6.2. Eigenschaften des Riemann-Integrals

$\boxed{6.14 \text{ Satz}}$ Seien $f, g : I \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(a) Dann ist $\lambda f + \mu g$ Riemann-integrierbar und

$$\int_I (\lambda f + \mu g)(x)\,dx = \lambda \int_I f(x)\,dx + \mu \int_I g(x)\,dx$$

(b) Monotonie: $f \le g \Rightarrow \int_I f(x)\,dx \le \int_I g(x)\,dx$

(c) Dreiecksungleichung: $|f| : I \to \mathbb{R}_{\ge}$ ist Riemann-integrierbar und $\left|\int_I f(x)\,dx\right| \le \int_I |f(x)|\,dx$

(d) Additivität: Sei $I = [a, b]$ und $a < c < b$. Dann sind äquivalent

(i) f Riemann integrierbar auf I

(ii) f " " " $[a, c]$ und auf $[c, b]$

Gilt eine der beiden Aussagen, so ist

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad (*)$$

Konvention

$$\int_a^a f(x)\,dx := 0\,; \quad \int_a^b f(x)\,dx := -\int_b^a f(x)\,dx$$

falls $b < a$ und f Riemann-integrierbar auf $[b, a]$

Beweis von Satz 6.14

(a) aus Satz 6.7 (i) $\Leftrightarrow$ (ii), da

$$R(\mathcal{Z}, \lambda f + \mu g) = \lambda R(\mathcal{Z}, f) + \mu R(\mathcal{Z}, g)$$

[gültig für reellwertige Fkt'en $\Rightarrow$ gültig für $\mathbb{C}$]

(b) wegen (a) genügt es zu zeigen:

$$g \geq 0 \Rightarrow \int_I g(x)\,dx \geq 0$$

$\varphi_- := 0$ ist Treppenfkt.

mit $\varphi_- \leq g \Rightarrow 0 = \int_I \varphi_-(x)\,dx \leq \mathcal{U}_I(g) \underset{g \text{ integrierbar}}{=} \int_I g(x)\,dx$

(c) f integrierbar $\Rightarrow$ $\operatorname{Re} f \wedge \operatorname{Im} f$ integrierbar

$\Downarrow$ Satz 6.10 $\Downarrow$

beschränkt und stetig bis auf Nullmenge N_1 ; Nullmenge N_2

$\Rightarrow x \mapsto |f(x)| = \sqrt{(\operatorname{Re} f)(x)^2 + (\operatorname{Im} f)(x)^2}$ beschränkt und stetig bis auf $N_1 \cup N_2$ (wieder Nullmenge!)

$\overset{\text{Satz 6.10}}{\Longrightarrow}$ integrierbar

$$\Rightarrow \left| \int_I f(x)\,dx \right| = \lim_{\mu(\mathcal{Z}) \to 0} \underbrace{|R(\mathcal{Z}, f)|}_{\leq R(\mathcal{Z}, |f|)} \leq \int_I |f(x)|\,dx$$

(d) (i) $\Leftrightarrow$ (ii) folgt aus Satz 6.10, und

Glg. (*) aus Satz 6.7. (ii) und einer Zerlegung $\mathcal{Z}$ mit c als Stützstelle

$\blacksquare$

6.15 Satz (Mittelwertsatz der Integralrechnung)

Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig ($\overset{\text{Kor. } 6.11}{\Longrightarrow}$ Riemann-integrierbar)

sei zudem $g \geq 0$.

Dann $\exists \xi \in I$: $\displaystyle\int_I f(x) g(x)\, dx = f(\xi) \int_I g(x)\, dx$

(hängt von f, g und I ab!)

Speziell für $g = 1$ gilt : $\displaystyle\int_I f(x)\, dx = f(\xi)\, |I|$

Beweis : Sei $\begin{matrix} m \\ M \end{matrix} := \begin{matrix} \inf \\ \sup \end{matrix} \{ f(x) : x \in I \} \overset{g \geq 0}{\Longrightarrow} m g \leq f g \leq M g$

Satz 6.14 (b) $\Longrightarrow$
$$m \int_I g(x)\, dx \leq \int_I f(x) g(x)\, dx \leq M \int_I g(x)\, dx$$

$\Longrightarrow \exists \mu \in [m, M] : \displaystyle\int_I f(x) g(x)\, dx = \mu \int_I g(x)\, dx$

$\Downarrow$ Zwischenwertsatz (f stetig)

$\exists \xi \in I : \mu = f(\xi)$ ∎

Eine unmittelbare Anwendung:

6.16 Hauptsatz der Differential- u. Integralrechnung

Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig, sei $x_0 \in I$ und

$$F : \begin{matrix} I \to \mathbb{C} \\ x \longmapsto \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(x')\, dx' =: F(x) \end{matrix}$$

Dann ist F diff.bar und $F' = f$.

Beweis Es genügt Satz für $f: I \to \mathbb{R}$ stetig zu zeigen (daraus folgt Beh. für $\mathbb{C}$)

Sei $x \in I$, $0 \neq h \in \mathbb{R}$, so dass $x+h \in I$

$$\Rightarrow \frac{F(x+h)-F(x)}{h} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Satz 6.14 (d)}}}{=} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x')\,dx' \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Mittelwertsatz 6.15} \\ \exists \xi_h \in [x, x+h] \\ (\text{falls } h>0)}}{=} f(\xi_h) \xrightarrow[\xi_h \to x]{h \to 0} \underset{\substack{\uparrow \\ f \text{ stetig!}}}{f(x)}$$

∎

| 6.17. Definition | Sei $f: I \to \mathbb{C}$ stetig

$$\left.\begin{array}{l} F: I \to \mathbb{C} \text{ diff.bar ist} \\ \text{Stammfkt. zu } f \end{array}\right\} :\Leftrightarrow F' = f$$

Schreibweise: $F = \int f = \int f(x)\,dx$; $F(x) = \int^x f = \int^x f(t)\,dt$

| 6.18. Satz | Sei $f: I \to \mathbb{C}$ stetig und F Stammfkt. zu f.

Dann gilt:

$$\left.\begin{array}{l} G: I \to \mathbb{C} \text{ diff.bar ist} \\ \text{Stammfkt. zu } f \end{array}\right\} \Leftrightarrow F - G = \text{konst.}$$

Beweis: „$\Leftarrow$" $\quad \underbrace{F'}_{f} - G' = 0$

„$\Rightarrow$" Sei G auch Stammfkt. zu f

$$\Rightarrow (G-F)' = G' - F' = f - f = 0$$

$$\xRightarrow[\text{(Übung!)}]{G-F \text{ diff.bar auf } I} G - F = \text{konst.}$$

∎

6.19 Korollar

Sei $f : I \to \mathbb{C}$ stetig. Dann ist $\forall x_0 \in I$
$I \ni x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$ eine Stammfkt. zu f und
$\forall$ Stammfkt'en F von f gilt $\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt = F(x) - F(x_0) =: F(t)\Big|_{x_0}^{x}$

6.20 Beispiele

(a) Sei $r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, $I = [a,b]$ abgeschl. Intervall mit $0 \notin I$. $\Rightarrow$ $\int_a^b x^r\,dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} \Big|_a^b$

NB: Für $r \geq 0$ braucht mann die Vor. „$0 \notin I$" nicht!

(b) Sei I wie oben (insbes. entweder $a > 0$ oder $b < 0$)

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,dx = \left\{ \begin{array}{ll} \ln x \Big|_a^b, & a > 0 \\ \ln(-x) \Big|_a^b, & b < 0 \end{array} \right\} = \ln|x| \Big|_a^b$$

$$\frac{d}{dx} \ln(-x) = \frac{1}{-x}(-1)$$

(c) $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$

Falls Stammfkt. nicht offensichtlich, können die folgenden Integrationsformeln (part. Integr. & Substitution) u. U. nützlich sein.

6.21 Satz (Partielle Integration) („PI")

Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff-bar. Dann gilt

$$\int_a^b f(x) g'(x)\, dx = f(x) g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x) g(x)\, dx$$

Beweis: Produktregel (diff.) für $\Phi := fg$

$\Rightarrow \Phi' = f'g + fg' =: \varphi$ und Kor 6.19 mit $f = \varphi$, $F = \Phi$ ∎

6.22 Beispiele

(a) Seien $a, b > 0$

$$\int_a^b \underbrace{\ln x}_{\substack{\ln x \cdot 1 \\ f \;\; g'}}\, dx \overset{PI}{=} (\ln x)\, x\Big|_a^b - \underbrace{\int_a^b \underbrace{\frac{1}{x} \cdot x}_{1}\, dx}_{x|_a^b} = x(\ln x - 1)\Big|_a^b$$

(b) $I_m(x) := \int_0^x \underbrace{\sin^m(t)}_{:=(\sin t)^m}\, dt$, $\quad m \in \mathbb{N}_0$, $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ • $m = 0, 1$: $I_0(x) = x$; $I_1(x) = -\cos x + 1$

• $m \geq 2$:

$$I_m(x) = \int_0^x \underbrace{\sin t}_{g'}\, \underbrace{\sin^{m-1} t}_{f}\, dt = -\cos x \sin^{m-1} x + \int_0^x \underbrace{\cos^2 t}_{1-\sin^2 t}\, (m-1) \sin^{m-2} t\, dt$$

$$\Rightarrow I_m(x) = -\cos x \sin^{m-1} x + (m-1) I_{m-2}(x) + (1-m) I_m(x)$$

$$\Rightarrow I_m(x) = -\frac{1}{m} \cos x \sin^{m-1} x + \left(1 - \frac{1}{m}\right) I_{m-2}(x)$$

- erlaubt rekursive Berechnung aller $I_m(x)$!
- Insbes.: $I_2(x) = \int_0^x \sin^2 t \, dt = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{x}{2}$

$\boxed{\text{6.23 Satz}}$ (Riemannsches Lemma)

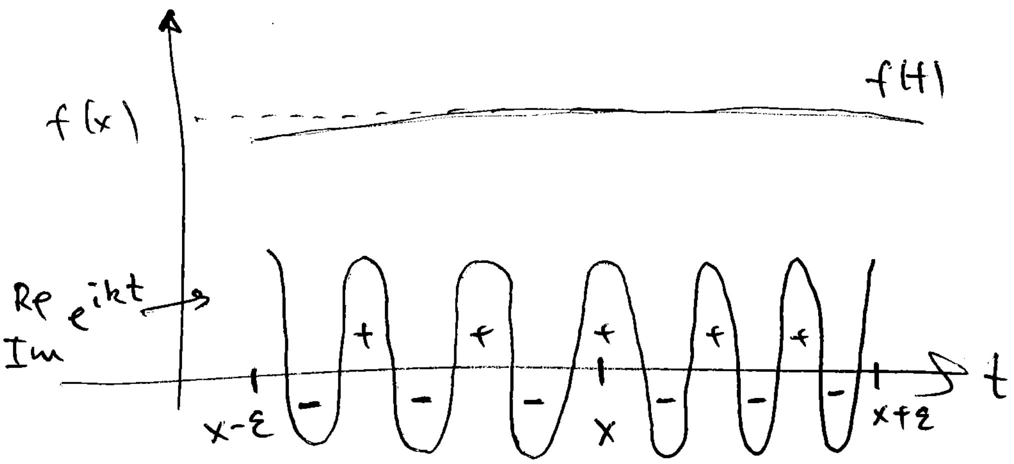
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff.-bar. Dann gilt für

$$\tilde{f}(k) := \int_a^b f(x) e^{ikx} \, dx \quad , \quad k \in \mathbb{R}$$

dass $\lim\limits_{k \to \pm\infty} \tilde{f}(k) = 0$.

6.24 Bemerkung

- $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ heißt Fourier-Transformierte von f (modulo Vorfaktor)
- wird später ($\geq$ Ana 3) verallg. auf integrierbare f
  $\rightsquigarrow$ Riemann-Lebesgue-Lemma
- Moral: für $|k| \gg \frac{1}{\varepsilon} \gg \sup\limits_{t \in [x-\varepsilon, x+\varepsilon]} |f'(t)|$



„+"- und „−"-Anteile heben sich weg für $|k| \to \infty$

Beweis von Satz 6-23 Sei $k \neq 0$

$$\tilde{f}(k) \overset{PI}{=} f(x) \frac{e^{ikx}}{ik} \Big|_a^b - \frac{1}{ik} \int_a^b f'(x) e^{ikx} \, dx$$

$$\Rightarrow |\tilde{f}(k)| \leq \frac{1}{|k|} \Big(\underbrace{|f(b)|}_{<\infty} + \underbrace{|f(a)|}_{<\infty} \Big) + \frac{1}{|k|} (b-a) \underbrace{\sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|}_{=: M < \infty}$$

f' stetig auf $[a,b] \Rightarrow$ beschr.

■

$\boxed{\text{6.25 Satz}}$ (Substitutionsregel)

Sei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ stetig, sei $\varphi: [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff-bar.

Dann gilt
$$\int_a^b f(\varphi(x)) \varphi'(x) \, dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y) \, dy \qquad (*)$$

Beweis: (Kettenregel!)

Für $g := (f \circ \varphi) \varphi'$ gilt:

- $g: [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig
- $G := F \circ \varphi$ ist Stammfkt. zu g

  $\uparrow$ Stammfkt zu f (ex. nach HDI 6.16)

da (Kettenregel!) $G' = (\underbrace{F'}_{f} \circ \varphi) \varphi' = g$

also: rechte Seite $(*) \overset{6.19}{=} F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

linke Seite $(*) \overset{6.19}{=} G(b) - G(a) = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a))$

■

Merkregel: Für $y = \varphi(x)$ gilt

- $\frac{dy}{dx} = \varphi'(x)$; informell (!): $dy = \varphi'(x)\,dx$
- $x = a$ entspricht $y = \varphi(a)$
  $x = b$ entspricht $y = \varphi(b)$

6.26 Beispiele

(a) $$\int_a^b f(\underbrace{mx+c}_{y=\varphi(x)})\,dx \overset{dy = m\,dx}{=} \frac{1}{m}\int_a^b f(\underbrace{mx+c}_{y})\underbrace{m\,dx}_{dy} = \frac{1}{m}\int_{ma+c}^{mb+c} f(y)\,dy$$

für $m, c \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$

(b) Sei $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig diff-bar und $\varphi(x) \neq 0$ $\forall x \in [a,b]$

$$\Rightarrow \int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}\,dx \underset{y=\varphi(x)}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{y}\,dy \underset{\text{Bsp. 6.20(b)}}{=} \ln|\varphi(x)|\Big|_a^b$$

(c) $$\int^x \arctan(t)\,dt = \int^x \underbrace{\arctan(t)}_{f} \cdot \underbrace{1}_{g'}\,dt$$

$$\overset{PI}{=} x\arctan(x) - \underbrace{\int^x \frac{1}{1+t^2}\, 2t \cdot \frac{1}{2}\,dt}_{\overset{(b)}{=}\ \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}$$

(Probe durch Differenzieren!)

6.27. Satz (Vertauschung von Integration mit Limiten)

$\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. gleichmäßig auf $[a,b]$ gegen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ ($\overset{\text{Satz } 3.33}{\Longrightarrow}$ f stetig!)

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \qquad \left(= \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx \right)$$

Beweis

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx \right| \le \int_a^b \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\le \sup_{y\in[a,b]} |f(y)-f_n(y)|}\,dx$$

$$\le \|f - f_n\|_\infty (b-a) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

∎

Beispiel: Sei $0 < a < b$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b e^{-nx^2}\,dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} e^{-nx^2}\,dx = 0$$

$$\sup_{x\in[a,b]} e^{-nx^2} = e^{-na^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Eine Anwendung:

6.28. Satz (Vertauschung von Differentiation mit Limiten)

$\forall n \in \mathbb{N}$ sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig diff.bar, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. punktweise gegen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ und $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ kgt. gleichmässig auf $[a,b]$. Dann ist f stetig diff.bar und

$$\lim_{n\to\infty} (f_n') = f' \qquad \left(= \left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' \right)$$

Beweis: Sei $g := \lim_{n\to\infty} f_n'$ $\left(\overset{\text{Satz 3.33}}{\Rightarrow} g \text{ stetig auf } [a,b]\right)$

zu zeigen: $g = f'$. Nach HDI 6.16:

$$\begin{array}{ccc} f_n(x) = f_n(a) & + & \int_a^x f_n'(t)\,dt \\ \Big\downarrow \text{pkt.w Kgz.} & & \Big\downarrow \text{Satz 6.27} \\ f(x) = f(a) & + & \int_a^x g(t)\,dt \end{array} \qquad \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [a,b]$$

$\overset{\text{HDI 6.16}}{\Longrightarrow}$ f diff.bar und $f' = g$, also stetig diff.bar ∎

6.29 Warnung

$$f_n(x) := \frac{1}{n}\sin(nx) \Rightarrow \sup_{x\in[a,b]} \underbrace{|f_n(x)|}_{\leq \frac{1}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

also $(f_n)_n$ glm. gegen 0 kgt.,

Aber: $f_n'(x) = \cos(nx)$ kgt. nicht für $n \to \infty$.

$\boxed{\text{6.30 Korollar}}$ (Gliedweise Differentiation von Potenzreihen)

Sei $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ Potenzreihe mit Kgz.radius R. Dann gilt

$$\forall x \in\,]-R,R[\,: \quad \frac{d}{dx}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \cdot n x^{n-1}$$

(insbes. ist $\sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ diff.bar).

Zusatz: $x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_n x^n$ bel. oft diff.bar auf $]-R,R[$

Beweis: Für $N \in \mathbb{N}$ sei $f_N(x) := \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \quad \forall x \in]-R, R[$

Sei $0 < \rho < R$ bel. fest

(i) $\forall N \in \mathbb{N}$ ist f_N stetig diff.-bar auf $[-\rho, \rho]$

(ii) $f_N(x) \xrightarrow{N\to\infty} f(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} a_n x^n \quad \forall x \in [-\rho, \rho]$

(iii) $f_N'(x) = \sum_{n=0}^{N} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{N-1} (n+1) a_{n+1} x^n$

Beh.: Kgz. radius von $\sum_{n \in \mathbb{N}_0} (n+1) a_{n+1} x^n$ ist R, da

- $(n+1)^{1/n} = e^{1/n \ln(n+1)} \xrightarrow{n\to\infty} 1 \quad (= e^0)$
- Satz von Hadamard ✓

$\overset{\text{Satz 4.23}}{\Longrightarrow}$ $(f_N')_N$ kgt. glm. auf $[-\rho, \rho]$

(i) - (iii) $\overset{\text{Satz 6.28}}{\Longrightarrow}$ f diff. bar auf $[-\rho, \rho]$ und

$$f'(x) = \lim_{N\to\infty} f_N'(x) = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (n+1) a_{n+1} x^n \quad \forall x \in [-\rho, \rho]$$
$$= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} n a_n x^{n-1}$$

$\rho < R$ bel.
$\Longrightarrow$ Beh.

Zusatzbeh. per Induktion $\rightsquigarrow$ Übung!
(siehe expl. gemacht...)

☒

6.31 Beispiel Für $|x| < 1$ gilt

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} n x^n = x \sum_{n \in \mathbb{N}} \underbrace{n x^{n-1}}_{\frac{d}{dx} x^n} \overset{\text{Kor. 6.30}}{=} x \frac{d}{dx} \Big(\underbrace{\sum_{n \in \mathbb{N}} x^n}_{\frac{1}{1-x} - 1} \Big)$$

$$= \frac{x}{(1-x)^2}$$