^1$-messbar)

$\Rightarrow f|_{S_r^1} \in \mathcal{L}^1(S_r^1, \lambda_{S_r^1}) \Leftrightarrow t \mapsto f(r\cos t, r\sin t) \in \mathcal{L}^1(]0,2\pi[, \lambda^1)$

und $$\int_{S_r^1} f(x)\, d\lambda_{S_r^1}(x) = r \int_{]0,2\pi[} f(r\cos t, r\sin t)\, dt$$ ($dt = d\lambda^1(t)$)

(man kann $]0,2\pi[$ mit $[0,2\pi]$ ersetzen).

(b) Analog: Sphäre $S_r^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = r\}$, $r > 0$

Sei Φ Kugelkoordinaten (Bsp. 14.25), und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}$ messbar

$\Rightarrow f|_{S_r^2} \in \mathcal{L}^1(S_r^2, \lambda_{S_r^2}) \Leftrightarrow (\theta,\varphi) \mapsto (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)\sin\theta \in \mathcal{L}^1(]0,2\pi[\times]0,\pi[, \lambda^2)$

und $$\int_{S_r^2} f(x)\, d\lambda_{S_r^2}(x) = r^2 \int_{]0,2\pi[}\int_{]0,\pi[} (f\circ\Phi)(r,\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

(siehe Üb).

(c) Allgemeiner: Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt

$$\boxed{\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^d} f\, d\lambda^d &= \int_0^\infty \left(\int_{S_r^{d-1}} f(x)\, d\lambda_{S_r^{d-1}}(x)\right) dr \\ &= \int_0^\infty \left(\int_{S^{d-1}} f(ry)\, d\lambda_{S^{d-1}}(y)\right) r^{n-1}\, dr.\end{aligned}}$$

(siehe Üb.; Fall $d=2$ aus (a) & Bsp. 14.24; $d=3$: (b) & 14.25).

(d) Graphen: $M = \{x \in T \times \mathbb{R} : x_d = \rho(x_1, \dots, x_{d-1})\}$, $\rho \in C^1(T, \mathbb{R})$

φ die globale Karte (siehe Bsp. 15.21). Dann ist

$$\lambda_M(B) = \int_{\varphi^{-1}(B)} \sqrt{1 + |(\nabla\rho)(t)|^2}\, d\lambda^{d-1}(t) \quad \forall B \in M \cap \mathcal{B}^d,$$

Insbes. $$\lambda_M(M) = \int_T \sqrt{1 + |\nabla\rho(t)|^2}\, d\lambda^{d-1}(t).$$

Wenn $f \in \mathcal{L}^1(M, \lambda_M)$, dann

$$\boxed{\int_M f(x)\, d\lambda_M(x) = \int_T f(t, \rho(t)) \sqrt{1 + |(\nabla\rho)(t)|^2}\, d\lambda^{d-1}(t)}$$

15.4. Satz von Gauß

Mehrdim. Analogon des HDI (& part. Integration)

Zur Vorbereitung ein lokaler Spezialfall

15.25. Lemma Sei $\mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ offen, $I =]\alpha, \beta[$ Intervall, und $\rho \in C^1(\mathcal{U}'; I)$. Sei

$$A := \{ (x', x_d) \in \mathcal{U}' \times \mathbb{R} : x_d \le \rho(x') \}.$$

$$M := \{ (x', x_d) \in \mathcal{U}' \times I : x_d = \rho(x') \}$$

und $f \in C_c(\mathcal{U}' \times \mathbb{R})$. Dann gilt, $\forall k = 1, \dots, d$,

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_k}(x)\, d\lambda^d(x) = \int_M f(x)\, \nu_k(x)\, d\lambda_M(x),$$

wobei

$$\underset{(x', x_d)}{\nu(x)} = \underbrace{\left[1 + |(\nabla\rho)(x')|^2\right]^{-1/2}}_{\in \mathbb{R}} \cdot \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -(\nabla\rho)(x')^T \\ \text{---------} \\ 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} d-1 \\ --- \\ 1 \end{array}$$

($\nu(x) \in \mathbb{R}^d$) der äußere Normalen-Einheitsvektor in $x \in M$ ist (vgl. Satz 15.16 mit $\varphi(x) = x_d - \rho(x')$ für Interpretation von ν).

Beweis: Nach Bsp. 15.21: globale Karte $\begin{array}{l} U' \to \mathbb{R}^d \\ x' \mapsto \begin{pmatrix} x' \\ \rho(x') \end{pmatrix} \end{array}$

der $(d-1)$-dim. C^1-Mfkt. M

mit $g(x') = 1 + |(\nabla\rho)(x')|^2 \quad \forall x' \in \mathcal{U}'$

$\overset{\text{Bsp. 15.24(a)}}{\Longrightarrow}$

$$\int_M f(x)\, \nu(x)\, d\lambda_M(x) = \int_{U'} f(x', \rho(x'))\, \nu(x', \rho(x'))\, \sqrt{g(x')}\, d\lambda^{d-1}(x')$$

(*)

$$= \int_{U'} f(x', \rho(x')) \begin{pmatrix} -(\nabla\rho)(x')^T \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda^{d-1}(x')$$

(Komponentenweise).

Andererseits gilt im Fall

$k=d$: $\displaystyle\int_A \frac{\partial f}{\partial x_d}(x)\, d\lambda^d(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{U'} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\rho(x')} \frac{\partial f}{\partial x_d}(x', x_d)\, dx_d \right)}_{f(x',\rho(x')) - \underbrace{\lim_{\xi \to -\infty} f(x',\xi)}_{=0 \,:\, \operatorname{supp} f \text{ kpt.}}} d\lambda^{d-1}(x')$

mit $(*)$ $\Rightarrow$ Beh. ✓

$1 \leq k \leq d-1$:

$$\int_A \frac{\partial f}{\partial x_k}\, d\lambda^d(x) \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{U'} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\rho(x')} \frac{\partial f}{\partial x_k'}(x', x_d)\, dx_d \right)}_{\text{Kettenregel + Satz 12.48(b)}} d\lambda^{d-1}(x')$$

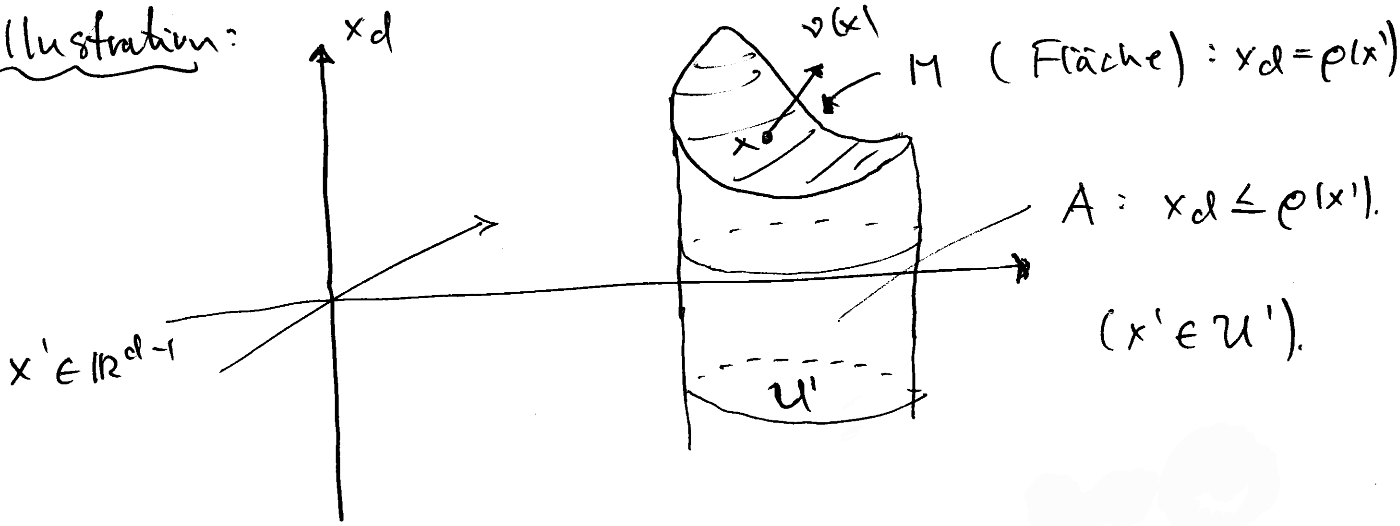
$$\Bigg(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k'} \int_{-\infty}^{\rho(x')} f(x', x_d)\, dx_d}_{=:\, F(x')} \Bigg) - f(x', \rho(x')) \frac{\partial \rho}{\partial x_k'}(x')$$

$$= I + \int_{U'} f(x', \rho(x')) \left(-\frac{\partial \rho}{\partial x_k'} \right)(x')\, d\lambda^{d-1}(x')$$

Es gilt $I = 0$, da $\operatorname{supp} F$ kpt in U' & Tut. Blatt 10, Auf. 2

$\Rightarrow$ Beh. mit $(*)$. ∎

Illustration:



Nun die globale Version:

15.26. Integralsatz von Gauß (auch: Divergenzsatz oder Satz von Ostrogradski)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $F \in C^1(A;\mathbb{R}^d)$ stetig diff.bares Vektorfeld, und $K \subseteq A$ Kompaktum mit C^1-Rand. Dann gilt:

$$\int_K \underbrace{(\nabla \cdot F)}_{\text{Divergenz von } F}(x)\, d\lambda^d(x) = \int_{\partial K} F(x) \cdot \underbrace{\nu(x)}_{\text{äußeres Einheits-Normalenfeld}}\, d\lambda_{\partial K}(x)$$

15.27. Bemerkung: Satz gilt auch, wenn ∂K nur glatt bis auf eine $(d-1)$-dim Nullmenge; Beispiel: Würfel! (siehe z.B. Kaballo, "Einführung in die Analysis III").

Beweisstrategie: Durch Zusammensetzen des lokalen Resultats (in Lem. 15.25) mittels Teilung der Eins (siehe 13.18 & 13.19)

Noch ein technischer Hilfssatz:

15.28. Lemma (Lebesgue) Sei M metrischer Raum und $J \neq \emptyset$ eine Indexmenge. Sei $K \subseteq M$ kompakt und $\{U_j\}_{j \in J}$ offene Überdeckung von K.

Dann existiert $l > 0$ (Lebesgue-Zahl):

$$\forall A \subseteq M \text{ mit } A \cap K \neq \emptyset \text{ und } \operatorname{diam}(A) \leq l$$
$$\exists j \in J: A \subseteq U_j.$$

<u>Beweis (15.28)</u> $\forall x \in K \ \exists r_x > 0 \ \& \ j_x \in J : B_{r_x}(x) \subseteq \mathcal{U}_{j_x}$

$\Rightarrow \{ B_{\frac{r_x}{2}}(x) \}_{x \in K}$ ist offene Überdeckung von K

$\overset{K \text{ kpt.}}{\Rightarrow} \exists N \in \mathbb{N}$ und $x_1, \dots, x_N \in K : \quad K \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} B_{\frac{r_{x_n}}{2}}(x_n)$

Setze $\ell := \min \left\{ \frac{r_{x_1}}{2}, \dots, \frac{r_{x_N}}{2} \right\}$

Sei nun $A \cap K \neq \emptyset$, $\operatorname{diam}(A) \leq \ell$ und $a \in A \cap K$

$\Rightarrow \exists n := n_a \in \{1, \dots, N\} : \quad a \in B_{\frac{r_{x_n}}{2}}(x_n)$

$\overset{\operatorname{diam}(A) \leq \ell}{\Rightarrow} \quad A \subseteq B_{r_{x_n}}(x_n) \subseteq \mathcal{U}_{j_{x_n}}$ ∎

<u>Beweis von Satz 15.26:</u>

1) Sei $a \in \partial K$

von a abh.

$\overset{K\ C^1\text{-Rand}}{\Rightarrow} \exists$ (in $\mathbb{R}^d$) offene Umgeb. $\mathcal{U}$ von a und $\exists \psi \in C^1(\mathcal{U})$:

(a) $(\nabla \psi)(x) \neq 0 \quad \forall x \in \mathcal{U}$

(b) $\partial K \cap \mathcal{U} = \{ x \in \mathcal{U} : \psi(x) = 0 \}$

(c) $K \cap \mathcal{U} = \{ x \in \mathcal{U} : \psi(x) \leq 0 \}$

(a) $\Rightarrow \exists \underset{j_a}{\underset{\parallel}{j}} \in \{1, \dots, d\} : \quad (\partial_j \psi)(a) \neq 0$

j'te Komponente fehlt.

Für $x \in \mathcal{U}$ sei $\mathbb{R}^{d-1} \ni x' := (\dots x_{j-1}, x_{j+1}, \dots)$

Sei $G(x', x_j) := \psi(x)$; u.V. $\exists \delta > 0$:

$$\underbrace{B^{(d-1)}_{\frac{\delta}{2}}(a')}_{=: \mathcal{U}' \subseteq \mathbb{R}^{d-1}} \times \underbrace{B^{(1)}_{\frac{\delta}{2}}(a_j)}_{=: I \subseteq \mathbb{R}} \subseteq B^{(d)}_{\delta}(a) \subseteq \mathcal{U}$$

(Dreiecksungl.)

$\Rightarrow G \in C^1(\mathcal{U}' \times I)$ mit $\frac{\partial G}{\partial x_j}(a', a_j) = \frac{\partial \psi}{\partial x_j}(a) \neq 0$

und $\partial K \cap (\mathcal{U}' \times I) = \{ (x', x_j) \in \mathcal{U}' \times I : G(x', x_j) = 0 \}$

Satz 9.4 $\Rightarrow$ (Impl. Fkt'en)

$\exists\, \mathcal{U}_0' \subseteq \mathcal{U}'$ off. Umg. von a'

$\exists\, I_0 \subseteq I$ " " " a_j

$\exists\, \rho \in C^1(\mathcal{U}_0'; I_0)$ mit

$$\partial K \cap (\mathcal{U}_0' \times I_0) = \{ (x', x_j) \in \mathcal{U}_0' \times I_0 : \rho(x') = x_j \}$$

Da $K \cap \mathcal{U} = \{ (x', x_j) \in \mathcal{U} : G(x', x_j) \leq 0 \}$

(für $\mathcal{U}_0'$, I_0 genü. klein) $\Rightarrow$ $K \cap (\mathcal{U}_0' \times I_0) = \{ (x', x_j) \in \mathcal{U}_0' \times I_0 : x_j \leq \rho(x') \}$.

<u>Moral</u>: K wird <u>lokal</u> um $a \in \partial K$ wie in Lemma 15.25 beschrieben (modulo $j \Leftrightarrow d$).

Setze $\mathcal{U}_a := \mathcal{U}_0' \times I_0$

2) Für $r > 0$, sei $V_r := \{ x \in K : \operatorname{dist}(x, \partial K) > r \} \Rightarrow V_r \subseteq \mathring{K}$ offen ($x \mapsto \operatorname{dist}(x, \partial K)$ Lipschitz)

Da (!) $\mathring{K} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{\frac{1}{n}}$ und K kpt.

$\Rightarrow \exists\, r_0 > 0$: $K \subseteq \left(\bigcup_{a \in \partial K} \mathcal{U}_a \right) \cup V_{r_0}$. Sei ℓ die zugeh. Lebesgue-Zahl (Lemma 15.28)

Setze $\varepsilon := \frac{\ell}{2\sqrt{d}} > 0$, sei $\{ \gamma_{p,\varepsilon} \}_{p \in \mathbb{Z}^d}$ C^∞-Teilung der Eins (siehe 13.18 & 13.19) $\Rightarrow$ $\operatorname{diam} \underbrace{\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon}}_{\in \text{ Würfel mit Kantenlänge } 2\varepsilon} \leq \ell$

Sei $P_K := \{ p \in \mathbb{Z}^d : \operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \cap K \neq \emptyset \}$

$\Rightarrow P_K$ endlich (da K beschränkt)

Lem. 15.28

$\Rightarrow$ $\forall p \in P_K$ gilt <u>entweder</u>: $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \subseteq V_{r_0}$

<u>oder</u>: $\exists a \in \partial K$: $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \subseteq \mathcal{U}_a$

Da $F(x) = \sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\varepsilon}(x) F(x)$ $\forall x \in K$ $\left(\sum_{p \in \mathbb{Z}^d} \gamma_{p,\varepsilon} = 1 \;\; ! \right)$

$$\Rightarrow \int_K (\nabla \cdot F)(x) \, d\lambda^d(x) = \sum_{p \in P_K} \int_K (\nabla \cdot (\gamma_{p,\varepsilon} F))(x) \, d\lambda^d(x)$$

$$\int_{\partial K} F(x) \cdot \nu(x) \, d\lambda_{\partial K}(x) = \sum_{p \in P_K} \int_{\partial K} (\gamma_{p,\varepsilon}(x) F(x)) \cdot \nu(x) \, d\lambda_{\partial K}(x)$$

<u>Moral</u>: es genügt Satz für C^1-Vektorfeld $\gamma_{p,\varepsilon} F$ zu zeigen

3) Sei $k \in \{1, \dots, d\}$, $p \in P_K$, $f_k := \gamma_{p,\varepsilon} F_k$ $(F = (F_1, \dots, F_d))$

<u>1. Fall</u>: $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \subseteq V_{r_0} \Rightarrow \int_{\partial K} f_k(x) \nu_k(x) \, d\lambda_{\partial K}(x) = 0$

da $\partial K \cap V_{r_0} = \emptyset$

Andererseits: $\displaystyle\int_K \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x) \, d\lambda^d(x) = 0$

Tut. 10, Aufg. 2 (ii)

da $\operatorname{supp} f_k \cap \partial K \subseteq V_{r_0} \cap \partial K = \emptyset$

(supp f_k kompakt in K enthalten)

$\Rightarrow$ Satz gilt für $\gamma_{p,\varepsilon} F$ ✓

<u>2. Fall</u>: $\operatorname{supp} \gamma_{p,\varepsilon} \subseteq \mathcal{U}_a$

Nach 1) folgt aus Lemma 15.25:

$$\int_K \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)\, d\lambda^d(x) = \int_{K\cap U_a} \frac{\partial f_k}{\partial x_k}(x)\, d\lambda^d(x)$$

$$= \int_{\partial K\cap U_a} f_k(x)\nu_k(x)\, d\lambda_{\partial K\cap U_a}(x) = \int_{\partial K} f_k(x)\nu_k(x)\, d\lambda_{\partial K}(x)$$

$\overset{\sum_{k=1}^d}{\Longrightarrow}$ Beh. $\boxtimes$

15.29. Beispiel (a) $K\subseteq\mathbb{R}^d$ Kompaktum mit C^1-Rand,

$F:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d$, $F(x):=x$; $F\in C^\infty(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d)$,

$\Rightarrow$ $(\nabla\cdot F)(x) = d$ $\forall x\in\mathbb{R}^d$, also $\int_K (\nabla\cdot F)(x)\, d\lambda^d(x) = d\,\lambda^d(K)$

Satz von Gauß $\Rightarrow$

$$\underline{\lambda^d(K) = \frac{1}{d}\int_{\partial K} x\cdot\nu(x)\, d\lambda_{\partial K}(x)}$$

(b) Beispiel: $K = \overline{B_1(0)} = \{x\in\mathbb{R}^d : |x|\le 1\}$, $d\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$

$\Rightarrow$ $\partial K = S^{d-1} = \{x\in\mathbb{R}^d : |x|=1\}$.

$$d\,\lambda^d(B_1(0)) = \int_{S^{d-1}} \underbrace{\underset{x}{F(x)}\cdot\underset{x\ (\text{Bsp. } 15.17)}{\nu(x)}}_{=x^2=1}\, d\lambda_{S^{d-1}}(x) = \lambda_{S^{d-1}}(S^{d-1})$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\lambda_{S^{d-1}}(S^{d-1})} = d\cdot\lambda^d(B_1(0)) = \underline{\frac{d\,\pi^{d/2}}{\Gamma(\frac{d}{2}+1)}} \quad (= d\,\omega_d)$$

$\uparrow$ Üb. 10, Aufg. 2 (ii).

("Oberfläche der Einheitsphäre in $\mathbb{R}^d$ = $d\times$ Volumen der Einheitskugel in $\mathbb{R}^d$")

spezielle Werte: für $d=2,3$:

$$\underline{\lambda_{S^1}(S^1) = 2\pi}$$
$$\underline{\lambda_{S^2}(S^2) = 4\pi}$$

15.30. Korollar (Green-Formeln, Greensche Formeln).

Sei $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen, $K \subseteq A$ d-dim. Kompaktum mit C^1-Rand, und $f, g \in C^2(A)$. Dann gilt

(1) Erste Greensche Formel / Identität:

$$\int_K (\nabla f)(x) \cdot (\nabla g)(x) \, d\lambda^d(x) = \int_{\partial K} f(x) \, \nu(x) \cdot (\nabla g)(x) \, d\lambda_{\partial K}(x) - \int_K f(x) \, (\Delta g)(x) \, d\lambda^d(x)$$

Man nennt $(\partial_\nu g)(x) := \nu(x) \cdot (\nabla g)(x)$ äußere Normalenableitung von g

(2) Zweite Greensche Formel / Identität:

$$\int_K \left[f(x)(\Delta g)(x) - (\Delta f)(x) g(x) \right] d\lambda^d(x) = \int_{\partial K} \left[f(x)(\partial_\nu g)(x) - g(x)(\partial_\nu f)(x) \right] d\lambda_{\partial K}(x)$$

Beweis: (1): Satz von Gauß mit $F = f \nabla g$

(2): aus Differenz von (1) & (1) mit $f \leftrightarrow g$ ∎

15.31. Korollar (Satz von Green)

Sei $A \underset{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^2$ ($d = 2$), $K \subseteq A$ 2-dim Kompaktum mit C^1-Rand, und $F = \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \in C^1(A; \mathbb{R}^2)$ C^1-Vektorfeld.

Dann gilt

$$\int_K \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F_2(x) - \frac{\partial}{\partial x_2} F_1(x) \right) d\lambda^2(x) = \int_{\partial K} F(x) \cdot \tau(x) \, d\lambda_{\partial K}(x)$$

wobei $\tau = \begin{pmatrix} -\nu_2 \\ \nu_1 \end{pmatrix}$ der Einheitstangentialvektor von ∂K ist

(ν Einheitsnormalenvektor)

<u>Beweis</u>: Nach 1. Greensche Formel:

$$\int_K \nabla f \cdot \nabla g \, d\lambda^d = \int_{\partial K} f \, \nu \cdot \nabla g \, d\lambda_{\partial K} - \int_K f \Delta g \, d\lambda^d,$$

also mit $f := F_2$, $g(x) := x_1$: $\displaystyle\int_K \begin{pmatrix} \partial_1 F_2 \\ \partial_2 F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda^2 = \int_{\partial K} F_2 \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda_{\partial K}$

mit $f := F_1$, $g(x) = x_2$: $\displaystyle\int_K \begin{pmatrix} \partial_1 F_1 \\ \partial_2 F_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda^2 = \int_{\partial K} F_1 \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} d\lambda_{\partial K}$

$$\overset{(1)-(2)}{\Rightarrow} \int_K (\partial_1 F_2 - \partial_2 F_1) \, d\lambda^2 = \int_{\partial K} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\nu_2 \\ \nu_1 \end{pmatrix} d\lambda_{\partial K} \Rightarrow \text{Beh} \quad \blacksquare$$

16. Kurvenintegrale und der Satz von Stokes

16.1. Kurvenintegrale

Generalvoraussetzung: $I \subseteq \mathbb{R}$ kompaktes Intervall
$\kappa : I \to \mathbb{R}^d$ C^1-Kurve mit
C^1-Kurvenbogen $\Gamma_\kappa =: \Gamma$

16.1. Definition

- Sei $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ $\mathcal{B}^d \cap \Gamma$-messbares Skalarfeld mit $(f \circ \kappa)|\kappa'| \in L^1(I)$

  Kurvenintegral (für Skalarfeld)

  $$\int_\kappa f(x)\, dx := \int_I f(\kappa(t))\, |\kappa'(t)|\, dt$$

- Sei $A : \Gamma \to \mathbb{R}^d$ $\mathcal{B}^d \cap \Gamma$ messbares Vektorfeld mit $(A \circ \kappa) \cdot \kappa' \in L^1(I)$

  Kurvenintegral (für Vektorfelder)

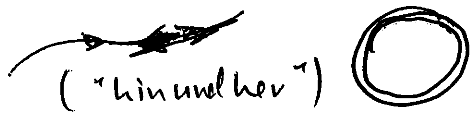
  $$\int_\kappa A(x) \cdot dx := \int_I A(\kappa(t)) \cdot \kappa'(t)\, dt$$

- C^1-Kurve κ geschlossen $:\Leftrightarrow$ $\kappa(\min I) = \kappa(\max I)$

  In diesem Fall auch übliche Notation:

  $$\oint_\kappa f(x)\, dx \quad , \quad \oint_\kappa A(x) \cdot dx$$

16.2. Bemerkung: (a) κ nicht injektiv $\Rightarrow$ (Teile von) Γ u.U. mehrfach durchlaufen:



("hin und her")

(b) Falls $\kappa(I) = \Gamma$ 1-dim C^1-Mfkt und $\exists$ Nullmenge $N \subseteq \mathbb{R}$ mit $\kappa : I \setminus N \to \Gamma$ Karte

$$\Rightarrow \int_\kappa f(x)\, dx = \int_\Gamma f(x)\, dx \quad \text{(nach 15.22)}$$

[Bsp.: $\Gamma = S^1$, $\quad \varkappa : [0, 2\pi] \to S^1$
$$t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$$
]

$\boxed{\text{Von nun an gelte}}$: Alle Kurven, bis auf eine Nullmenge, injektiv!

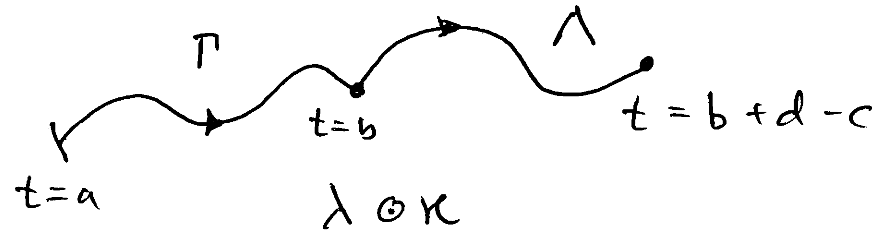
$\boxed{\text{16.3. Definition}}$ • für $\varkappa : [a,b] \to \Gamma$ C^1-Kurve

sei $\varkappa^- : [a,b] \to \Gamma$ $\quad$ (C^1-Kurve)
$\quad t \mapsto \varkappa(b+a-t)$ $\quad$ ($\varkappa$ rückwärts durchlaufen)

• Sei $\lambda : [c,d] \to \mathbb{R}^d$ C^1-Kurve mit C^1-Kurvenbogen Λ
mit $\varkappa(b) = \lambda(c)$

$$\lambda \odot \varkappa : [a, b+(d-c)] \to \Gamma \cup \Lambda$$
$$t \mapsto \begin{cases} \varkappa(t), & t \in [a,b] \\ \lambda(t-b+c), & t \in]b, b+d-c] \end{cases}$$

Aneinander-Kettung von $\varkappa$ und λ



• $\varkappa$ stückweise C^1-Kurve $:\Leftrightarrow$
$\exists n \in \mathbb{N}$ und $\varkappa_1, \dots, \varkappa_n$ C^1-Kurven mit
$$\varkappa = \varkappa_n \odot \dots \odot \varkappa_1$$

• seien $\varkappa, \lambda$ C^1-Kurven wie oben und $f : \Gamma \cup \Lambda \to \mathbb{R}$ messbar

Setze
$$\int_{\lambda \odot \varkappa} f(x)\,dx := \int_\lambda f(x)\,dx + \int_\varkappa f(x)\,dx$$

falls beide Integrale auf rechter Seite existieren
- analog für Vektorfelder (siehe 16.1)
- falls $\lambda \odot \varkappa$ sogar C^1-Kurve, dann im Einklang mit Def. 16.1.

16.4 Lemma Sei $\kappa : I \to \Gamma$ eine stückweise C^1-Kurve. Sei $\tilde{I} \subseteq \mathbb{R}$ kpt.'es Intervall, sei $\varphi : I \to \tilde{I}$ ein Homöomorphis., der auf $\mathring{I}$ & $\mathring{\tilde{I}}$ (Innern) ein Diffeom. ist.
Dann ist $\tilde{\kappa} := \kappa \circ \varphi^{-1}$ stückweise C^1-Kurve mit $\tilde{\Gamma} = \Gamma$ und für alle messbaren Skalarfelder $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ und alle messbaren Vektorfelder $A : \Gamma \to \mathbb{R}^d$ gilt

$$\int_\kappa f(x)\,dx = \int_{\tilde{\kappa}} f(x)\,dx \quad \text{(falls eine Seite exist.)}$$

$$\int_\kappa A(x) \cdot dx = \sigma \int_{\tilde{\kappa}} A(x) \cdot dx \quad \text{(falls eine Seite exist.)}$$

wobei $\sigma := \operatorname{sgn} \varphi'(t)$ (unabh. von $t \in \mathring{I}$)

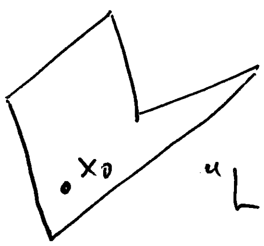
Insbesondere:
$$\int_\kappa A(x) \cdot dx = - \int_{\kappa^-} A(x) \cdot dx$$
(abhängig von Richtung, in der Γ durchlaufen)

Beweis: • benutze $\kappa'(t) = \tilde{\kappa}'(\varphi(t))\,\varphi'(t) \quad \forall t \in \mathring{I}$
& Substitutionsformel, falls κ C^1-Kurve
• im allg. Fall, zerlege zuerst in C^1-Kurven κ_ν, $\nu = 1, \dots, n$ $\blacksquare$

16.5. Definition Sei $B \subseteq \mathbb{R}^d$

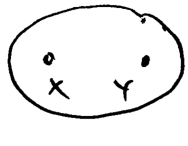
B sternförmig (bzgl. $x_0 \in \mathbb{R}^d$) $:\Leftrightarrow \begin{cases} \exists x_0 \in B : \forall x \in B \text{ gilt} \\ \{x_0 + \tau(x - x_0) : \tau \in [0,1]\} \subseteq B \end{cases}$

Geradenstück von x_0 nach x



"Lehrer sieht alle"

($\Leftarrow$ "jeder sieht jeden": Konvex



)

16.6. Satz (über Gradientenfelder)

Für $B \subseteq \mathbb{R}^d$ offen und $A \in C^1(B;\mathbb{R}^d)$ Vektorfeld betrachte die Aussagen:

(i) $\forall$ geschlossenen stückweisen C^1-Kurve κ mit $\Gamma \subseteq B$ gilt

$$\oint_\kappa A(x)\cdot dx = 0$$

(ii) $\forall$ stückweisen C^1-Kurven κ und $\tilde{\kappa}$ mit $\Gamma \subseteq B$, $\tilde{\Gamma} \subseteq B$ und $\kappa\left(\substack{\max \\ \min} I\right) = \tilde{\kappa}\left(\substack{\max \\ \min} \tilde{I}\right)$ (gleiche Anfangs- und Endpunkt) gilt

$$\int_\kappa A(x)\cdot dx = \int_{\tilde{\kappa}} A(x)\cdot dx \qquad \text{Wegunabhängigkeit}$$

(iii) A ist ein Gradientenfeld (oder: konservativ), d.h. $\exists f \in C^2(B;\mathbb{R})$ mit $A = \nabla f$ (A besitzt Potential f)

(iv) Es gelten die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial A_j}{\partial x_k} = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \quad \forall j,k \in \{1,\dots,d\}$$

Dann gilt: $\quad$ (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv)

Falls B zusätzlich sternförmig, so gilt auch

(iv) $\Rightarrow$ (iii) [Lemma von Poincaré]

16.7. Bemerkung

(a) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) gilt auch, falls A nur $\in C(B;\mathbb{R}^d)$
In dem Fall ist dann $f \in C^1(B;\mathbb{R})$.

(b) (iv) bedeutet in $d=3$: $\nabla \times A = 0$, d.h. A wirbelfrei (s. 8.4)

(c) Die Vorauss. "B sternförmig" für (iv) $\Rightarrow$ (iii) kann abgeschwächt, aber nicht weggelassen werden!

Beweis von Satz 16.6: (i) $\Rightarrow$ (ii): da $\tilde{\kappa} - \oplus \kappa$ geschlossene stückweise C^1-Kurve (verwende Lem. 16.4). ✓

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Definiere Äquiv.rel. $\sim$ auf B: $\forall x,y \in B$ sei

$$x \sim y :\Leftrightarrow \exists \kappa : I \to B \text{ stückweise } C^1\text{-Kurve mit } \kappa(\min I) = x \;\&\; \kappa(\max I) = y$$

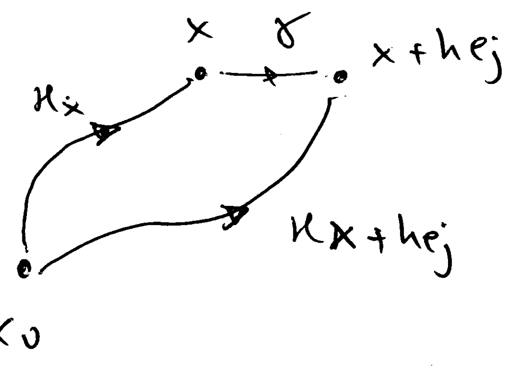
Äquiv.klassen $[x] := \{y \in B : y \sim x\}$ heißt die Wegzusammenhangskomponente von $x \in B$ (siehe dazu später) - es gilt $B = \dot{\bigcup}_{[x] \in B/\sim} [x]$

1. Schritt: B sei wegzusammenhängend, d.h. $\exists y \in B : B = [y]$
(d.h. $\forall x,y \in B$: $x \sim y$). (*)

Fixiere $x_0 \in B$, sei $x \in B$ bel. fest, und $h \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ klein, so $B_{|h|}(x) \subseteq B$ (B offen!).

Wähle κ_x, bzw. κ_{x+he_j} C^1-Kurve von x_0 nach x, bzw. $x+he_j$, $j \in \{1,\dots,d\}$
↑ j'ter Einheitsvektor

(möglich wegen (*))



Sei $\gamma: \begin{array}{l}[0,1] \to B \\ t \mapsto x + the_j\end{array}$

Setze $\quad f(x) := \int_{\mathcal{K}_x} A(y) \cdot dy \quad (x \in B)$

(wohldef: nur von x abh. (und fixe x_0), nicht aber von Wahl von $\mathcal{K}_x$ – per Annahme (ii) !).

$$\Rightarrow \frac{1}{h}\left[f(x+he_j) - f(x)\right] = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{h}\left[\int_{\mathcal{K}_{x+he_j}} A(y)\cdot dy - \int_{\mathcal{K}_x} A(y)\cdot dy\right]}_{\int_{\mathcal{K}_{x+he_j} \odot \mathcal{K}_x^-} A(y)\cdot dy}}_{\int_\gamma A(y)\cdot dy} \quad \text{n. V. (ii) (siehe Bild)}$$

$$\overset{\text{Def } \gamma \text{ \& Def 16.1}}{=} \int_0^1 \underbrace{A(x+the_j)\cdot e_j}_{A_j(x+the_j)}\, dt \overset{\text{Mittelwertsatz}}{=} A_j(x + \Theta_h e_j) \quad \text{mit } \Theta_h \in [0,h]$$

$$\xrightarrow{h \to 0} A_j(x), \quad \text{also } \nabla f = A.$$

Da $A \in C^1(B;\mathbb{R}^d)$ ist $f \in C^2(B;\mathbb{R})$.

2. Schritt: Falls B nicht wegzusammenhängend, zerlege in Wegzusammenhangskomponenten $B = \dot{\bigcup}_{[x] \in B\backslash\sim} [x]$ und definiere f separat auf allen $[x] := \{y \in B : y \sim x\} \in B/\sim$ wie in 1. Schritt (NB.: $[x]$ offen in $\mathbb{R}^d$, da $B_\varepsilon(y) \subseteq [x]$ $\forall y \in [x]$ und $\varepsilon > 0$ so klein, dass $B_\varepsilon(y) \subseteq B$). ✓

„(iii) ⇒ (i)" Sei $\kappa = \kappa_n \oplus \dots \oplus \kappa_1 : I \to B$ geschlossene stückweise C^1-Kurve, wobei $\kappa_\nu : I_\nu \to B$, $\nu = 1, \dots, n$, C^1-Kurven mit $\kappa_\nu(\max I_\nu) = \kappa_{\nu+1}(\min I_{\nu+1})$ für $\nu = 1, \dots, n-1$ und $\kappa_n(\max I_n) = \kappa_1(\min I_1)$

$$\Rightarrow \oint_\kappa (\nabla f)(x) \cdot dx \underset{\text{per Def.}}{=} \sum_{\nu=1}^{n} \int_{\kappa_\nu} (\nabla f)(x) \cdot dx$$

$$= \sum_{\nu=1}^{n} \int_{I_\nu} \underbrace{(\nabla f)(\kappa_\nu(t)) \cdot \kappa_\nu'(t)}_{\frac{d}{dt} f(\kappa_\nu(t))} dt = \sum_{\nu=1}^{n} \Big[f(\kappa_\nu(\max I_\nu)) - f(\kappa_\nu(\min I_\nu)) \Big]$$

$$= 0 \quad \checkmark$$

„(iii) ⇒ (iv)": Satz von Schwarz (Satz 8.8) über Vertauschbarkeit 2. partieller Ableitungen

„(iv) ⇒ (iii)": Sei B auch sternförmig; o.E. sei $x_0 = 0$ der zugeh. Punkt für die Verbindungsstrecken.

Für $x \in B$ setze

$$f(x) := \sum_{k=1}^{d} x_k \int_0^1 A_k(\underset{\substack{\in B \ \forall t \in [0,1] \\ \text{da sternf.}}}{tx})\, dt \Rightarrow \text{wohldef.!}$$

$A \in C^1(B; \mathbb{R}^d) \Rightarrow f \in C^1(B; \mathbb{R})$ mit Satz 12.48 (b) („Diff.barkeit von Param.-Int")

(exist. Majorante aus Beschränktheit 1. part. Abl. von A auf Kompakta (da stetig))

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \int_0^1 A_j(tx)\, dt + \sum_{k=1}^{d} x_k \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 A_k(tx)\, dt \, ;$$

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 A_k(tx)\, dt = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_j}\big[A_k(tx)\big] dt = \int_0^1 t \frac{\partial A_k}{\partial x_j}(tx)\, dt$$

Da $\dfrac{\partial A_k}{\partial x_j} = \dfrac{\partial A_j}{\partial x_k} \quad \forall j,k \in \{1,\dots,d\}$ u. V., folgt

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \underbrace{\int_0^1 \Big[A_j(tx) + t \underbrace{\sum_{k=1}^{d} x_k \frac{\partial A_j}{\partial x_k}(tx)}_{\frac{d}{dt}[A_j(tx)]}\Big]}_{\frac{d}{dt}(tA_j(tx))} dt = tA_j(tx)\Big|_0^1 = A_j(x) \quad ✓$$

Da $A \in C^1(B;\mathbb{R}^d) \Rightarrow f \in C^2(B;\mathbb{R})$ ✓ ☒

16.8 Bemerkung: Zur "Wegzusammenhangskomponente (von $x \in B$)":

Man kann zeigen (!): Für $B \subseteq \mathbb{R}^d$ offen gilt:

$x \sim y :\Leftrightarrow \exists$ stückweise C^1-Kurve von x nach y

$\overset{!}{\Leftrightarrow} \exists\, C^0$-Kurve von x nach y

("$\Rightarrow$" trivial). ↑ "Weg"

16.2. Orientierte Hyperflächen mit Rand

16.9. Definition Sei M n-dim. C^1-Mfkt. in $\mathbb{R}^d$

- Seien $\varphi, \tilde{\varphi}$ zwei überlappende Karten von M, d.h. $V := \varphi(T) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{T}) \neq \emptyset$. Sei $W := \varphi^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$, $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(V) \subseteq \mathbb{R}^n$ und $\psi : W \to \tilde{W}$ Diffeom., so dass $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$ (exist. nach Satz 15.6(b))

$$\varphi, \tilde{\varphi} \left\{ \begin{array}{c} \text{gleich} \\ \text{gegensätzlich} \end{array} \right\} \text{orientiert} :\Leftrightarrow \det(D\psi)(t) \left\{ \begin{array}{c} > \\ < \end{array} \right\} 0 \quad \forall t \in W$$

- $\mathcal{A}$ orientierter Atlas von M $:\Leftrightarrow$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{je 2 überlappende} \\ \text{Karten von } \mathcal{A} \text{ sind} \\ \text{gleich orientiert} \end{array} \right.$

- $\left. \begin{array}{l} \text{zwei orientierte Atlanten} \\ \mathcal{A} \text{ \& } \mathcal{A}' \text{ von } M \text{ sind} \\ \text{gleichorientiert} \end{array} \right\} :\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{A} \cup \mathcal{A}' \text{ ist} \\ \text{orientiertes Atlas} \end{array} \right.$

- M ist orientierbar $:\Leftrightarrow \mathcal{O} := \left\{ \begin{array}{c} \text{Mengen der orientierten} \\ \text{Atlanten von } M \end{array} \right\} \neq \emptyset$

"Gleichorientierung" def. Äquiv. relation $\sim$ auf $\mathcal{O}$ (wenn M orientierbar)

$\sigma \in \mathcal{O}/_\sim$ heißt Orientierung von M

(M, σ) : orientierte Mfkt

16.10. Beispiel $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ orientierbare Mfkt. im $\mathbb{R}^2$

orientiertes Atlas $\mathcal{A} = \{\varphi, \tilde\varphi\}$,

$$\varphi : \begin{array}{l}]0,2\pi[\to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array}, \quad \tilde\varphi : \begin{array}{l}]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 \\ \tilde t \mapsto \begin{pmatrix} \cos \tilde t \\ \sin \tilde t \end{pmatrix} \end{array}$$

$\psi :]0,2\pi[\to]-\pi,\pi[; \; t \mapsto \psi(t) := t - \pi \Rightarrow \psi'(t) = 1 > 0 \; \forall t$

Außerdem: $\tilde\varphi_- : \begin{array}{l}]-\pi,\pi[\to \mathbb{R}^2 \\ \tilde t \mapsto \begin{pmatrix} \cos \tilde t \\ -\sin \tilde t \end{pmatrix} \end{array}$ gegensätzlich orientiert zu $\tilde\varphi$, als auch φ
($\psi(t) = -t$, bzw. $\psi(t) = \pi - t$)

Hier: $\operatorname{card}(\mathcal{O}/_\sim) = 2$ - es gibt 2 Orientierungen von S^1
(Falls > 2 Orientierungen existieren $\Rightarrow$ M nicht zusammenhängend).

$\boxed{\text{16.11. Definition}}$ (Orientierung von Tangentialräumen).

(a) Basis $\{v_1, .., v_n\}$ von $\mathbb{R}^n$ positiv (bzw. negativ) orientiert (bzgl. kanon. Basis $\{e_1, .., e_n\}$) $:\Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix} > 0$ (bzw. < 0)

(b) Sei (M, σ) orient. Mfkt., $a \in M$, $\{\tau_1, .., \tau_n\}$ Basis von T_aM, und φ zu σ gleichorientierte Karte von M (d.h. für $\mathcal{A} \in \sigma$ gilt: $\mathcal{A} \cup \{\varphi\}$ orient. Atlas von M), mit $a \in \varphi(T)$

$\{\tau_1, .., \tau_n\}$ pos. orientiert (bzgl. σ) $:\Leftrightarrow$ $\exists$ pos. orient. Basis $\{v_1, .., v_n\}$ in $\mathbb{R}^n$: $\tau_j = (D\varphi)(\varphi^{-1}(a))\, v_j$ für $j = 1, .., n$

Insbesondere: $\left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(\varphi^{-1}(a)), \dots, \frac{\partial \varphi}{\partial t_n}(\varphi^{-1}(a)) \right\}$ ist pos. orient. Basis von $T_a M$ (wähle $v_j = e_j$)

16.12. Lemma Def. 16.11 (b) ist unabh. von Wahl der gleichorientierten Karte φ mit $\varphi(T) \ni a$.

Beweis: Sei $\tilde{\varphi}$ eine weitere solche Karte mit $\tilde{\varphi}(\tilde{T}) \ni a$.

$\Rightarrow \varphi = \tilde{\varphi} \circ \psi$ mit $\det(D\psi)(t) > 0 \;\; \forall t \in W$

(siehe Def. 16.9). Setze $\tilde{v}_j := (D\psi)(\varphi^{-1}(a)) v_j$, $j = 1, \dots, n$

$$\Rightarrow \tau_j = (D(\underbrace{\tilde{\varphi} \circ \psi}_{\varphi}))(\varphi^{-1}(a)) v_j = (D\tilde{\varphi})(\underbrace{\psi \circ \varphi^{-1}(a)}_{\tilde{\varphi}^{-1}(a)}) \underbrace{(D\psi)(\varphi^{-1}(a)) v_j}_{\tilde{v}_j}$$

$$= (D\tilde{\varphi})(\tilde{\varphi}^{-1}(a)) \tilde{v}_j$$

und $\det \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{\underbrace{(D\psi)(\varphi^{-1}(a))}_{\det > 0} \underbrace{\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}}_{\det > 0}} > 0$ – also $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_n\}$ pos. orient. Basis von $\mathbb{R}^n$

$\blacksquare$

16.13. Definition Sei $d \geq 2$.

(a) $M \subseteq \mathbb{R}^d$ *Hyperfläche* $:\Leftrightarrow$ M $(d-1)$-dim. C^1-Mfkt. in $\mathbb{R}^d$

[Nach Satz 15.8: M (lokal) beschrieben als Lösungsmenge einer Gleichung; es gilt

$\dim N_a M = 1$ (Satz 15.11 (b))]

(b) ν ist Einheitsnormalenfeld (von Hyperfläche M) $\Bigg\} :\Longleftrightarrow \begin{cases} \nu : M \to \mathbb{R}^d \\ M \ni a \mapsto \nu(a) \in \left\{ \dfrac{\pm(\nabla f)(a)}{|(\nabla f)(a)|} \right\} \\ \text{(lokal; mit } f \text{ eine Funktion,} \\ \text{deren Nullstellenmenge } M \text{ ist)} \end{cases}$

(c) Sei (M, σ) orientierte Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$ mit Einheitsnormalenfeld ν:

ν positiv orientiert bzgl. σ $\Bigg\} :\Longleftrightarrow \begin{cases} \forall a \in M\ \exists \text{ eine bzgl. } \sigma \text{ pos. orient.} \\ \text{Basis } \{\tau_1^{(a)}, \dots, \tau_{d-1}^{(a)}\} \text{ von } T_a M, \\ \text{so dass } \{\nu(a), \tau_1^{(a)}, \dots, \tau_{d-1}^{(a)}\} \\ \text{eine pos. orient. Basis in } \mathbb{R}^d \text{ ist.} \end{cases}$

16.14. Lemma Def. 16.13(c) ist unabh. von Wahl der bzgl. σ pos. orient. Basis $\{\tau_1^{(a)}, \dots, \tau_{d-1}^{(a)}\}$ von $T_a M$

Beweis: Sei $\{\tilde{\tau}_1^{(a)}, \dots, \tilde{\tau}_{d-1}^{(a)}\}$ eine weitere solche Basis (bzgl. σ pos. orient. Basis von $T_a M$)

$\Rightarrow (*)\ \tau_j^{(a)} = (D\varphi)(\varphi^{-1}(a))\, v_j\ ,\quad \tilde{\tau}_j^{(a)} = (D\varphi)(\varphi^{-1}(a))\, \tilde{v}_j\ ,\ j = 1, \dots, d-1,$

mit $\{v_1, \dots, v_{d-1}\}, \{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_{d-1}\}$ je eine pos. orient. Basis $\mathbb{R}^{d-1}$

$\Rightarrow \exists\, A \in \mathrm{Mat}((d-1)\times(d-1); \mathbb{R}) : \ \tilde{v}_j = A v_j,\ j = 1, \dots, d-1$ (Basiswechsel)

Da
$$0 < \det\begin{pmatrix} | & & | \\ \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix} = \det(A) \underbrace{\det\begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix}}_{>0}$$

$\Rightarrow \quad \det(A) > 0.$

In basis $\{\nu(a), \tau_1^{(a)}, \dots, \tau_{d-1}^{(a)}\}$ von $\mathbb{R}^d$ $(= N_a M \oplus T_a M,$ $N_a M \perp T_a M)$

hat $(D\varphi)(\varphi^{-1}(a))$ Matrixdarstellung:

$$(**) \quad (D\varphi)(\varphi^{-1}(a)) = \begin{pmatrix} 0 \cdots 0 \\ \hline F \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(d \times (d-1), \mathbb{R})$$

mit $F \in \mathrm{Mat}((d-1)\times(d-1); \mathbb{R})$. In gleicher Basis:

$$\det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \nu(a) & \tilde{\tau}_1^{(a)} & \cdots & \tilde{\tau}_{d-1}^{(a)} \\ | & | & & | \end{pmatrix} \underset{\substack{\text{wegen } (*) \\ \& (**)}}{=} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \\ 0 & \\ \vdots & F\begin{pmatrix} | & & | \\ \tilde{v}_1 & \cdots & \tilde{v}_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$= \det \left(F A \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix} \right) = \underbrace{\det\left(F \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_{d-1} \\ | & & | \end{pmatrix}\right)}_{\det \begin{pmatrix} | & | & & | \\ \nu(a) & \tau_1^{(a)} & \cdots & \tau_{d-1}^{(a)} \\ | & | & & | \end{pmatrix} > 0} \cdot \underbrace{\det A}_{>0} > 0$$

$\square$

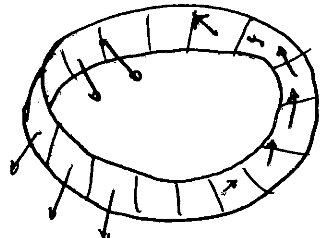
16.15. Satz Sei $d \geq 2$ und (M, σ) eine orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^d$. Dann $\exists!$ Einheits-Normalenfeld $\nu : M \to \mathbb{R}^d$ mit <u>pos.</u> Orient. bzgl. σ. Zudem ist ν stetig

---

<u>16.16. Bemerkung</u>: Es gilt auch die Umkehrung von Satz 16.15: $\exists$ stetiges Einheitsnormalenfeld für Hyperfläche $M \Rightarrow M$ orientierbar.

Man kann also dies als <u>Def.</u> der Orientierbarkeit von <u>Hyperflächen</u> verwenden!

<u>16.17. Beispiel</u>: Möbius-Band M



M

ist Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$, aber <u>nicht</u> orientierbar, da $\nexists$ stetiges Einheitsnormalenfeld (siehe Forster Bsp. 20.6 p. 274 (8. Auflage))

<u>Beweis Satz 16.15</u>: • <u>Existenz</u>: aus Def. 16.13 klar.

• <u>Eindeutigkeit</u>: Sei $a \in M$ und $\{\tau_1, \dots, \tau_{d-1}\}$ pos. orient. Basis von $T_a M$ bzgl. σ.

Sei $\xi \in \{\pm 1\} \Rightarrow \det\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \xi(\nabla f)(a) & \tau_1 & \dots & \tau_{d-1} \\ | & | & & | \end{pmatrix} > 0$

für entweder $\xi = +1$ oder $\xi = -1$

• <u>Stetigkeit</u>: Sei $a \in M$, $\mathcal{U} \ni a$ offene Umgebung im $\mathbb{R}^d$ und $f \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ mit $V := M \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} : f(x) = 0\}$ (NB: ex. nach Satz 15.8); zudem $(\nabla f)(a) \neq 0$

$\Rightarrow (\nabla f)(x) \neq 0 \ \forall x \in V$, falls $\mathcal{U}$ hinreichend klein, da $f \in C^1$.

Setze $\tilde{\nu}(x) := \dfrac{(\nabla f)(x)}{|(\nabla f)(x)|}$, $x \in V \Rightarrow V \ni x \mapsto \tilde{\nu}(x)$ <u>stetig</u>!

Sei $\nu : M \to \mathbb{R}^d$ das eindeutige Einheitsnormalenfeld (mit pos. Orient. bzgl. σ)

o.E. gelte $\tilde{\nu}(a) = \nu(a)$ [sonst $f \to -f$]

Sei $\varphi : T \to V$ Karte von M

$$\Rightarrow T \ni t \mapsto h(t) := \det\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \tilde{\nu}(\varphi(t)) & \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}(t) & \dots & \frac{\partial \varphi}{\partial t_{d-1}}(t) \\ | & | & & | \end{pmatrix}$$

ist stetig, und $h(\varphi^{-1}(a)) > 0$

$\tilde{\nu}(a) = \nu(a)$ & ν pos. orient. bzgl. σ

h stetig
$\Rightarrow \quad \exists\, \varepsilon > 0 : h(t) > 0 \quad \forall t \in B_\varepsilon^{(d-1)}(\varphi^{-1}(a)) =: T_0$

$\Rightarrow \quad \tilde{\nu}(x) = \nu(x) \quad \forall x \in \underbrace{\varphi(T_0)}_{} \subseteq V$

↑ offene Umgeb. (in M) von a

$\tilde{\nu}$ stetig in a
$\Rightarrow \quad \nu$ stetig in a ∎

16.18 Lemma Sei (M, σ) orient. Hyperfläche in $\underline{d = 3}$ (d.h. $\dim \underline{M = 2}$), sei $a \in M$, und $\nu(a)$ der bzgl. σ pos. orient. Einheitsnormalenvektor in a.
Dann gilt, für eine Basis $\{\tau_1, \tau_2\}$ von $T_a M$:

$$\left.\begin{array}{l} \{\tau_1, \tau_2\} \text{ pos. orient.} \\ \text{Basis bzgl. } \sigma \end{array}\right\} \Leftrightarrow \nu(a) = \frac{\tau_1 \times \tau_2}{|\tau_1 \times \tau_2|}$$

(für "$\times$", siehe 8.4)

__Beweis__: Da $0 \neq \tau_1 \times \tau_2 \perp \operatorname{span}(\tau_1, \tau_2) = T_a M$ und $\dim N_a M = 1 \quad \Rightarrow \quad \nu(a) = \pm \frac{\tau_1 \times \tau_2}{|\tau_1 \times \tau_2|}$

$$\text{pos. orient.} \Leftrightarrow \det\begin{pmatrix} | & | & | \\ \nu(a) & \tau_1 & \tau_2 \\ | & | & | \end{pmatrix} > 0$$

$\Rightarrow$ es muss "+" gelten, da

$$\det(\tau_1 \times \tau_2 | \tau_1 | \tau_2) = (\det \underset{\substack{\uparrow \\ SO(3)}}{R}) \cdot \det(\tau_1 \times \tau_2 | \tau_1 | \tau_2) \quad (\forall R \in SO(3))$$

$$= \det(\underbrace{R\tau_1}_{=:\hat{\tau}_1} \times \underbrace{R\tau_2}_{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|\tau_2|} \,|\, \underbrace{R\tau_1}_{\hat{\tau}_1} \,|\, \underbrace{R\tau_2}_{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|\tau_2|})$$

wähle $R \in SO(3)$, so dass $R\tau_2 = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}|\tau_2|$

$$= |\tau_2|^2 \det\begin{pmatrix} \hat{\tau}_{1,2} & \hat{\tau}_{1,1} & 0 \\ -\hat{\tau}_{1,1} & \hat{\tau}_{1,2} & 0 \\ 0 & \hat{\tau}_{1,3} & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \hat{\tau}_{1,2} & \hat{\tau}_{1,1} \\ -\hat{\tau}_{1,1} & \hat{\tau}_{1,2} \end{pmatrix} \times |\tau_2|^2$$

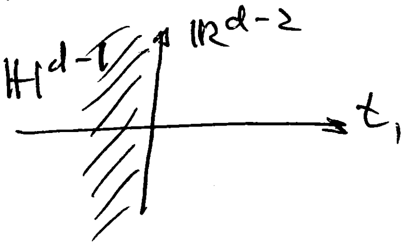
$$= |\tau_2|^2 (\hat{\tau}_{1,2}^2 + \hat{\tau}_{1,1}^2) > 0$$

∎

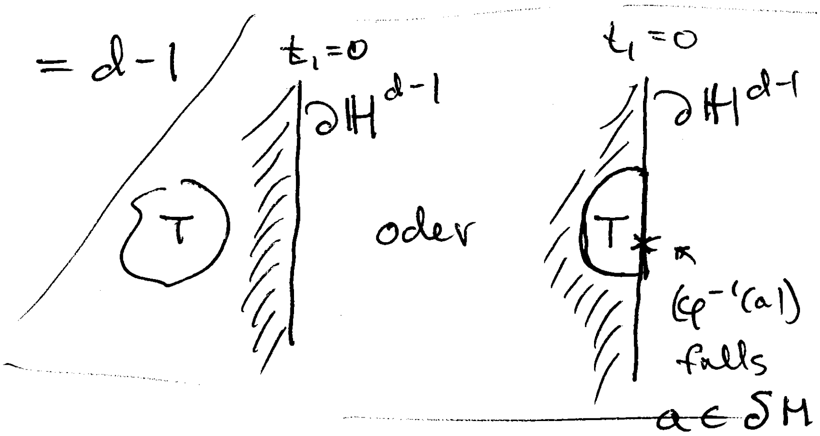
16.19. Definition Sei $d \geq 2$

(a) M Hyperfläche in $\mathbb{R}^d$ mit C^1-Rand $:\Longleftrightarrow$

$\forall a \in M \; \exists V \subseteq M$ offen in Relativtop. auf M mit $a \in V$ und lokale Karte $\varphi : T \to V$ mit



- T offen in $\mathbb{H}^{d-1} := \{ t \in \mathbb{R}^{d-1} : t_1 \leq 0 \}$ (in Rel.top.).
- φ Homöomorphismus.
- φ stetig diff.bar (falls $t_1 = 0$ nur linksseitige $\frac{\partial}{\partial t_1}$)
- Rang $\left(\frac{\partial \varphi_j}{\partial t_k}(t) \right)_{\substack{1 \leq j \leq d \\ 1 \leq k \leq d-1}} = d-1$



(b) $a \in M$ Randpkt. von M

$:\Longleftrightarrow \exists$ Karte $\varphi : T \to V \ni a$ mit $(\varphi^{-1}(a))_1 = 0$

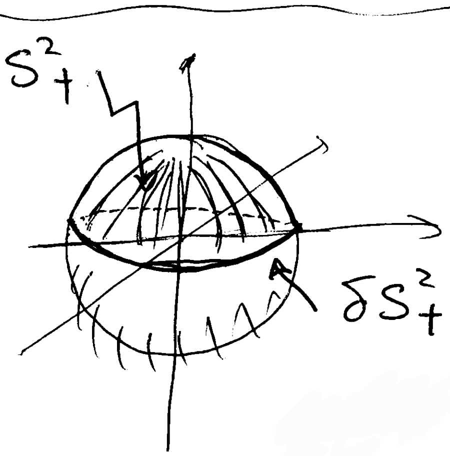
$\delta M := \{ a \in M : a$ ist Randpkt. von $M \}$

Rand von M

Achtung: $\delta M \neq \partial M = M$

$\uparrow$ topol. Rand in $\mathbb{R}^d$

16.20. Beispiel: Halbsphäre im $\mathbb{R}^3$



$S^2_+ := \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1$ und $x_3 \geq 0 \}$

$\delta S^2_+ = \{ x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1$ und $x_3 = 0 \}$

(δS^2_+ 1-dim C^1-Mfkt. im $\mathbb{R}^3$)

16.21. Satz Sei $d \geq 3$ und M Hyperfläche im $\mathbb{R}^d$ mit C^1-Rand. Dann ist δM eine $(d-2)$ dim. C^1-Mfkt im $\mathbb{R}^d$

Beweis: Sei φ Karte von M mit $T \cap \partial \mathbb{H}^{d-1} \neq \emptyset$
(d.h. $\varphi(T)$ überdeckt Teile von δM)
$\beta := \varphi|_{T \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}}$ ist Karte von δM ☒

16.22. Lemma Sei $d \geq 3$ und (M, σ) orient. Hyperfläche mit C^1-Rand im $\mathbb{R}^d$. Sei $\mathcal{A} := \{\varphi_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \sigma$ orient. Atlas und $\beta_\alpha := \varphi_\alpha|_{T_\alpha \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}}$ wie im Bew. von Satz 16.21.
Dann ist $\mathcal{A}_\delta := \{\beta_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N} : T_\alpha \cap \partial \mathbb{H}^{d-1} \neq \emptyset}$
ein orient. Atlas von δM und (seine Äquiv. klas. von Atlanten) def. die *induzierte Orientierung* σ_δ von δM

Beweis: Sei $\varphi, \tilde{\varphi}$ zwei (auf δM überlappende) Karten von M,
sei $W := \varphi^{-1}(\varphi(T) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{T}))$, $\tilde{W} := \tilde{\varphi}^{-1}(\varphi(T) \cap \tilde{\varphi}(\tilde{T}))$
und $\psi := \tilde{\varphi}^{-1} \circ \varphi : W \to \tilde{W}$ Diffeom. (siehe Satz 15.6(b)).

$$\psi(W \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}) \subseteq \tilde{T} \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}$$

$\Rightarrow \quad \psi_\delta := \tilde{\beta}^{-1} \circ \beta : W \cap \partial \mathbb{H}^{d-1} \to \tilde{W} \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}$ ist Diffeom

und, $\forall t = (0, \underbrace{\hat{t}}_{\mathbb{R}^{d-2}}) \in W \cap \partial \mathbb{H}^{d-1}$:

$$(D\psi)(0,\hat{t}) = \left(\begin{array}{c|ccc} \gamma & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & (D\psi_\delta)(\hat{t}) & \end{array}\right)$$

wobei $\gamma > 0$. Es folgt
$\varphi, \tilde{\varphi}$ gleichorient.
$\Leftrightarrow \beta, \tilde{\beta}$ gleichorient. ☒

16.3. Satz von Stokes im $\mathbb{R}^3$

Das Kurvenintegral für Vektorfelder in der Sprache von orientierten (1-dim) Mfkt'en.:

16.23. Definition Sei (M,σ) 1-dim. orientierte C^1-Mfkt. im $\mathbb{R}^d$, sei $\mathcal{A} = \{\varphi_\alpha : T_\alpha \subseteq \mathbb{R} \to V_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}} \in \sigma$ ein zugeh. orient. Atlas von M. Sei $F : M \to \mathbb{R}^d$ ein Borel-messbares Vektorfeld mit $|F| \in \mathcal{L}^1(M, \lambda_M)$. Setze

$$(*) \qquad \int_M F(x) \cdot d\lambda_M^\sigma(x) := \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} F(\varphi_\alpha(t)) \cdot \varphi_\alpha'(t)\, d\lambda^1(t)$$

wobei $U_\alpha \subseteq V_\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{N}$, die disjunkt gemachten V_α's sind;

$$M = \dot{\bigcup_{\alpha \in \mathbb{N}}} U_\alpha, \quad U_\alpha \text{ messbar.}$$

16.24. Bemerkung: Integral in $(*)$ ist wohldefiniert, denn

$$\left| \int_M F(x) \cdot d\lambda_M^\sigma(x) \right| \le \sum_{\alpha \in \mathbb{N}} \int_{\varphi_\alpha^{-1}(U_\alpha)} \underbrace{|F(\varphi_\alpha(t))|}_{|F|(\varphi_\alpha(t))} \cdot \underbrace{|\varphi_\alpha'(t)|}_{\sqrt{g_\alpha(t)}}\, d\lambda^1(t)$$

Gram-Det.

$$= \int_M |F|(x)\, d\lambda_M(x) < \infty$$

da $|F| \in \mathcal{L}^1(M, \lambda_M)$.

16.25 Satz (Integralsatz von Stokes (in $\mathbb{R}^3$))

Sei (M,σ) eine kompakte, orientierte Hyperfläche im $\mathbb{R}^3$ mit C^1-Rand. Sei $\nu: M \to \mathbb{R}^3$ das bzgl. σ positiv orient. Einheitsnormalenfeld. Sei $\mathcal{U} \supseteq M$ offen im $\mathbb{R}^3$ und $F \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R}^3)$. Dann gilt:

$$\int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x) \, d\lambda_M(x) = \int_{\partial M} F(x) \cdot d\lambda_{\partial M}^{\sigma_\partial}(x)$$

Beweis: 1. Schritt: Reduktion auf eine Karte, mittels C^∞-Zerlegung der Eins (Def. 13.18 & Bsp. 13.19) (analog 2. Schritt des Beweises des Satzes von Gauß):

Sei A Indexmenge, $\mathcal{A} := \{\varphi_\alpha : T_\alpha \to V_\alpha\}_{\alpha \in A} \in \sigma$ orient. Atlas von M. O.E.: sei jedes T_α (Kartengebiet) von der Form einer (u.U. angeschnittenen) Kugel,

(*) $T_\alpha = B_{r_\alpha}^{(2)}(c_\alpha) \cap \mathbb{H}^2$, mit $r_\alpha > 0$ und $c_\alpha \in \mathbb{H}^2$

[denn: $\forall a \in M \; \exists$ Karte $\varphi: T \to V \ni a$ (mit belieb. orient.), also $\varphi^{-1}(a) \in T \subseteq \mathbb{H}^2$; T offen in $\mathbb{H}^2 \Rightarrow T$ lässt sich auf Form in (*) verkleinern, mit Mittelpkt $c_\alpha = \varphi^{-1}(a)$; wähle $A := M$ und $\alpha = a$].

Sei $\lambda > 0$ Leb.-Zahl. der off. Überdeckung

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \quad \text{(nach Lemma 15.28; } M \text{ kompakt!)}$$

$$\left(V_\alpha = \varphi_\alpha\left(B_{r_\alpha}^{(2)}(c_\alpha) \cap \mathbb{H}^2\right) \right)$$

Setze $\varepsilon := \frac{l}{2\sqrt{3}}$ und sei $\{\gamma_{p,\varepsilon}\}_{p\in\mathbb{Z}^3}$ C^∞-Teilung der Eins (13.18). Dann gilt:

- $\operatorname{diam}(\operatorname{supp}\gamma_{p,\varepsilon}) = l \quad \forall p \in \mathbb{Z}^3$
- $P := \{p\in\mathbb{Z}^3 : \operatorname{supp}\gamma_{p,\varepsilon} \cap M \neq \emptyset\}$ endlich, da M kpt.,
- $\forall p \in P \ \exists \alpha_p \in A : \underbrace{(\operatorname{supp}\gamma_{p,\varepsilon})\cap M}_{\text{kpt. in } M} \subset V_{\alpha_p}$ (nach 15.28)
- $1 = \sum_{p\in\mathbb{Z}^3} \gamma_{p,\varepsilon}(x) \quad \forall x$

$\Rightarrow$

- $$\int_M (\nabla\times F)(x)\cdot\nu(x)\, d\lambda_M(x) = \sum_{p\in P}\int_M (\nabla\times(\gamma_{p,\varepsilon}F))(x)\cdot\nu(x)\, d\lambda_M(x)$$
- $$\int_{\delta M} F(x)\cdot d\lambda_{\delta M}^{\sigma_{ind}} = \sum_{p\in P}\int_{\delta M}(\gamma_{p,\varepsilon}F)(x)\cdot d\lambda_{\delta M}^{\sigma_{ind}}$$

$\Rightarrow$ Es genügt Beh. zu zeigen für Vektorfelder F so dass:

(*) $\left[\begin{array}{l} \exists \text{ eine bzgl. } \sigma \text{ pos. orient. Karte } \varphi: T\to V \text{ von } M \\ \text{mit } \underbrace{(\operatorname{supp}|F|\cap M)}_{\text{kompakt in } M} \subset \underbrace{V}_{\text{offen in } M} \end{array}\right]$

2. Schritt: Übergang zur Karte: Sei F & φ wie in (*)

$$\Rightarrow \int_M (\nabla\times F)(x)\cdot\nu(x)\, d\lambda_M(x) = \int_V (\nabla\times F)(x)\cdot\nu(x)\, d\lambda_M(x)$$

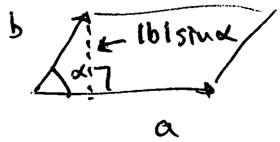
$$= \int_T (\nabla\times F)(\varphi(t))\cdot\nu(\varphi(t))\, \underbrace{\sqrt{g(t)}}_{\text{Gram-Det.}}\, d\lambda^2(t)$$

Es gilt:

- $$\nu(\varphi(t)) = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)}{\left|\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)\right|}$$ (nach Lemma 16.18 & Def. 16.11 (b))

- $$\sqrt{g(t)} = \left\{\begin{array}{l}\text{Flächeninhalt des von } \frac{\partial\varphi}{\partial t_1} \text{ \& } \frac{\partial\varphi}{\partial t_2} \\ \text{im } \mathbb{R}^3 \text{ aufgespannten Parallelogramm}\end{array}\right\}$$ (Üb.Auf. 14.1)

$$= \left|\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t) \times \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)\right|$$



- $\forall a,b,c,d \in \mathbb{R}^3$:

$$(a\times b)\cdot(c\times d) = \sum_{1\le j<l\le 3} (a_j b_l - a_l b_j)(c_j d_l - c_l d_j)$$

$$\overset{\text{antisymm.}}{=} \sum_{1\le j,l\le 3} (a_j b_l - a_l b_j)\, c_j d_l$$

Daraus:

$$(\nabla\times F)(\varphi(t))\cdot\nu(\varphi(t))\sqrt{g(t)} = \sum_{1\le j,l\le 3}\left(\partial_{x_j}F_l - \partial_{x_l}F_j\right)(\varphi(t))\,\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}(t)\,\frac{\partial\varphi_l}{\partial t_2}(t)$$

$$= \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial t_1}\left[F_l(\varphi(t))\right]\frac{\partial\varphi_l}{\partial t_2}(t) - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial t_2}\left[F_j(\varphi(t))\right]\frac{\partial\varphi_j}{\partial t_1}(t)$$

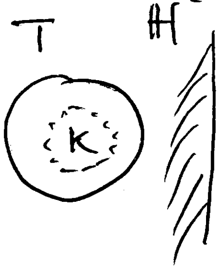
$$\overset{(!)(!!)}{=} \frac{\partial}{\partial t_1}\Big(\underbrace{F(\varphi(t))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(t)}_{=:G_2(t)}\Big) - \frac{\partial}{\partial t_2}\Big(\underbrace{F(\varphi(t))\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial t_1}(t)}_{=:G_1(t)}\Big)$$

(Für (!!): es wird, streng genommen, hierfür $\varphi\in C^2(T)$ (!) gebraucht. – Entweder: man nimmt an, M is C^2-Mfkt – oder, man muss hier ein Glättungskern/Mollifier, wie auf dem Weihnachtsblatt, einsetzen – das sparen wir uns aber...)

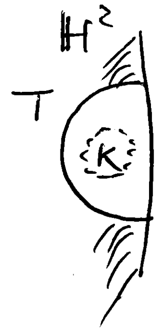
3. Schritt: Analyse der Integrale: Wende Satz von Green in Kartengebiet T an:

Da $\overline{T}$ Kompaktum mit stückweisen (!) C^1-Rand, folgt, mit Satz von Green (Kor. 15.31 – gilt auch (!) für stückweisen C^1-Rand):

1. Fall: Sei $K := \operatorname{supp}(|F|\circ\varphi)$ kpt in $\mathbb{H}^2$, mit $K \cap \partial\mathbb{H}^2 = \emptyset$ $[\Rightarrow \operatorname{dist}(K, \partial\mathbb{H}^2) > 0)]$ (*)



oder



$$\Rightarrow \int_M (\nabla\times F)(x)\cdot \nu(x)\, d\lambda_M(x)$$
$$= \int_T \left[\frac{\partial}{\partial t_1} G_2(t) - \frac{\partial}{\partial t_2} G_1(t)\right] d\lambda^2(t) \overset{\text{Tut.Aufg. 10.2}}{=} 0$$

da $G_1|_{\partial T} = 0 = G_2|_{\partial T}$

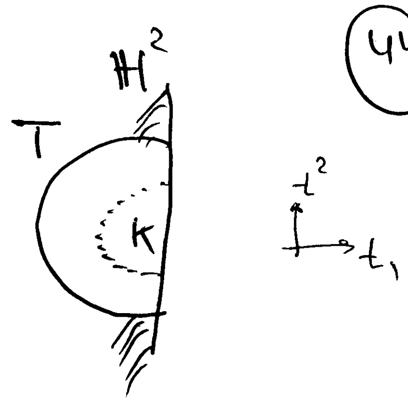
Andererseits $[t_2 \mapsto \varphi((0,t_2)) =: \varphi(0,t_2)$ ist pos. orient. Karte bzgl. σ_{ind} von $\delta M]$ $(\sigma_{ind} \equiv \sigma_\delta)$

$$\int_{\delta M} F(x)\cdot d\lambda^{\sigma_{ind}}_{\delta M}(x) = \int_{\delta M \cap V} F(x)\cdot d\lambda^{\sigma_{ind}}_{\delta M}(x)$$

$$= \int_{T\cap\partial\mathbb{H}^2} \underbrace{F(\varphi(0,t_2))}_{=0 \text{ (wegen (*))}} \cdot \frac{\partial\varphi}{\partial t_2}(0,t_2)\, d\lambda^1(t_2) = 0$$

✓

2. Fall: $K \cap \partial \mathbb{H}^2 \neq \emptyset$



Wie im 1. Fall gilt:

$$\int_M (\nabla \times F)(x) \cdot \nu(x)\, d\lambda_M(x)$$

$$= \int_T \left[\frac{\partial}{\partial t_1} G_2(t) - \frac{\partial}{\partial t_2} G_1(t)\right] d\lambda^2(t)$$

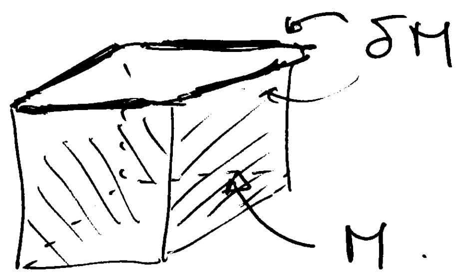
$$= \int_T \frac{\partial}{\partial t_1} G_2(t)\, dt \qquad \text{(Tut. Aufg. 10.2)}$$

$$\overset{(!)}{=} \int_{\partial T \cap \partial \mathbb{H}^2} \underbrace{G_2((0,t_2))}_{F(\varphi(0,t_2)) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t_2}(0,t_2)} d\lambda^1(t_2) \qquad \text{(Kor. 15.31) (Satz von Green)}$$

$$= \int_{\delta M} F(x) \cdot d\lambda_{\delta M}^{\delta\,\mathrm{ind}}(x) \qquad (\text{da } \partial T \cap \partial \mathbb{H}^2 = T \cap \partial \mathbb{H}^2)$$

$\boxtimes$

16.26. Bemerkung: (a) Der Satz von Stokes gilt auch noch, wenn M nur glatt bis auf 2-dim Nullmenge, und δM glatt bis auf 1-dim Nullmenge. z.B. M = Oberfläche von Würfel ohne "Deckel" in $\mathbb{R}^3$:



B. Ausblicke

B.1. Hausdorffmaß

Um Gauß/Green/Stokes zu erweitern, zur Objekte mit "Kanten/Ecken" etc:

B.1. Definition Sei $d \in \mathbb{N}$, $s > 0$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^d$ heißt Hausdorff-Nullmenge zur Dimension s $:\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \{W_j\}_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^d$, W_j achsenparaller Würfel mit Kantenlänge $r_j > 0$ so daß:

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} r_k^s < \varepsilon \quad (s > 0!)$$

B.2. Bemerkung: (a) $A \subseteq \mathbb{R}^d$ Hausdorff-Nullmenge zur Dim d
$\Leftrightarrow$ A Lebesgue-Nullmenge im $\mathbb{R}^d$
(siehe auch später)

(b) Für $A \subseteq \mathbb{R}^n \times \underbrace{\{0\}}_{\mathbb{R}^{d-n}} \subseteq \mathbb{R}^d$: A Hausdorff-Nullmenge zur Dim n
$\Leftrightarrow$ "$A \subseteq \mathbb{R}^n$" ist Leb. Nullmenge im $\mathbb{R}^n$

(c) $s > 0$ muss nicht ganze Zahl sein! (siehe später).

B.2. Definition (a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^d$; $a \in \partial G$ heißt regulärer Randpkt von G $:\Leftrightarrow$ $\exists\, \mathcal{U} \ni a$ offen und $\rho \in C^1(\mathcal{U}; \mathbb{R})$ mit $\rho'(x) \neq 0 \ \forall x \in \mathcal{U}$ und

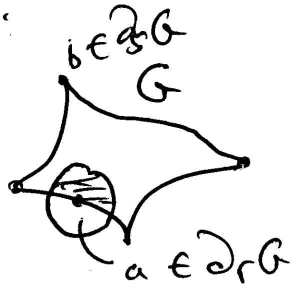
$$G \cap \mathcal{U} = \{x \in \mathcal{U} \mid \rho(x) \leq 0\}$$

(vergleiche 15.12).

Notation: $a \in \partial_r G$

(b) Wenn $a \in \partial G$ <u>nicht</u> regulär, heißt a <u>singulär Randpkt</u> (<u>Notation</u>: $a \in \partial_s G$; d.h. $\partial_s G := \partial G \setminus \partial_r G$).

Es gilt: $\partial G = \partial_r G \,\dot{\cup}\, \partial_s G$



(c) G heißt <u>C^1-Polyeder im $\mathbb{R}^d$</u>

$:\Longleftrightarrow$ $G \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt und $\partial_s G$ ist Hausdorff-Nullmenge zur Dim. $d-1$

($\partial_r G$ ist $(d-1)$-dim. C^1-Mfkt.) (Bild: $d=2$; $d-1=1$: $\partial_s G$ ist 1-Nullmenge).

B.3. Fakten (!) Man kann Gauß/Green/Stokes für C^1-Polyeder beweisen!! (Siehe dazu: Königsberger, "Analysis 2" (2004) Kap. 12, Kaballo, "Einführung in die Analysis III" (1999), Sätze 20.3, 20.11).

Allgemeiner zur Hausdorff-Maße (nicht nur Nullmengen):

B.4. Definition & Satz Sei $d \in \mathbb{N}$, $s \geq 0$ und $A \subseteq \mathbb{R}^d$

(a) Sei $$\eta_{s,\delta}(A) := \frac{\omega_s}{2^s} \cdot \inf\left\{ \sum_{m=1}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_m))^s : A \subseteq \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m, \ \operatorname{diam}(A_m) < \delta \right\}$$

(wobei $\omega_s := \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma(1+\frac{s}{2})}$, $s \geq 0$; für $s \in \mathbb{N}$: $\omega_s = \lambda^s(B_1^{(s)}(0))$ Üb. 10.2(ii)).

(b) Sei $$\eta_s(A) := \sup_{\delta>0} \eta_{s,\delta}(A) = \lim_{\delta \downarrow 0} \eta_{s,\delta}(A) \in [0,\infty]$$

($\delta_1 < \delta_2 \Rightarrow \eta_{s,\delta_1}(A) > \eta_{s,\delta_2}(A)$)

Dann ist, $\forall s \geq 0$,

$\eta_s : \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) \to [0,\infty]$ äußeres Maß (auf $\mathbb{R}^d$)

(siehe 11.29)

Das diesbzgl. Maß (aus Carathéodory, Satz 11.32) $\mathcal{H}^s$ auf $\mathbb{R}^d$ wird s-dimensionale Hausdorff-Maß genannt $(s \geq 0)$

(c) Alle Borelmengen sind η_s-messbar (d.h. $\mathcal{H}^s$-messbar).

B.5. Bemerkung: Wie beim Lebesgue-Maß ist es schwierig die $\mathcal{H}^s$-messbaren Mengen anzugeben. B.4. (c) folgt aus:

B.6. Satz Ein äußeres Mass μ auf $\mathbb{R}^d$ ist genau dann metrisch, wenn alle Borelmengen μ-messbar sind.

Hier ist:

B.7. Definition (Carathéodory) Ein äußeres Maß auf $\mathbb{R}^d$ heisst metrisch :$\Leftrightarrow$

$$d(A,B) > 0 \Rightarrow \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B), \quad A, B \subseteq \mathbb{R}^d$$

Wichtigsten Eigenschaften von $\mathcal{H}^s$ (zeigt, daß $\mathcal{H}^s$ Verallgemeinerung von sowohl Lebesguemaß λ^d als Flächenmaß λ_M!):

B.8. Satz Sei $s \geq 0$ und $\mathcal{H}^s$ s-dim. Hausdorffmaß auf $\mathbb{R}^d$. Setze, für $E \subseteq \mathbb{R}^d$,

$$\dim(E) := \inf\{s \in [0,\infty[: \mathcal{H}^s(E) = 0\}$$

(Hausdorff-dimension von $E \subseteq \mathbb{R}^d$).

Dann gilt:

(i) $\forall E \subseteq \mathbb{R}^d$: $\dim E \in [0,d]$;
$\mathcal{H}^s(E) = +\infty \quad \forall s < \dim(E)$
$\mathcal{H}^s(E) \in]0,\infty[\implies s = \dim(E)$

("$\Leftarrow$" gilt nicht: es kann $\mathcal{H}^s(E) \in \{0,\infty\}$ sein für $s = \dim(E)$)

(ii) $\mathcal{H}^s(\alpha E) = \alpha^s \mathcal{H}^s(E)$, $\alpha > 0$ (vergleiche Bsp. 14.14(b))

(iii) $\mathcal{H}^s$ ist Bewegungsinvariant (vergleiche Bsp. 14.23)

(iv) $s > d \implies \mathcal{H}^s(E) = 0$

(v) $\forall s \in [0,d] \; \exists K \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt mit $\dim(K) = s$

(vi) $A \subseteq \mathbb{R}^d$ offen $\implies \dim(A) = d$

(vii) $\mathcal{H}^0$ ist Zählmaß auf $\mathbb{R}^d$

(viii) $\mathcal{H}^d(E) = \lambda^d(E)$

(ix) Für $E = \Gamma_\kappa$ C^1-Kurvenbogen: $\mathcal{H}^1(E) = \ell(\kappa)$
(Kurvenlänge)

(x) Sei $1 \le n \le d-1$, $n \in \mathbb{N}$, und E n-dim. C^1-Mfkt; dann ist $\mathcal{H}^n(E) = \lambda_E(E)$

Siehe Brokate & Kersting,
Maggi, "Sets of Finite Perimeter and Geometric Variational Problems"
(& Literatur zur "geometrische Maßtheorie").

Stichwort: "Minimal-Flächen"

B.2. Differentialformen

In viele Darstellungen von Analysis 3 – und in der Differentialgeometrie – wird "Satz von Stokes" über Differentialformen formuliert: Es wird ein Integrationstheorie von „glatte Diff.formen" ω aufgebaut und gezeigt, daß

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Dabei sind ω Multilineare Abbildungen (gewisse), auf Tangentialraum $T_a M$, die glatt von $a \in M$ abhängen.

(Siehe dazu Jähnich; Königsberger (Kap. 13); Amann-Escher; Forster.)